Sociedad Argentina de Educación Matemática

DESDE EL CONOCIMIENTO IMPLÍCITO AL CONOCIMIENTO EXPLÍCITO EN UNA ACTIVIDAD DE ÁLGEBRA

Marcela Cifuentes – Martha Ferrero
Universidad Nacional del Comahue – Argentina
marcelacifuentesar@yahoo.com.ar

Nivel educativo: nivel medio
Palabras clave: teoremas-en-acción, dominio de validez, función lineal, función cuadrática

Resumen

En este trabajo se describen algunos conocimientos implícitos utilizados por estudiantes de escuela media, al resolver una actividad de Álgebra. La experiencia se llevó a cabo en un 5to año del Centro de Educación Media nº 46 de Bariloche, Argentina, en dos etapas: una clase y entrevistas clínicas posteriores, registradas en audio y video. La tarea propuesta a los alumnos se refiere a la comparación entre dos funciones, una lineal y otra cuadrática, dadas ambas de forma verbal (escrita). Se estudia el dominio de validez de los conocimientos intuitivos de los alumnos atendiendo a la Teoría de los Campos Conceptuales desarrollada por Vergnaud. En particular, presentamos algunos resultados del análisis de las producciones de dichos alumnos considerando la noción de teorema-en-acción y las aproximaciones "escalar" y "funcional" identificadas en los modelos lineales.

Introducción

Este trabajo fue realizado en el marco de un curso de *Enseñanza y Aprendizaje de Álgebra Temprana* dictado por la Dra. Bárbara Brizuela (Tufts University) en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue.
Esta investigación está realizada desde una perspectiva funcional del Álgebra, es decir, el énfasis está puesto en el estudio de las relaciones entre variables más que en la mera manipulación de ecuaciones y símbolos. Cabe destacar la importancia del enfoque aquí adoptado en la enseñanza del Álgebra según ha manifestado la comunidad de investigación en educación matemática:

La investigación en educación matemática ha puesto de manifiesto la importancia de una perspectiva funcional en la enseñanza del álgebra. Un enfoque funcional del álgebra está en contraste con una perspectiva que se centra en la manipulación simbólica de ecuaciones, normalmente conocida como enfoque en ecuaciones. El concepto de función puede facilitar la introducción al álgebra mediante el uso de diferentes formas de representar las funciones: la notación algebraica, las tablas de funciones y gráficos en la cuadrícula de coordenadas cartesianas. Además, una introducción temprana a una perspectiva funcional puede promover una profunda comprensión de la noción de función, central en el campo de las matemáticas. Desde una perspectiva funcional, las funciones incluyen ecuaciones sólo como uno de los elementos de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. (Martínez & Brizuela, 2006).

En este trabajo se describen algunos aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje que surgieron al implementar una actividad de Álgebra en un grupo de 30 estudiantes de 5º año de un Centro de Educación Media público de Bariloche, Argentina. La tarea propuesta a los alumnos se refiere a la comparación entre dos funciones, una correspondiente a una función lineal y la otra correspondiente a una cuadrática, dadas ambas de forma verbal (escrita).

Propósito y marco teórico

El propósito de este trabajo es realizar un análisis y descripción de los tipos de conocimientos implícitos de los alumnos al trabajar con funciones lineales y cuadráticas, desde una perspectiva funcional del álgebra. Dentro de este objetivo general, se pretende estudiar el dominio de validez de los conocimientos intuitivos de los alumnos.
Para el análisis en cuestión tendremos en cuenta el marco teórico de la Teoría de los Campos Conceptuales desarrollado por Vergnaud, acerca de "invariantes operatorios" (teorema-en-acción y conceptos-en-acción).
Según Moreira (2002), que describe la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud:
Teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real.
Vergnaud se refiere a *"invariantes operatorios (teoremas-en-acción y conceptos-en-acción) que dirigen el reconocimiento, por parte del individuo, de los elementos pertinentes de la situación; …; son aquellos que constituyen la base, implícita o explícita, que permite obtener la información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas."* (Moreira, 2002, pág. 7)
Debido a la importancia de formular conexiones entre el conocimiento intuitivo de los alumnos y el conocimiento objetivo (Martínez & Brizuela, 2006), vamos a realizar un análisis de los teoremas en acción que aparecen en el desarrollo de la actividad propuesta. Cabe destacar lo que Moreira menciona al respecto:
En general, los alumnos no son capaces de explicar ni tampoco de expresar en lenguaje natural sus teoremas y conceptos-en-acción. En el abordaje de una situación, los datos a ser trabajados y la secuencia de cálculos a ser realizados dependen de teoremas-en-acción y de la identificación de diferentes tipos de elementos pertinentes. La mayoría de esos conceptos y teoremas-en-acción permanecen totalmente implícitos, pero ellos pueden, también ser explícitos o tornarse explícitos y ahí encaja la enseñanza: ayudar al alumno a construir conceptos y teoremas explícitos, y científicamente aceptados a partir del conocimiento implícito. Es en este sentido que conceptos-en-acción y teoremas-en-acción pueden, progresivamente, tornarse verdaderos conceptos y teoremas científicos, pero eso puede llevar mucho tiempo. (Moreira, 2002, pág. 12)
Según explica Moreira (2002) acerca de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, los teoremas en acción más importantes desarrollados por los estudiantes se encuentran las propiedades isomórficas de la función lineal:

$$f(x+x') = f(x) + f(x')$$

$$f(x-x') = f(x) - f(x')$$

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

y las propiedades de coeficiente constante de esa misma función:

$$f(x) = ax \qquad x = \frac{1}{a} f(x)$$

Modalidad de trabajo

La modalidad de trabajo adoptada constó de dos encuentros, uno en el marco de una clase con todos los estudiantes; y una posterior entrevista a cuatro alumnos seleccionados luego de la intervención en el aula.
Se consultó la página web: http://earlyalgebra.terc.edu. De allí nos propusimos trabajar en particular con una actividad en contexto: "Varying Rates of Change", Lesson 5-16. La base de esta propuesta fue diseñada por el grupo de investigación en didáctica de la matemática Álgebra Temprana (Tufts University, Boston), para ser implementada en primaria dentro de un ambicioso proyecto donde los jóvenes estudiantes abordan actividades de álgebra desde los 8

años. Se realizaron modificaciones que consideramos pertinentes de acuerdo a nuestro objetivo y al grupo con el que trabajamos (adolescentes de 16-17 años de los cuales no tenemos información sobre su formación específica previa en álgebra).
La actividad propuesta en clase a los alumnos estuvo dividida en dos partes que fueron entregadas en el orden en que a continuación se muestra:
Primera parte:

La abuela de Matías le ofrece que elija entre dos opciones:
a. Darle $ 5 por semana.
b. Darle la primera semana $1; la segunda semana $ 2; la tercera semana $ 3 y así sucesivamente.

***1**. ¿Cuánto dinero acumulará con cada uno de las opciones en 5 semanas? ¿Y en 10 semanas?*
***2**. ¿Qué opción le conviene a Matías? Mostrar que esa elección es la mejor.*
***3**. ¿Hay algún momento en el cual es lo mismo elegir cualquiera de las opciones?*
Segunda parte:
***4**. ¿Cuánto tiempo le llevará con cada trato juntar $ 100? Explica tu respuesta.*
***5**. ¿Cuál es la ganancia de Matías entre la tercera y séptima semana? ¿Y entre la semana 12 y la 16?*
***6**. Representa gráficamente la relación entre el tiempo y el monto acumulado en cada uno de los tratos.*
(Con la segunda entrega se anexó una hoja con dos grillas para que los alumnos graficaran)
Una vez presentada la primera parte de la actividad (ítems 1, 2 y 3), los alumnos trabajaron en grupos, discutieron entre ellos, y cada uno realizó su propia producción escrita. Después de la instancia de análisis y discusión grupal de la situación planteada, se efectuó una puesta en común con todos los alumnos de la clase. Se llevó a cabo la segunda parte de la actividad (ítems 4, 5 y 6) con la correspondiente discusión en los pequeños grupos y la entrega individual de las producciones.
Luego de la intervención en el aula se procedió a seleccionar cuatro alumnos para la entrevista. La elección de los mismos se realizó considerando las intervenciones de los alumnos en clase y sus producciones escritas. Sobre esta base se armó un guión general de preguntas para la posterior entrevista, a fin de indagar con mayor profundidad los conocimientos implícitos en sus producciones.
Las entrevistas se llevaron a cabo de a pares, por una parte se entrevistó a Belén y Sonia, y por otra parte a Valeria y Damián. Nos pareció adecuada esta modalidad de entrevista debido a que estas parejas así conformadas habían trabajado en los mismos grupos en el encuentro áulico.
Tanto la intervención en el aula como las posteriores entrevistas fueron registradas. Por una parte se cuenta con el audio de la clase, y con vídeos de las entrevistas realizadas. Además contamos con las producciones escritas que los alumnos realizaron en clase y con el material escrito que produjeron los alumnos entrevistados.

Descripción matemática de la actividad propuesta

La actividad implementada se refiere al trabajo con funciones lineal y cuadrática. El enunciado presentado a los alumnos habla de dos tratos propuestos a Matías por su abuela. El análisis que aquí se presenta tiene por objetivo estudiar las relaciones entre las variables en la actividad propuesta: tiempo (en semanas) y cantidad de dinero acumulado por Matías (en pesos). El trato a (la abuela ofrece darle $5 por semana) corresponde a la función lineal $f : N_0 \rightarrow N_0$, $f(x) = 5x$

El trato b (la abuela ofrece darle la primera semana \$1; la segunda semana \$ 2 y así sucesivamente) corresponde a la función cuadrática $f: N_0 \to N_0$, $f(x) = \frac{(x+1)x}{2}$, donde N_0 es el conjunto de los números naturales con el cero.

Análisis de algunas producciones

Teoremas en acción utilizados por los alumnos

Vamos a enfocarnos en el estudio que Vergnaud realiza de la función lineal, y lo que él denomina teorema-en-acción “escalar” y teorema-en-acción “funcional” (Martínez & Brizuela, 2006; Carraher & Schliemann, 2007).
Por teorema-en-acción “escalar” se refiere a que dada una función de la forma $f(x) = ax$ el trato que se le da a la misma es de alguna manera un trato recursivo. Para obtener algún valor de la variable dependiente, se le suma la constante *a* al valor anterior de la variable dependiente. En el contexto de nuestro problema, con la función $f: N_0 \to N_0$, $f(x) = 5x$ un alumno que utilice el teorema-en-acción escalar sumará 5 pesos iteradamente al valor anterior obtenido.
En otras palabras, conoce $f(0) = 0$ (Matías tiene inicialmente \$0 con el trato a) y calcula $f(n+1) = f(n) + 5$.
Esta forma de tratar a las funciones muestra que los estudiantes, de forma implícita, se desprenden de la variable independiente, ya que sólo están atentos al algoritmo “sumar \$5” y a operar con los valores de la variable dependiente (cantidad de dinero acumulado por Matías en \$), pero hacen caso omiso a la variable independiente (tiempo en semanas), como se ejemplifica en la Fig. 1.

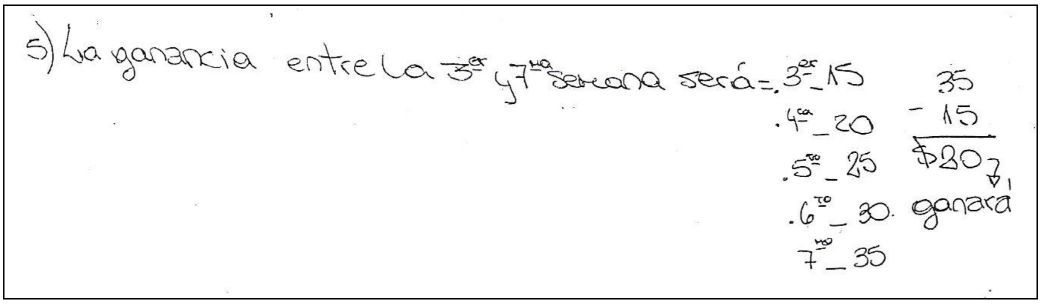

Fig. 1_Estrategia de Valeria para resolver ítem 5

A su vez, el teorema en acción “funcional” (Martínez & Brizuela, 2006) supone el uso de la propiedad del coeficiente constante en lugar de la propiedad del isomorfismo utilizada en el caso del teorema en acción “escalar”. En el contexto de nuestro problema, con el teorema en acción “funcional” los estudiantes explicitan la relación entre los valores de la variable dependiente y los valores de la variable independiente. Para calcular cuánto dinero acumuló Matías en una determinada semana *n*, multiplicaría 5 por *n*.
En cuanto al trato que los estudiantes hicieron de la función lineal, surge del análisis general de los registros el predominio del uso del teorema-en-acción “funcional”. A continuación se muestra como ejemplo de lo afirmado un fragmento de la transcripción del audio de clase, que corresponde a la puesta en común que se realizó luego de la primera entrega y respecto a la pregunta 1 de la misma (¿Cuánto dinero acumulará con cada uno de las opciones en 5 semanas? ¿Y en 10 semanas?):

Luciano: en la opción a 5 semanas 25 pesos
Marcela: para el trato a entonces 25 pesos
Luciano: la opción b 5 semanas 15 pesos, después la opción a 10 semanas 50 pesos y la opción b 10 semanas 55 pesos.
Marcela: por qué y cómo hicieron ese cálculo?
Dante: con los dedos…jajaja
Marcela: bueno, está bien, contaron con los dedos, ¿pero qué contaron?
Micaela: si por semana le daba 5 pesos, entonces en 5 semanas hicimos 5 por 5 y nos dio 25. En 10 semanas hicimos 5 por 10 y nos dio 50. Después en la b 5 semanas, fuimos sumando en la primera un peso, en la segunda 2 pesos…
Este grupo de alumnos, nos muestra aquí cómo en el caso de la opción a, solamente hacen 5 por 10 por ejemplo para calcular el dinero que acumuló Matías luego de 10 semanas, mientras que para la opción b realizan una suma iterada, calculan el dinero acumulado por Matías en cada semana hasta llegar a la semana número 10. Un ejemplo gráfico es la siguiente tabla (ver Fig. 2) que construye Evelyn para contestar la pregunta 3 (¿Hay algún momento en el cual es lo mismo elegir cualquiera de las opciones?).

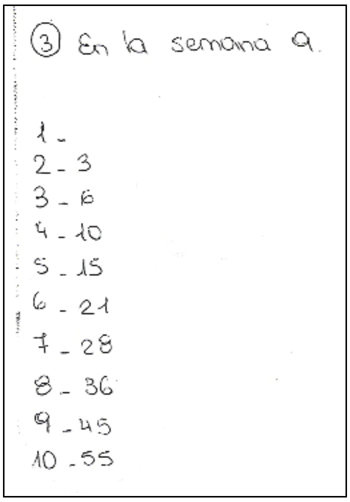

Fig. 2_Tabla construida por Evelyn (pregunta 3)

Si bien estos teoremas-en-acción “funcional” y “escalar” de los que habla Vergnaud se refieren a funciones lineales, podemos encontrar que los alumnos dieron un trato similar a la función cuadrática del trato b, expandiendo el dominio de validez de los teoremas-en-acción usados en la función lineal. Esta hipótesis se reafirma cuando analizamos lo que algunos alumnos realizaron en la pregunta 4 de la segunda entrega (ver Fig. 3 y Fig. 4).

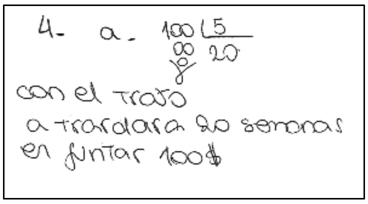

Fig. 3_ Respuesta de Victoria a la pregunta 4 con el trato a

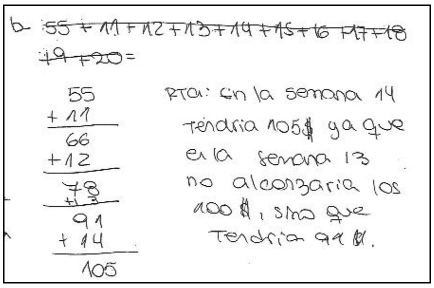
b- ~~55+11+12+13+14+15+16 17+18 19+20~~=
55
+11
66
+12
78
+13
91
+14
105
RTA: en la semana 14 tendria 105$ ya que en la semana 13 no alcanzaria los 100$, sino que tendria 91$.

Fig. 4_ Respuesta de Victoria a la pregunta 4 con el trato b

Podemos observar el trato diferente que Victoria realiza con cada opción propuesta por la abuela a Matías. Por una parte, a la hora de calcular cuánto tiempo tardará en juntar $100 con la opción a, recurre a la propiedad del coeficiente constante (de tipo funcional). Y por otra parte calcula en la opción b realizando una secuencia iterada de sumas, basándose en el resultado anterior para hallar el siguiente. Es aquí que encontramos reminiscencias del teorema-en-acción escalar para funciones lineales, pues se verifica el tratamiento implícito de la variable dependiente. Si bien vemos que parte de $55 que se corresponden a la semana 10, utilizando resultados de la pregunta 1, para contestar la pregunta 4 parte desde $55 y suma $11, suma $12, suma $13, suma $14, hasta que llega a $105 y por haberse pasado de los $100 a los que se refería el enunciado detiene su cálculo y consigna la respuesta en cantidad de semanas (variable independiente). Dado que la función cuadrática trabajada es muy particular, y el tratamiento iterativo se desprende de la manera en que se presenta la actividad, hablaremos del teorema en acto en este contexto concreto. (Si es posible extenderlo a las funciones cuadráticas en general escapa a este análisis y puede ser objeto de otras investigaciones).

El dominio de validez del conocimiento de los alumnos

Dentro de lo observado, en cuanto a lo que significó para los estudiantes manejarse con el opción a (función lineal) y con el opción b (función cuadrática), hay evidencias de diferentes conductas en el trato de cada situación, que conjeturamos se corresponden con la familiaridad de los conceptos involucrados. Al respecto, Moreira en referencia a Vergnaud, cita dos clases de situaciones:

1. Clases de situaciones en las que el sujeto dispone – dentro de su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias – de las competencias necesarias al tratamiento relativamente inmediato de la situación.
2. Clase de situaciones en las que el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, que le obligan a un tiempo de reflexión y exploración, a vacilaciones, a tentativas frustradas, llevando eventualmente al suceso o a un fracaso. (Moreira, 2002)

Los alumnos se enfrentan a lo que llamamos el "trato a" del problema (la abuela le ofrece a Matías darle $5 por semana) y en contraste se enfrentan también al "trato b" (la abuela le ofrece darle $1 la primer semana, $2 la segunda, $3 la tercera y así sucesivamente). El abordaje de cada trato nos muestra diferentes conductas en los alumnos. Por una parte, las indagaciones que los alumnos realizaron acerca del trato a, nos mostraron que poseían las competencias necesarias para trabajar con la situación, aunque en muchos casos no llegaban a explicitar los métodos utilizados para hallar los resultados, los mismos eran hallados sin dificultad y las respuestas fueron consignadas en el trabajo escrito, no así los procedimientos seguidos. Mientras que al indagar acerca del trato b, intentaron utilizar lo que les había sido útil con el trato anterior, es decir lo que conocen acerca de las funciones lineales (y que se cumplió para el trato a) pretenden utilizarlo para el trato b (que se corresponde a una función cuadrática). Basta observar como ejemplo la Fig. 5, que se corresponde al trabajo realizado por Belén al intentar resolver el ítem 4 (*¿Cuánto tiempo le llevará con cada trato juntar $ 100? Explica tu respuesta*). Belén intenta llegar a una fórmula que le permita averiguar cuánto tiempo va a tardar Matías en juntar $100 con la opción *b*. Pero en esta búsqueda, la alumna recurre a lo que conoce se cumple para las funciones lineales. Notemos aquí que el rango o dominio de validez de lo que esta alumna supuso podría funcionar, fue superado. Consideramos positivo que ella misma se dio cuenta de esto. Desde el análisis didáctico el hecho relevante es que lo primero que intentó hacer es moverse en un terreno conocido.

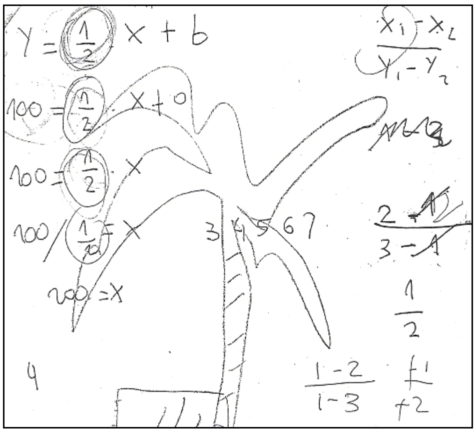

Fig. 5_ Belén en busca de una fórmula para el trato b

Nos llamó poderosamente la atención, dentro de lo que fueron estos dos tipos de situaciones, que los alumnos expresaran en clase y luego en las entrevistas la necesidad de contar con una fórmula para trabajar la opción b, mientras que para trabajar con la opción a no expresaron necesitar la explicitación de ningún tipo de fórmula (si bien aparecieron expresiones como "5 por el número de semanas", la falta de simbolización no representó un obstáculo para lograr los cálculos requeridos).

Martha: Qué intentaste hacer ahí? (Se le muestra su hoja, Fig. 5)

Belén: Lo pensamos las dos. En realidad porque… Sabíamos que hay… esto igual lo hicimos para una nos equivocamos porque lo hicimos en función de una línea recta con las pendientes y era una parábola al final. Pero, sabíamos que había una fórmula para la parábola, para sacar, no me acuerdo.

Sonia: Llegamos al punto 4, leímos y dijimos: Bueno, para esto hay que ir sumando, sumando, hasta ver cuánto, llegamos aproximadamente a 100$. No tenemos ganas, debe haber una fórmula, entonces algo tiene que haber. Entonces empezamos a recordar lo del año pasado y tratar de sacar eso de…

Belén: Lo que pasa es que sacamos en función de una línea recta Δy Δx *. Como no nos daba, nos dimos cuenta de que habíamos puesto la pendiente para 1, para 2, no para 100. El 1 estaba mal, pero después realmente no nos daba porque era una parábola.*

Al intentar analizar las posibles motivaciones que llevaron a los estudiantes a la búsqueda de una fórmula que de alguna manera les solucione el problema, creemos que esto podría deberse al tipo de instrucción que han tenido estos alumnos. Según Schwartz:

Tradicionalmente, diseñamos la enseñanza para que proceda de los símbolos a los números, y de ahí (a veces) a las gráficas. Este camino obliga a los alumnos a dominar las reglas y manipulación algebraicas, así como la manipulación simbólica de familias de funciones, antes de poder utilizar las matemáticas con el propósito de modelar su mundo. Nosotros creemos que ésta es una razón fundamental detrás del hecho de que se le dedique tan poco tiempo a *modelar y a la investigación matemática realmente importante dentro del programa de las escuelas secundarias. Este camino también implica un estilo de enseñanza y aprendizaje que avanza a modo de serie, en lugar de un estilo que utilice múltiples representaciones paralelas relacionadas; los alumnos pasan la mayor parte del tiempo manipulando símbolos sin siquiera poder relacionar lo que están haciendo con números o con gráficas*. (Brizuela, 2005)

Reflexiones finales

El trabajo realizado intenta resaltar la importancia que pueden tener los teoremas-en-acción en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra, y mostrar a los docentes que el tenerlos en cuenta brinda la oportunidad de hacerlos evolucionar hacia un conocimiento explícito.
También hemos destacado que diferentes tipos de situaciones pueden generar un mismo comportamiento inicial, siendo que los alumnos trabajan sobre lo conocido y es nuestra tarea docente hacerlos reflexionar sobre el alcance de las situaciones. Esto coincide con resultados de otras investigaciones (Villareal, Esteley & Alagia, 2007) en las que señalan la transferencia que hacen los alumnos de los modelos lineales a situaciones que se corresponden con otros modelos.
A su vez, sugerimos que muchos de los comportamientos observados en los alumnos tienen una explicación en que su aprendizaje del álgebra ha sido de manera tradicional, centrado en la manipulación de expresiones simbólicas, y en este caso, la tarea propuesta rompe el esquema fórmula-tabla-gráfico para el manejo de funciones. La forma de presentación del enunciado los llevó a movilizar sus propias estrategias, y s lo cual consideramos una práctica saludable.

Bibliografía

- Brizuela, B.M. (2005). Relaciones entre representaciones: el caso de Jennifer, Nathan y Jeffrey. In B. Brizuela y M. Alvarado (Eds.) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia.* Paidos Educador.
- Carraher, D.W. &Schliemann, A.D. (2007). Early Algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.
- Martinez, M. & Brizuela, B. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. Journal of Mathematical Behavior, No. 25, 285-298.
- Moreira, M. A. (2002). La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Publicado en investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7(1).
- Villareal, M.; Esteley, C. & Alagia, H. (2007). Las producciones matemáticas de estudiantes universitarios al extender modelos lineales a contextos no lineales. En Abrate & Pochulu (Comps.) Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática. Universidad Nacional de Villa María.