EL CASO DE LA DIVISIÓN ENTRE CERO

Carolina González – Florencia Lepratte – Andrea Melo –Verónica Scorza
caro273caro@gmail.com - florencia.lepratte94@gmail.com - andreamelosoler@gmail.com - verosco@gmail.com
Instituto de Profesores "Artigas". Uruguay

Tema: Pensamiento numérico
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: creencias intuitivas, división entre cero, justificaciones

Resumen

Presentaremos los resultados de un micro diseño de investigación llevado a cabo en 2016 en el marco de la asignatura Didáctica III del Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores "Artigas". Realizamos un estudio con 195 alumnos de primer y segundo año de enseñanza secundaria en el que nos propusimos examinar si los estudiantes tendían a realizar la operación en los casos que implica dividir entre cero. Además estudiamos las justificaciones que dieron los alumnos a sus respuestas y analizamos el efecto que tenía en estas el haber trabajado con anterioridad el tema Divisibilidad en el conjunto de los números naturales (N).

Introducción

Este trabajo surgió en el marco de la asignatura Didáctica III correspondiente al cuarto año del Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores "Artigas" (IPA) y como una propuesta de la profesora encargada del curso. Las alumnas de este curso, que teníamos a cargo grupos de práctica de primer y segundo año de enseñanza media básica en 2016, nos interesamos en estudiar las concepciones de los estudiantes que integraban esos grupos en torno al caso de la división entre cero.

Para ello realizamos un micro diseño de investigación semejante al llevado a cabo en Israel por las investigadoras Tsamir y Tirosh (2002). Tomamos como marco teórico los aportes de Fischbein (1987), citado por Tsamir y Tirosh (2002) sobre las creencias intuitivas de los estudiantes. Ubicamos la división entre cero como una de las creencias intuitivas del tipo *realizar la operación* (este concepto se explicará en la sección dedicada al marco teórico) y nos propusimos explorar las respuestas de los estudiantes al presentarles operaciones que involucraban la división entre cero.

Los objetivos de este estudio fueron: (1) examinar si los estudiantes tienden a realizar la operación en los casos de la división entre cero; esto es, asignar un resultado a las expresiones que involucran la división entre cero, (2) analizar las justificaciones que dan los estudiantes a sus respuestas, y (3) estudiar el efecto que tiene sobre las respuestas de los estudiantes el hecho de haber trabajado o no con anterioridad el tema Divisibilidad en N.

Marco teórico

Fischbein (1987), citado por Tsamir y Tirosh, (2002) sostiene que las creencias intuitivas son un tipo de conocimiento y las define como formas de conocimiento particulares (en el sentido de propias de cada individuo) e inmediatas. Se refieren a afirmaciones o conceptos que exceden los hechos observables, y son aceptadas sin exigir una prueba empírica o formal que las justifique.

Algunas de las características de las creencias intuitivas que este autor identifica son:

- *Auto-evidencia*: Las personas perciben estas creencias como verdaderas sin necesidad de ninguna otra justificación.
- *Certeza intrínseca*: Están asociadas con un sentimiento de certidumbre, de convicción intrínseca.
- *Persistencia*: Hace referencia a la potencia de estas creencias, una vez adquiridas se arraigan fuertemente. Se mantienen incluso después de haber adquirido un grado avanzado de educación formal.
- *Carácter coercitivo*: Ejercen un efecto coercitivo frente al desarrollo del razonamiento del individuo, quien tiende a rechazar interpretaciones alternativas que estarían en contradicción con sus intuiciones.

En lo que concierne a las creencias intuitivas sobre operaciones matemáticas, Fischbein (1987) argumenta que la experiencia inicial con las operaciones conduce al desarrollo de creencias específicas e intuitivas sobre cada una de las cuatro operaciones aritméticas básicas. Un ejemplo de esto sería: “multiplicar hace más grande”. La formación de las creencias intuitivas sobre cada operación matemática particular y también sobre las características generales de las operaciones matemáticas, también dan lugar a la creencia intuitiva de que, cuando se enfrenta un problema matemático, se debe realizar una operación matemática y que realizarla implica encontrar un resultado o una respuesta. Estas experiencias, que consisten principalmente en las manipulaciones y en llegar a soluciones numéricas es lo que generan en el individuo lo que se denomina *creencia intuitiva de realizar la operación*. Resolver la operación división entre cero podría ser considerada como un ejemplo de la creencia intuitiva de realizar la operación. Esta es generalmente la primera operación matemática no definida a la que los estudiantes se enfrentan en sus estudios escolares y un estudiante que tenga incorporada esta creencia podría asignarle valores numéricos a las expresiones que involucran la división entre cero.

Aspectos metodológicos

Participantes

En este estudio participaron 195 estudiantes: 160 de primer año y 35 de segundo año de educación media básica de seis liceos urbanos de Montevideo, Uruguay. Además, 143 de los alumnos de primer año habían estudiado el tema Divisibilidad en N y 17 no lo habían hecho aún. Todos los alumnos de segundo lo habían estudiado previamente.

Instrumento

Se propuso a los estudiantes el siguiente cuestionario con 20 multiplicaciones y divisiones:

Nombre y apellido:____________________ Grupo:____________

Realiza las siguientes operaciones:

$4 \div 0 =$	$\frac{9}{3-3} =$	$0 \div 0 =$	$7 \div 0 =$
$15 \div 3 =$	$\frac{(3+2)\times 0}{4} =$	$9 \times 0 =$	$\frac{21}{7} =$
$\frac{0}{15} =$	$0 \times 0 =$	$\frac{6+4}{2} =$	$\frac{9\times 0}{3} =$
$\frac{16}{4} =$	$\frac{12}{0} =$	$\frac{(2+3)\times 0}{0} =$	$0 \div 6 =$
$\frac{5\times 0 + 4\times 0}{0} =$	$\frac{4-3}{17} =$	$\frac{10-4}{3} =$	$\frac{3+2}{1} =$

El interés principal estuvo en conocer las respuestas de los estudiantes a las operaciones que involucran la división entre cero. El resto de las multiplicaciones y divisiones fueron propuestas, entre otras razones, con el propósito de reducir las respuestas automáticas (se mezclaron expresiones con divisiones definidas y no definidas) y para asegurarse de que los errores en las divisiones entre cero no provenían de una mala competencia en el cálculo de multiplicaciones y divisiones.

Las divisiones fueron presentadas en dos notaciones diferentes: $a \div b$ y $\frac{a}{b}$ ya que como lo mencionan las autoras, existen estudios anteriores (Grouws y Reys, 1975, citado por Tsamir y Tirosh, 2002), que indican que los estudiantes tienen mejores resultados con la notación $a \div b$. Por lo tanto un objetivo secundario de este trabajo fue observar si esto influía en las respuestas de los estudiantes.

Procedimiento

El cuestionario fue propuesto a los estudiantes durante una hora de clase (45 minutos) en sus respectivos cursos de matemática. Luego del cuestionario se realizaron entrevistas individuales a alumnos (2 o 3 de cada uno de los nueve grupos de práctica) cuyas respuestas nos llamaron más la atención, por ejemplo aquellos que respondieron infinito como resultado de la división entre cero o aquellos que consultaron la definición de división entera en N.

Resultados

A partir del análisis de las respuestas dadas a las expresiones del tipo $a \div 0$ con $a \neq 0$ y a las del tipo $0 \div 0$, podemos afirmar que en promedio[1] solamente el 17% de los estudiantes encuestados respondieron que no es posible realizar la división entre cero. La operación que obtuvo el mayor número de respuestas “no se puede” fue la del tipo $a \div 0$ con $a \neq 0$.

Encontramos también que el 73%[2] de los estudiantes encuestados realizaron la operación, esto es, asignaron valores numéricos a expresiones que involucran la división entre cero. Entre las diferentes respuestas que dieron a las operaciones, distinguimos: el 57,9% dio como resultado cero, el 16,5% al dividendo (cuando este no es cero) y el 1,86% respondió infinito. Algunos de los estudiantes que respondieron que el resultado era infinito justificaron su respuesta no considerando el infinito como un número, sino como “el representante de todos los números”. Esto se puede observar en la justificación brindada por un estudiante en el cuestionario: *“Da infinito porque al dividir un número mayor que 0 entre 0 no se puede entonces es como si te da cero pero también podés poner cualquier número y siempre te da, entonces es infinito porque te da todos los números.”* (Caggiani et al, 2016, p. 127)

Todos los estudiantes que afirman la imposibilidad de realizar la operación habían trabajado previamente el tema Divisibilidad en N, ya sea en el mismo curso o en años

[1] Este promedio se calculó con los porcentajes totales correspondientes a la respuesta “no se puede”.
[2] Este valor también representa un promedio calculado de igual forma que el anterior.

anteriores. Algunos de ellos basaron su justificación en la definición de división entera trabajada en clase, como se observa en el siguiente diálogo:

> ***Profesor entrevistador**: Vos en la encuesta nos pusiste que 4 dividido 0 no se puede hacer, y después nos dijiste que daba 4, entonces ¿se puede y da 4 o no se puede?*
>
> ***Estudiante 2**: No, porque el resultado puede ser cualquiera y es el resto el que te da 4, y eso está mal porque el divisor no puede ser menor que el resto y ahí no se cumple la definición.* (Caggiani et al, 2016, p. 128)

De los 17 estudiantes de primer año que no habían trabajado el tema Divisibilidad en N, ninguno respondió que no era posible realizar la operación cuando el divisor era cero.

Además las diferentes notaciones, $a \div b$ y $\frac{a}{b}$, no influyeron en las respuestas que dieron los estudiantes ya que todos completaron el cuestionario y ninguno preguntó qué significaba cada uno de los símbolos.

Reflexiones finales

Los resultados de este estudio muestran que la mayoría de los estudiantes encuestados (73%) tienen arraigada la creencia intuitiva "realizar la operación" en los casos que involucran la división entre cero (los de segundo año en mayor medida que los de primero). Por otro lado el 17% de los estudiantes encuestados planteó, en algunas expresiones, la imposibilidad de dividir entre cero y todos ellos habían trabajado previamente el tema Divisibilidad en N. Por tanto, si bien más investigación sería necesaria, es posible conjeturar que el hecho de tener presente la definición de división entera en N permitió a estos estudiantes dar tal respuesta.

También podríamos plantearnos cómo ayudar a los estudiantes a superar el efecto de la creencia intuitiva realizar la operación y aceptar que algunas expresiones matemáticas no están definidas. En ese sentido creemos necesario que hay que contribuir a que a los estudiantes construyan nuevas intuiciones consistentes con la definición matemática de división entera en el conjunto de los números naturales. Entendemos que los alumnos no logran por sí solos considerar todas las implicancias que tiene la definición formal, y al tener que ponerla en práctica en situaciones concretas, no consiguen controlar sus intuiciones. Es posible que haya que trabajar especialmente con aquellos alumnos cuya imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) de división incluye únicamente la concepción de repartir. Al enfrentarse a situaciones que involucran la división entre cero, estarían suponiendo que "no se está repartiendo nada o repartiendo entre nadie" y por lo tanto dan como respuesta cero o el dividendo. En estos alumnos esta creencia no entra en conflicto con la definición del concepto (ya que no contemplan todos los aspectos de la definición formal). En estos casos sería apropiado proponer actividades en las que los estudiantes pudieran tomar conciencia del conflicto que se genera al aplicar ambas simultáneamente. De esta forma su imagen del concepto se vería enriquecida para que pueda ser aplicada en instancias posteriores de su formación académica, especialmente en aquellas que involucren casos de estas y otras operaciones no definidas.

Referencias bibliográficas

Caggiani, N, Delgado, C., Mesa, V., Diz, L., González, C., González, S., Lepratte, F., Melo, A., Scorza, V., Tejería, J., y Viera, C. (2016). El caso de la división entre cero. En Buendía, G., Molfino, V. y Ochoviet, C. (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa* Volumen III (pp. 119-133). Montevideo: Consejo de Formación en Educación.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht. Holland: Reidel.

Grouws, D. y Reys, R. (1975). Division involving zero: an experimental study and its implications. *Arithmetic Teacher*, 22, 74-80.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12 (7)*, 151-169.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (2002). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: Cases of division by zero. En G.C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 331-344). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.