O GEOGEBRA E A GEOMETRIA SINTÉTICA: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES BRASILEIROS

Dr. José Carlos Pinto Leivas - MsC. Nadia Roberta Quaini Bresolin

leivasjc@unifra.br - nadiarqb@live.com

Professor do PPGECIMAT do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – UNIFRA – BRASIL - Profa. de Escola Básica brasileira - BRASIL

Tema: pensamiento geométrico
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: geometria sintética, GeoGebra, teorema euclidiano

Resumo

Apresenta-se resultados parciais de uma pesquisa, na qual a segunda autora investigou com alunos do Ensino Médio brasileiro demonstrações visuais utilizando o software GeoGebra. Teve-se como objetivo investigar como um grupo de estudantes do Ensino Médio brasileiro utilizou os princípios de Geometria Sintética com a ferramenta computacional GeoGebra para realizar argumentações na demonstração da proposição 5 do livro I de Euclides, a qual afirma que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. A metodologia, de cunho investigativo, comparou a forma original, segundo Euclides, e a adaptada para a linguagem atual. A análise dos registros dos investigados mostrou que o software foi um facilitador para as argumentações dos estudantes enunciarem a proposição de forma pertinente.

Marco teórico.

Segundo Struik (1997, p. 90-91), "A maior parte da geometria das nossas escolas era retirada, por vezes literalmente, de oito ou nove dos treze livros; e a tradição euclidiana ainda pesa bastante na nossa instrução elementar. Para o matemático profissional, estes livros têm apresentado um fascínio inelutável (se bem que os seus alunos muitas vezes os achem fastidiosos). Considerando isso ainda ocorrer na educação atual, trazer nova abordagem explorando o uso de um software de Geometria Dinâmica é um componente que, senão elimina, ameniza essa ação fastidiosa que o processo dedutivo apresenta para os estudantes.

Villiers (2003) afirma existir tendência entre matemáticos de apresentarem apenas resultados prontos e acabados de seus trabalhos, “de uma forma elegante e muito organizada, sem discutir nem reflectir muito sobre os processos de descoberta/invenção e demonstração”. (p.31). O autor apresenta exemplos pessoais realizados por ele com a ajuda de software de Geometria Dinâmica. Indo mais além, afirma: “Os leitores são também incentivados a investigar primeiro os resultados com as suas próprias construções dinâmicas, antes de lerem as demonstrações”.

Será que procuramos desenvolver nos nossos alunos o sentido real da Matemática? Courant e Robbins (2000) lançam a seguinte questão-título em seu livro, “O que é Matemática?” A partir deste questionamento, os autores desenvolvem suas pesquisas na tentativa de encontrar respostas frente a uma concepção de que “A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade” (s.n.).

Os mesmos autores afirmam que as representações analíticas vão além do plano.

> Uma observação sobre a inversão de significados que ocorreu durante o desenvolvimento da Geometria Analítica, pontos, retas, curvas, etc., eram originalmente considerados como entidades puramente “geométricas”, e a tarefa da Geometria Analítica era meramente a teoria geométrica por métodos algébricos ou analíticos. Com o transcorrer do tempo, o ponto de vista oposto começou progressivamente a se afirmar. Um número x ou um par de números x, y, ou um terno de números x, y, z eram considerados como objetos fundamentais, e estas entidades analíticas eram então “visualizadas” como pontos em uma reta, em um plano ou no espaço. (p.277)

Os aspectos visuais oferecidos na visualização e no movimento de uma figura, proporcionados pelo dinamismo do software GeoGebra, é um fator preponderante para o envolvimento dos estudantes nesta tarefa, o que é corroborado por Gravina (2015). Para a autora,

> [...] a geometria dinâmica pode auxiliar o professor que deseja trabalhar com seus alunos as figuras geométricas e suas propriedades, desta forma procurando avançar com o desenvolvimento de habilidades que se fazem presentes nas atitudes de argumentar, explicar propriedades da geometria. (Gravina et al.,2012, p.59)

Acredita-se que um trabalho com uso de software específico pode ser motivador e contribuir para a compreensão de propostas educativas, especialmente, na escola básica. Rocha (2007) afirma que:

> [...] não basta a este profissional dominar apenas o uso de informática educativa. Ele precisa fazer seu planejamento pautado nas possíveis dificuldades dos alunos com relação ao tema da aula. Esse planejamento precisa contemplar também a mediação do professor durante a aula, no sentido que possa favorecer aos alunos momentos que possam apresentar suas soluções para eventuais discussões. (p.227)

Neste sentido, se realizou uma pesquisa qualitativa envolvendo um grupo de cinco estudantes de uma escola pública brasileira, no primeiro semestre letivo de 2016, na qual se utilizou princípios de Geometria Sintética, a qual, para Klein (1927), é aquela em que as construções das proposições geométricas de figuras estudadas por si mesmas, não têm intervenção alguma de fórmulas, ao contrário do que faz a Geometria Analítica. A partir dessas considerações se descreverá o que foi realizado em uma das atividades constantes da pesquisa com a respectiva análise qualitativa do que os estudantes realizaram por meio dos protocolos de construção constantes do próprio software Geogebra. A metodologia de trabalho consistiu em apresentar aos estudantes a proposição 5 do livro de Euclides em seu formato original com a respectiva demonstração e proporcionar um debate entre eles, para verificar até que ponto conseguiriam interpretá-la. Na sequência foi oferecido o enunciado da mesma proposição em uma linguagem atual. A partir daí os estudantes deveriam interpretá-la à luz de construção realizada no GeoGebra, seguindo orientações da pesquisadora.

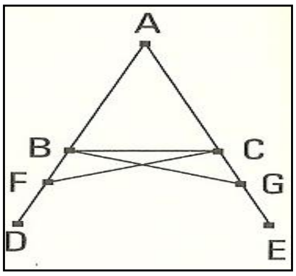
Metodologia

De início a pesquisadora apresentou aos estudantes a propição 5, em seu formato original conforme (Bicudo, 2009, p.102: “Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongados ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si.” A demonstração aqui apresentada foi fornecida aos estudantes que, apenas leram, discutiram entre si e tentaram interpretar o enunciado.

Demonstração:

> Seja o triângulo isósceles ABC, tendo o lado AB igual ao lado AC, e fiquem prolongadas ainda mais as retas BD, CE sobre uma reta com as AB, AC; digo que, por um lado, o ângulo sob ABC, e, por outro lado, o sob CBC, ao sob BCE. sFique, pois, tomado sobre a BD o ponto F, encontrado ao acaso, e fique subtraída da maior AE a AG igual à menor AF, e fiquem ligadas as retas FC, GB. Como, de fato por um lado, a AF é igual à AG, e, por outro lado, a AB, à AC, então, as duas FA, AC são iguais às duas GA, AB, cada uma a casa uma e contêm o ângulo sob FAG comum; portanto, a base FC é igual a base GB, e o triângulo AFC será igual ao triângulo ABG, e, por outro

lado, o sob AFC ao sob AGB. E, como a AF toda é igual à AG toda, das quais a AB é igual à AC, portanto, a restante BF é igual CG. Mas também a FC foi provada igual à GB; então, as duas BF, FC são iguais às duas CG, GB, cada uma a cada uma, também o ângulo sob BFC é igual ao ângulo sob CGB, e a base BC deles é comum; portanto, também o triângulo BFC será igual ao triângulo CGB, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, por um lado, o sob FBC é igual ao sob GCB, e, por outro lado, o sob BCF ao sob CBG. Como, de fato, o ângulo sob ABG é igual ao sob BCF, portanto, o sob ABC restante é igual ao sob ACB restante; e estão junto à base do triângulo ABC. Mas foi provado também o sob FBC igual ao sob GCB; e estão sob a base. Portanto, os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si; o que era preciso provar.



Na sequência foi escolhido o enunciado atual do mesmo teorema a fim de que fosse feita sua leitura, discussão e interpretação, segundo Rich (2003, p.300): “Se dois lados de um triângulo forem congruentes, os ângulos opostos a eles serão congruentes (os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes)”. Novamente, a demonstração do mesmo aqui apresentada foi fornecida aos sujeitos que, apenas leram, discutiram entre si e tentaram interpretar o enunciado.

O autor sugere, na sua demonstração, organizar a demonstração da seguinte forma:

Dado: triângulo ABC em que o segmento AB é congruente ao segmento BC.

Provar: ângulo A é congruente ao ângulo C.

Plano: quando o bissetor do ângulo dos vértices é traçado, os ângulos, a serem provados congruentes, tornam-se ângulos correspondentes de triângulos congruentes.

No que segue apresenta a forma sintética constante da tabela 1.

Tabela 1. Demonstração do teorema

Afirmações	Razões
1. Traçar $\overline{BD}$ bisseccionando $\angle$ B. 2. $\angle 1 \cong \angle 2$ 3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ 4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ 5. Δ ADB $\cong$ Δ BDC 6. $\angle$ A $\cong$ $\angle$ C	1. Um ângulo pode ser bisseccionado. 2. Bisseccionar é dividir em duas partes congruentes 3. Dado 4. Propriedade reflexiva 5. LAL $\cong$ LAL 6. Partes correspondentes de triângulos congruentes são congruentes.

A partir dessas considerações a pesquisadora protocolou uma sequência de procedimentos para os alunos seguirem, registrarem e, posteriormente, encaminharem para sua análise, que é o que se faz a seguir.

Resultados: análise das atividades realizadas pelos alunos

A sequência a ser desenvolvida pelos estudantes foi:

- Construir uma circunferência de centro A e raio qualquer.
- Marcar dois pontos B e C sobre a circunferência.
- Construir o triângulo ABC.
- Obter as medidas do segmento AB e AC.
- Movimentar os pontos ABC, marcar as medidas dos seus lados e verificar o acontece.
- O triângulo construído como é chamado?
- Marcar os ângulos alfa e beta no respectivo vértice B e C e medir.
- O que observas sobre esses dois ângulos? Movimente-os e verifique o que acontece?
- Como se chamam os ângulos alfa e beta em relação ao terceiro lado? E os lados congruentes em relação a esses ângulos?
- Enuncie o resultado que relacione os ângulos e os lados dessa construção.

Os objetivos pretendidos para a atividade foram os seguintes:

- Definir o triângulo formado na circunferência e relacionar seus ângulos e lados.
- Argumentar sobre os resultados encontrados.
- Concluir com um enunciado verbal sobre a construção.

Os registros dos estudantes mostraram que foram capazes de utilizar as ferramentas apropriadas do software para concluírem:

Que o valor das medidas dos segmentos
AB e AC são o mesmo valor.

e

Triângulo isósceles, porque possui dois lados com medidas iguais.

Isso foi feito a partir da construção realizada por três estudantes (Fig. 1), explorando a ferramenta ponteiro para verificar que a variação da figura em tamanho se alterava, entretanto, as medidas dos segmentos AB e AC se mantinham iguais o que viria a caracterizar o triângulo construído como isósceles.

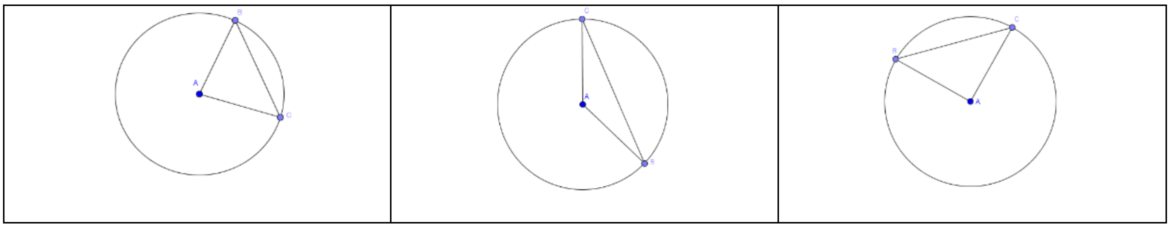


Fig. 1. Construções das alunas M, T e A

Logo em seguida, essas estudantes usaram a ferramenta de medir ângulos para obter o valor de ang(B) e ang(C) e, ao movimentarem os vértices, concluiram que ambos são de mesma medida nos triângulos isósceles.

Ao movimentá-los os ângulos mudam seu valor mas os dois permanecem iguais.

Conclusões

Observa-se que, por meio da visualização e dinamismo (movimento) da figura, o GeoGebra proporcionou ao grupo alcançar o objetivo esperado para a questão, o que vai ao encontro do indicado por Gravina (2015) ao afirmar: [...] que na tela do computador se descortina uma coleção de 'desenhos em movimento' que guarda invariantes geométricos, declarados ou não, no procedimento de construção. Uma figura dinâmica é entendida como uma coleção de 'desenhos em movimento', que respeita um certo procedimento de construção." (p.242)

A atividade foi concluída com êxito como pode ser constatado na escrita dos alunos:

C – "Se os dois lados forem iguais, os ângulos opostos a eles serão iguais entre si".

R – “Os lados são iguais entre si e os ângulos opostos são iguais entre si”.

M- “Os ângulos B e C em relação ao A é o oposto e os lados também são opostos em relação aos ângulos”.

T- “Que os lados de um triângulo sempre serão opostos e mesmo movendo os pontos os ângulos continuam o mesmo valor”.

A- “Quando temos um triângulo isósceles, seus ângulos serão os mesmos e os dois lados serão o mesmo”.

Percebe-se que esses registros são simples e mal formulados em relação à linguagem matemática formal constante dos enunciados. Considera-se que, embora esta limitação na escrita, o importante foi que o grupo conseguiu identificar o triângulo sendo isósceles, por possuírem dois lados de mesma medida e ângulos da base congruentes, o que é enunciado por Rezende (2000 p.33) da seguinte forma: “Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes”. E, ainda, “todo triângulo que tem dois de seus ângulos congruentes é um triângulo isósceles”.

Referências bibliográficas

Bicudo, I. (2009). (trad.). *Os Elementos/Euclides*. São Paulo: Editora da UNESP.

Courant, R. e Robbins, H. (2000). *O que é matemática?* Rio de janeiro: Editora Moderna.

Gravina, M.A. (2015). O potencial Semiótico do GeoGebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. VIDYA, v 35, n.2. p. 237-253.

Gravina, M.A. et. al. (2012). *Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática.* Porto Alegre: Evangraf.

Klein, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n], v.1 e 2.

Rezende, E. Q.F. (2000). *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.

Rich, B. (2003). *Teoria e Problemas de Geometria*. Porto Alegre: Bookman.

Rocha, E. M.(2007). Uso da informática nas aulas de Matemática: obstáculo que precisa ser superado pelo professor, o aluno e a escola. In: Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 27 e Workshop sobre informática na escola, 13, 2007, Rio de Janeiro. Anais.... Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/951>. Acesso em 21/12/2015.

Struik, D. J. (1997). *História concisa das matemáticas*. Lisboa. 3ª edição. Editora Gradiva.

Villiers, M. (2003). O papel da demonstração na investigação em Geometria realizada em computador: algumas reflexões. In: Geometria Dinâmica – seleções de textos do livro Geometry Turned On! Editores James R. Doris Schattschneider, 31–43.