

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Bárbara N. Palharini Alvim Sousa – Emerson Tortola – Lourdes Maria W. de Almeida
barbarasousa@utfpr.edu.br – emersontortola@utfpr.edu.br – lourdes@uel.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Universidade Estadual de Londrina, Brasil

Tema: I.8 - Procesos Psicológicos implicados en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática.

Modalidade: CB

Nível educativo: Primario (6 a 11 años)

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Três Mundos da Matemática, Anos iniciais.

Resumo

A formação matemática dos sujeitos é foco de estudos no meio acadêmico desde a inserção das crianças na escola até sua saída já na fase adulta. Nesse contexto, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos dos primeiros anos de escolaridade é objeto de estudo deste artigo. A modelagem é abordada como alternativa pedagógica para o ensino de Matemática, por meio dessa alternativa são analisados os registros em áudio, vídeo, bem como registros escritos de três atividades desenvolvidas por alunos no âmbito do quarto ano do primário. Para analisar os dados coletados e inferir sobre a formação matemática dos sujeitos utilizamos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall que caracteriza 'estágios' de desenvolvimento cognitivo, diferenciados por meio das representações, modos de operação e da atribuição de significados aos objetos matemáticos. Nos orientamos pelas questões: 'quais mundos da matemática são evidenciados no trabalho dos alunos dos primeiros anos de escolaridade?' e, nesse sentido, 'é possível que dizer que atividades de modelagem matemática auxiliam na formação matemática dos alunos dos primeiros anos de escolaridade?'. As considerações finais versam sobre a potencialidade da modelagem matemática nos primeiros anos de escolaridade, evidenciando os modos de representar os objetos matemáticos.

Introdução

Pesquisas sobre modelagem matemática na Educação Matemática têm ganhado espaço na comunidade científica nas últimas décadas. No entanto, tais pesquisas estão 'mais' relacionadas à utilização da modelagem matemática por professores que atuam nos últimos anos do ensino fundamental, no ensino médio e no ensino superior¹. Nesse sentido, pesquisas como Stillman (1998) e Luna e Alves (2007) apontam que tradicionalmente a modelagem matemática não é apresentada aos alunos até os últimos anos da Educação Básica (por volta dos 11 e 12 anos).

Contudo, é no início de sua formação escolar que a criança começa a formar a base de sua estrutura cognitiva a qual lhe acompanhará para o resto da vida. Pesquisadores

¹ O ensino no Brasil está organizado da seguinte forma: anos iniciais do ensino fundamental (6 a 10 anos), anos finais do ensino fundamental (11 a 14 anos) e ensino médio (15 a 17 anos), que constituem a Educação Básica, e o ensino superior (a partir dos 17 anos).

cognitivistas como David Tall, Jean Piaget e Jerome Bruner defendem que a formação matemática dos indivíduos se desenvolve por meio de diferentes modos de representação. Em particular, David Tall aborda o desenvolvimento dos indivíduos por meio de três modos de operação que os indivíduos mobilizam desde criança até sua fase adulta para representar e expressar seu pensamento, sendo esses, determinados pelo trânsito em diferentes mundos da matemática.

Considerando a carência sobre modelagem matemática nos primeiros anos escolares, e a importância do desenvolvimento cognitivo nessa etapa da vida, foi desenvolvida uma pesquisa – Tortola (2012) – com alunos de 8 e 9 anos que frequentavam seus primeiros anos de escolaridade, em que foram propostas atividades de modelagem matemática. Dessas atividades três são apresentadas neste artigo, duas em anexo e uma é analisada sob à luz dos ‘Três Mundos da Matemática’ delineados por David Tall. Nesse contexto nos debruçamos sobre as questões: quais mundos da matemática são evidenciados no trabalho dos alunos dos primeiros anos de escolaridade? E nesse sentido, é possível que dizer que atividades de modelagem matemática auxiliam na formação matemática dos alunos dos primeiros anos de escolaridade?

Para tanto, discutimos questões relativas à aprendizagem nos primeiros anos escolares e aos três mundos da matemática de David Tall, apresentamos a modelagem matemática como uma alternativa para as aulas de matemática e exemplos de atividades desenvolvidas por alunos de um quarto ano primário. Por fim, analisamos uma dessas atividades com base no referencial teórico enunciado.

A aprendizagem nos primeiros anos escolares

Aprender... Nossa vida é feita de aprendizados. Aprendemos a falar, a andar, a nos comunicar; aprendemos a lidar desde as coisas mais simples do nosso dia a dia, como tomar banho ou escovar os dentes, até coisas mais complexas, como ler, interpretar e refletir sobre uma determinada história. É nossa capacidade de aprender que fundamenta nossa vida. E, nesse sentido, buscamos até mesmo aprender a aprender.

Mas o que é aprender? De acordo com Houaiss (2009) o termo “aprender” vem do latim *apprendo* e significa “adquirir conhecimento (de), a partir de estudo; instruir-se; adquirir habilidade prática (em); vir a ter melhor compreensão (de algo), pela intuição, sensibilidade, vivência, exemplo”. Nesse sentido, a aprendizagem está associada ao desenvolvimento do sujeito, à sua capacidade de conhecer, adquirir habilidade prática e, ainda, à compreensão. Nesse contexto se dá a importância de se olhar para os primeiros

anos de escolaridade. A matemática nesse nível de ensino é foco de estudos de Nacarato, Mengali e Passos (2011). Para que ocorra aprendizagem por parte dos alunos, esses autores discutem, entre outros fatores: a importância da criação de um ambiente propício; a importância da comunicação e do diálogo; a leitura e a escrita como associadas ao aprender a ler e ler para aprender.

A comunicação, segundo Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 42) é um aspecto essencial para o desenvolvimento dos indivíduos:

A comunicação envolve linguagem – linguagem corrente (oral e escrita), linguagem matemática, linguagem gestual -, interações e negociação de significados, os quais são essenciais à aprendizagem, por nós entendida como um processo de produção e construção de significados. [...] Essas características pressupõem certa dinâmica nas aulas de matemática, em que alunos e professores precisam envolver-se na atividade intelectual de produzir matemática – ou de matematizar (Nacarato, Mengali & Passos, 2011, p.42).

As linguagens, corrente (oral ou escrita), matemática, assim como, a linguagem gestual, estão associadas aos modos de representar que cada sujeito utiliza para expressar seus pensamentos e suas ideias. Nesse sentido, nos fundamentamos nos modos de representação utilizados por David Tall para abordar o desenvolvimento matemático dos indivíduos no decorrer de sua vida.

Os Três Mundos da Matemática

A teoria que trata dos três mundos da matemática, veiculada por David Tall, visa elucidar como se dá o desenvolvimento matemático dos indivíduos. O desenvolvimento de cada sujeito, segundo Tall (2008), está associado a dois tipos de noções, denominadas por ele de *set-before* e *met-before*, que contemplam noções básicas – que já nascem com o sujeito – e experiências prévias que facilitam a aprendizagem de novos conceitos. Nesse contexto, está a repetição, o reconhecimento e a linguagem que são indispensáveis aos seres humanos desde seu nascimento. É a partir desses primeiros *set-befores* que é possível, a partir da experiência, formar noções de *met-before*. Os modos que o ser humano encontra de lidar com a matemática estão relacionados tanto às noções que já nascem com o indivíduo, quanto às suas experiências durante a vida. É nesse contexto que discutimos três diferentes modos de operar com os objetos matemáticos, teorizados por David Tall.

Os três mundos da matemática estão associados às experiências matemáticas. Tall (2004) os associa a três formas de desenvolvimento cognitivo em relação à Matemática,

dispostas em três distintos e, ao mesmo tempo, relacionados mundos da matemática: os mundos conceitual corporificado, simbólico proceitual e axiomático formal.

Quadro 1: descrevendo os mundos da matemática de acordo com Tall (2004).

o Mundo conceitual corporificado envolve percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados. São objetos corporificados, por exemplo, gráficos e diagramas que, no início, podem ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. A utilização de tais objetos pode indicar o trânsito do indivíduo nesse mundo. Ações como a percepção, a observação e a descrição podem estar relacionadas ao trabalho matemático com conceitos e corporificações dos mesmos.	O mundo simbólico proceitual é o mundo dos símbolos que são usados para cálculos e manipulações na aritmética e na álgebra, por exemplo. As atividades nesse mundo se iniciam com ações (como apontar e contar) e são encapsuladas como conceitos por meio do uso de símbolos.	O mundo axiomático formal, por sua vez, é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas (como, por exemplo, “grupo”, “campo”, “espaço vetorial” e “espaço topológico”) que constituem o sistema axiomático da Matemática.
--	--	---

Considerando pesquisas já existentes, como por exemplo, Tortola (2012) e Palharini (2010), é possível inferir que atividades de modelagem matemática podem ser consideradas como atividades que propiciam a mobilização de diferentes representações matemáticas, em particular, aquelas características da linguagem matemática que podem denotar o trânsito dos alunos pelos mundos da matemática.

Modelagem Matemática: uma abordagem para os primeiros anos de escolaridade

Nosso olhar se volta para a aprendizagem dos alunos nos primeiros anos escolares, nesse contexto, a modelagem matemática surge como uma possibilidade para o estudo de conteúdos matemáticos, a partir da interpretação de fenômenos por meio da linguagem matemática. E, portanto, pode ser caracterizada da forma como Almeida e Brito (2005) o fazem: como uma alternativa pedagógica na qual se aborda por meio da matemática uma situação problema não essencialmente matemática.

Essa abordagem constitui uma atividade de modelagem matemática, que em linhas gerais pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), e uma situação final (modelo matemático – resposta para a problemática) (ALMEIDA, 2010); e para que haja a passagem de uma a outra, é necessária uma série de procedimentos como a escolha do tema, formulação do problema, definição de variáveis, levantamento de hipóteses, realização de simplificações, construção de um modelo matemático, bem como sua interpretação e validação.

Esses procedimentos são organizados por Almeida, Silva e Vertuan (2012) em quatro fases: a inteiração; a matematização; resolução; e a interpretação de resultados e

validação. Essas fases estão associadas ao caminhar, da problemática até o modelo matemático e que uma série de conteúdos matemáticos são evocados e entram em cena para auxiliar na resolução do problema. Pensamos, portanto, ser a modelagem matemática, uma alternativa com um forte potencial para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Entretanto, como já colocado, Stillman (1998) e Luna e Alves (2007) apontam que a modelagem matemática, em geral, é destinada para estudos que envolvem alunos com determinada maturidade, que já possuem certo conhecimento da linguagem matemática. Em contrapartida, English e Watters (2004) defendem a ideia de que a Modelagem Matemática pode e deveria ser inserida já nos primeiros anos escolares, uma vez que é nesse período que os alunos começam a formar a base de sua estrutura cognitiva.

Neste artigo, vamos ao encontro das ideias de English e Watters (2004) e apresentamos três atividades de modelagem matemática realizadas por 36 alunos de um 4º ano primário de uma escola pública do sul do Brasil e analisamos à luz da teoria sobre os três mundos da matemática os registros dos alunos e seu desenvolvimento matemático. Os encontros foram registrados por meio de gravações em áudio e vídeo, os quais acrescidos dos registros escritos produzidos pelos alunos são tomados para análise.

Modelagem nos primeiros anos de escolaridade e os mundos da matemática

As atividades (em anexo) foram desenvolvidas pelos alunos em três momentos: primeiramente o professor levou para a sala a atividade “Espaço dos alunos na sala de aula”; depois propôs a atividade “Quanto é gasto com energia elétrica para...”, de maneira que os alunos tivessem mais participação na solução do problema; e, por fim, a atividade “Qual caixa d’água comprar?”, que foi proposta pelos alunos.

Faremos agora uma análise de uma das atividades – Espaço dos alunos na sala de aula – para exemplificar os mundos da matemática pelos quais os alunos transitaram.

Após apresentada a atividade, os alunos precisam se inteirar do tema e compreender a situação para que possam resolver o problema. Nesse momento é utilizada basicamente a linguagem natural e, por isso, as representações utilizadas pelos alunos estão vinculadas ao mundo conceitual corporificado para observar e comunicar. Aqui são mobilizados uma série de conhecimentos prévios (*met-before*) que visam auxiliá-los na interpretação do problema e, se necessário, formulação de hipóteses e realização de simplificações que os possibilitam dar continuidade ao processo de modelagem, como é o caso do espaço destinado ao professor; a experiência que os alunos têm em sala de

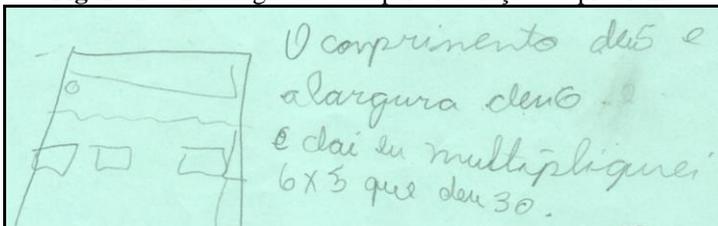
aula os assegurava de que esse espaço deveria ser maior que 1m^2 – espaço garantido a cada um deles.

Na atividade, os alunos tomaram como hipótese que, dentre o espaço restante, após desconsiderar os armários, bebedouro e demais objetos da sala, como orientavam as informações apresentadas, deveriam ainda destinar ao professor um espaço de 10m^2 .

Quando questionados acerca do que é um metro quadrado, os alunos novamente recorreram aos seus *met-before*, a fim de elaborar uma resposta. Essa ação de recorrência indica que é por analogia a outros usos das palavras metro e quadrado que eles conseguem formular algumas conjecturas, levando-os a dar respostas como: “é um metro que é quadrado” ou “é a medida de um quadrado” (falas do Aluno 16).

Para esclarecer tal conceito o professor confeccionou junto aos alunos um bloco quadrangular de área 1m^2 , de modo que eles pudessem conhecer qual era o espaço a que se refere a lei. Tal procedimento foi importante para que os alunos se encaminhassem para a próxima fase do processo de modelagem, a matematização. Diante do que lhes foi colocado, eles deduziram que para saber quantos alunos cabiam na sala de aula, eles precisavam medir o espaço que podia ser ocupado por eles, ou seja, precisavam calcular a área. Esse cálculo implica em saber a forma geométrica da sala de aula – nesse caso, retangular –, e como proceder para realizá-lo – multiplicar o comprimento pela largura da sala.

Figura 1 - Estratégia adotada para resolução do problema



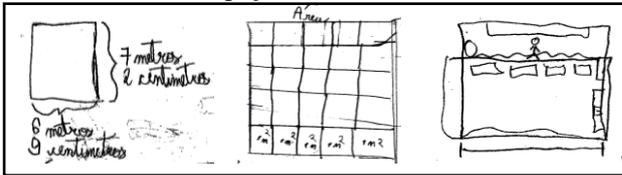
Observamos que mesmo fazendo só de linguagem matemática, prevalecem os registros em linguagem natural e começa aparecer

os registros numéricos, que levam os alunos a transitar pelos mundos conceitual corporificado e simbólico proceitual (das corporificações aos cálculos).

Ao passar para a fase de resolução, os alunos passam a utilizar tais medidas no cálculo da área e entram em cena símbolos que marcam o trânsito pelo mundo simbólico proceitual. Nessa fase, surgem ainda registros em linguagem natural que indicam como realizar o cálculo da área da sala de aula e que levam a uma resposta para o problema, os alunos concluem que o cálculo da área era suficiente para resolver o problema. Também surgiram registros figurais, no qual os alunos indicaram a área reservada a eles e a quantidade de alunos que cabem na sala por meio do desenho de símbolos que representavam as carteiras. Representações essas, vinculadas ao mundo corporificado,

em consonância com procedimentos do mundo simbólico, pois são utilizadas para contar o número de alunos possível.

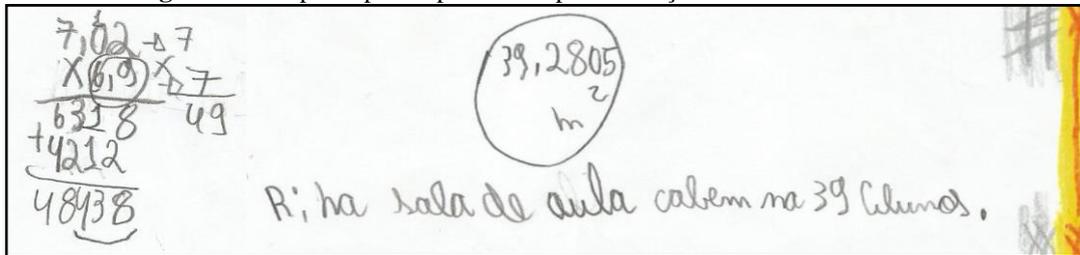
Figura 2 – Representações utilizadas pelos alunos para o espaço destinado a eles



Tais ações, conduzem os alunos a última fase do processo de modelagem, a fase de interpretação de resultados e validação que consiste na avaliação dos resultados

encontrados. Muitos alunos sentiram a necessidade de rever suas ações. O que levou os alunos a transitar novamente pelos dois mundos já colocados, e a obter uma resposta mais condizente com a situação.

Figura 3 – Resposta para o problema após validação do modelo matemático



As idas e vindas pelos mundos da matemática denotam a atribuição de significados que os mesmos dão aos conceitos matemáticos. As representações corporificadas aliadas às simbólicas, podem no futuro evoluir para representações formais associadas à linguagem matemática e colocar os alunos em um contato mais forte com o mundo axiomático formal, no qual processos de generalização e abstração são necessários e a linguagem matemática aliada à linguagem natural pode conduzir às provas matemáticas.

Finalizando, por hora...

A reflexão sobre os questionamentos iniciais nos leva inferir que os mundos da matemática evidenciados no trabalho dos alunos dos primeiros anos de escolaridade, a partir das atividades desenvolvidas concentram-se no mundo corporificado e no mundo simbólico. A evidencia desses mundos pode estar relacionada ao uso de uma linguagem que contempla aspectos mais descritivos das situações, que envolvem cálculos, representações figurais e em linguagem natural, mais comuns nos primeiros anos de escolaridade. As demais atividades foram desenvolvidas pelos alunos por meio de representações em linguagem natural e linguagem matemática. Percebe-se a manipulação dos símbolos matemáticos para contar e medir. A linguagem matemática na maioria das vezes é utilizada em consonância com o processo de matematização, descrito na literatura sobre modelagem matemática, sendo as ações dos alunos nessa

fase as que mais representam seu transitar pelo mundo simbólico proceitual. Transitar esse que, quase sempre está acompanhado de corporificações – figuras – para auxiliar na manipulação dos símbolos matemáticos e na atribuição de significados aos procedimentos matemáticos.

Nesse sentido, pensamos ter a modelagem matemática, um potencial para o uso de diferentes representações, associadas aos três mundos da matemática organizados por David Tall criando oportunidade para os alunos conhecerem novas representações, cuja linguagem se refina conforme transitam nesses e por esses mundos, propiciando a aprendizagem em matemática dos alunos dos primeiros anos de escolaridade.

Agradecimentos: Nossos agradecimentos à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Referencias

- Almeida, L. M. W. (2010). Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké*, 18(Número Temático), 379-406.
- Almeida, L. M. W., Silva, K. P., y Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.
- English, L. D., y Watters, James J. (2004). Mathematical Modelling with young children. En J. Høines, y A. B. Fuglestad (Eds.), *The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp. 335-342. Bergen.
- Houaiss, A., Villar, M. S., y Franco, S. M. (2009). *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva.
- Luna, A. V. A. (2007). Modelagem Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Santiago de Querétaro, México, 12.
- Nacarato, A. M., Mengali, B. L. S., y Passos, C. L. B. (2011). *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender*. São Paulo: Autêntica.
- Palharini, B. N. (2010). *Modelagem Matemática e pensamento matemático: um estudo à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.
- Stillman, G. (1998). The emperor's new clothes? Teaching and assessment of mathematical applications at the senior secondary level. En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, y I. D. Huntley (Eds.). *Mathematical modelling: Teaching and assessment in a technology-rich world*. pp. 243-254. West Sussex: Horwood Publishing Ltd.
- Tall, D. (2004). Introducing the three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29-33.
- Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics, to appear in *Mathematics Education Research Journal*. [A summary of the framework of three worlds of mathematics as applied to the shift to formal thinking], *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.
- Tortola, E. (2012). *Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.

ANEXO: ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DOS PRIMEIROS ANOS DE ESCOLARIDADE

Quadro 1: Atividade “Espaço dos alunos na sala de aula”



Seu espaço na sala de aula

Uma sala de aula é ocupada por estudantes, pelo professor e por objetos que fazem parte do ambiente escolar, como cadeiras, carteiras e armários. Para que você permaneça em um ambiente mais agradável, existe uma lei que determina que em uma sala de aula cada estudante tem direito a uma área de 1 metro quadrado (m²).

VAMOS ESTUDAR...

Quantos alunos cabem na sua sala de aula?



Quadro 2: Atividade “Quanto é gasto com energia elétrica para...”



Todo mês chega a nossa casa uma fatura que mostra os nossos gastos com energia elétrica. O valor cobrado depende de duas coisas: 1) Quantidade de energia elétrica utilizada no mês, medida em quilowatts-hora (kWh); 2) Valor da tarifa por kWh, determinada pela Companhia de Energia Elétrica de acordo com cada região. Esses dados podem ser encontrados em sua fatura de energia elétrica.

**QUANTA ENERGIA ELÉTRICA É GASTA EM SUA CASA?
E QUANTO SE PAGA POR ISSO?**

VAMOS ESTUDAR...

Qual é o seu desenho favorito? Quanta energia elétrica você gasta para assistir esse desenho? Quanto é pago por isso?

Quanto tempo você gasta para tomar banho?
Quanta energia elétrica você gasta? Quanto é pago por isso?




Quadro 3: Atividade “Qual caixa d’água comprar?”

Para uma residência, o consumo médio por pessoa é de 150 litros por dia.

Por dia 3,00

As normas brasileiras dizem que os reservatórios de água devem ser suficientes para suprir dois dias de consumo de uma casa.

- 1) Para uma residência, o consumo médio por pessoa é de 150 litros por dia.
- 2) As normas brasileiras dizem que os reservatório de água devem ser suficientes para supri dois dias de consumo de uma casa.

Pergunta: Quantos litros de água precisa ter na caixa de água da minha casa?

Pergunta: Quantos litros de água precisa ter na caixa de água da minha casa?