TRABAJO POR PROYECTOS EN EL IES VEGA DE TORANZO

Pilar Sabariego Arenas
IES Vega de Toranzo, ALCEDA

El *trabajo por proyectos* es una de las herramientas para el desarrollo del currículum que más interés está despertando últimamente, ya que, a lo largo de los años, se le han atribuido muchos beneficios en relación a la motivación de los alumnos y la mejora de las, ahora llamadas, competencias clave. No obstante, fuera de trabajos de investigación, ha sido poco estudiada.

Podemos decir que el *trabajo por proyectos* es un plan de trabajo que un grupo de estudiantes y su profesor se proponen a sí mismos con la intención de conseguir un resultado. Sus elementos están coordinados de forma natural y tienen un sentido orientado a la investigación sobre un tema.

Según Legutke y Thomas (1991), el *trabajo por proyectos* tiene las siguientes características:

a. El tema de un proyecto no viene predeterminado por el currículo, ni está basado en aspectos abstractos de una disciplina académica. Dicho tema es determinado en relación con aspectos de la vida real.
b. El tema de un proyecto en sí mismo no representa el valor del llamado aprendizaje por proyectos. Este surge de la implicación de los alumnos en el mismo, a través de procesos de reflexión, negociación, experimentación, etc. que conducen al aprendizaje experimental.
c. Estos procesos se manifiestan en el plan del proyecto, fruto del trabajo negociado y elaborado por el grupo, que desarrolla la idea inicial del proyecto en más detalle, incluyendo las actividades, tareas intermedias, áreas problemáticas, etc. Este plan está en constante evolución.
d. El aprendizaje por proyectos es investigativo y sigue un modelo cíclico que progresa, a partir de ideas, a experiencias concretas, reflexión y nuevas ideas.
e. El aprendizaje por proyectos se centra en los alumnos, permitiendo un alto grado de participación y ayudando a los estudiantes a descubrir sus propios talentos, intereses y limitaciones.
f. La superación de las tareas que componen un proyecto depende de las habilidades cooperativas de sus participantes, que organizan su trabajo, siguen su progreso, se responsabilizan y resuelven los problemas que van surgiendo.
g. El trabajo por proyectos asume una habilidad, por parte de los alumnos, de trabajar de forma autónoma en el proceso de aprendizaje. Esto significa que los estudiantes participan activamente en el proceso de planificación de su aprendizaje y actúan a menudo fuera del control del docente.
h. Se presta tanta atención al proceso como al producto del aprendizaje. Los productos se consideran como elementos que aportan un valor en uso, a diferencia de la concepción del aprendizaje tradicional, que definía el producto del aprendizaje como un cambio en el inventario del saber del alumno. Por otra parte, los productos en la enseñanza por proyectos son propiedad de los estudiantes y requieren, para su producción, capacidades que, más allá de las intelectuales, integran a la persona en su totalidad.
i. El aprendizaje por proyectos trasciende las materias o asignaturas y requiere un enfoque interdisciplinario.
j. El aprendizaje por proyectos, en contraste con el de tipo tradicional, ha modificado (cualitativa y cuantitativamente) sensiblemente los papeles del profesor y el alumno. Por tanto, las competencias y habilidades necesarias para ambos deben ser redefinidas.
k. El aprendizaje por proyectos considera a los estudiantes como “socios” del aprendizaje, haciendo posible su contribución a los contenidos y los procesos de aprendizaje. Esto hace posible la puesta en práctica de un currículo abierto, orientado al proceso, que se opone al currículo de la enseñanza tradicional.

Desde el curso 2012-2013, el departamento de matemáticas del IES Vega de Toranzo, de Alceda, formado por Inmaculada Payo Pila y Pilar Sabariego Arenas, viene trabajando con los alumnos aplicando metodologías diferentes a las tradicionales, aunque sin dejar estas de lado.

PRESENTACIÓN

Sus métodos de trabajo consisten en involucrar el máximo número de alumnos en trabajos de investigación en los que tengan que resolver un problema del que, a priori, ni siquiera las profesoras conocen la solución. Para ello, aplican el método científico seguido por cualquier investigador.

En primer lugar se plantean un problema del que quieren conocer la solución y que sea del interés de los alumnos (siempre intentan que el problema lo planteen ellos). Después buscan información sobre ese problema: definiciones de los conceptos implicados, la historia del problema, resultados previos, si los hay,…

En segundo lugar, usando toda la información recopilada, tratan de resolver su problema. En ocasiones tienen que usar herramientas (algoritmos, software,…) que no conocían con anterioridad, lo que supone el grueso del trabajo y los mayores esfuerzos tanto de las profesoras como de los alumnos, puesto que unas deben preparar materiales para que los alumnos aprendan a usar esas herramientas y demuestren que han aprendido a hacerlo y que lo hacen bien, y otros deben hacer el esfuerzo por entender el funcionamiento de las herramientas y demostrar que las saben utilizar. Aquí es donde se halla la mayor parte del aprendizaje matemático.

En tercer lugar, resuelven su problema. Si la fase dos se ha llevado a cabo correctamente, esta fase es un mero trámite: un ejercicio más similar a los ejemplos propuestos en la fase dos.

En cuarto lugar deben extraer conclusiones basándose en las soluciones obtenidas y, por último, han de recopilar toda esta información en un trabajo escrito, plasmando todas las fases de la investigación. Además, se les pide que hagan un póster (que después se expone en los pasillos del centro), una presentación digital y una exposición del trabajo (apoyándose en esa presentación) ante sus compañeros, que es grabada en vídeo y colgada en el blog del departamento: http://matematicasdesdealceda.blogspot.com.es

Como todos sabemos, hacer esto y a la vez cumplir con el currículum es imposible. ¿Cómo lo hacen ellas? Haciendo que los alumnos realicen estos proyectos en casa. La mayor parte del trabajo se realiza fuera del centro y con comunicaciones online vía correo electrónico. Muchos recreos son utilizados para explicar ideas, corregir errores y aclarar dudas. Las exposiciones orales son preparadas en los recreos antes de realizarse ante los compañeros. Esto supone un trabajo extra, tanto para las profesoras como para los alumnos, pero los resultados están mereciendo la pena, puesto que, según ellas, cada vez son más los alumnos que piden trabajar en un proyecto de investigación de este tipo. Este año, sin ir más lejos, se han sumado los estudiantes de Taller de Matemáticas de 2º de ESO, aunque estos, por la edad, han trabajado tanto en clase como en casa. Ha sido un trabajo más dirigido.

En el Boletín anterior ya nos hicimos eco de algunos de los premios que han recibido y en este queremos hacer lo mismo puesto que acaba de otorgárseles el Primer Premio y el Segundo Premio del IV Concurso de Investigación en ESO de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Cantabria, por los trabajos:
"Cálculo de las mejores rutas de evacuación en Corvera de Toranzo" y
"Aplicación de un modelo matemático para entregar la Bota de Oro en los Mundiales de Fútbol", respectivamente; ambos dirigidos por la profesora Pilar Sabariego Arenas.

Proyecto "CÁLCULO DE LAS MEJORES RUTAS DE EVACUACIÓN EN CORVERA DE TORANZO"

Este trabajo ha obtenido el Primer Premio del IV Concurso de Investigación en ESO de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Cantabria. Ha sido realizado por los siguientes estudiantes de Taller de Matemáticas de 2º de ESO: Clara Fernández Castañeda, Ángela López Arroyo, Joseba Manteca Villegas, Marco Pérez Carrera y Andrés Sainz Pelayo.

El objetivo principal del trabajo es usar las herramientas que facilita la teoría de grafos para dar respuesta a la pregunta: *¿cuáles son las rutas óptimas de evacuación de Corvera de Toranzo?* Se trata de encontrar los caminos más cortos entre las viviendas de este pueblo y la plaza del mismo para, una vez allí, recibir la información necesaria y poder abandonarlo.

El interés de este estudio no es sólo el cálculo de los caminos de longitud mínima, sino también el demostrar a los estudiantes de 2º de ESO que son capaces de resolver problemas de la vida real usando matemáticas (aunque sean de niveles superiores a las de 2º de ESO) y otras herramientas que no sabían ni que existían cuando comenzaron a trabajar en el proyecto.

Puesta en marcha

Como el proyecto consiste en calcular rutas de longitud mínima usando un grafo, el trabajo comenzó por intentar hallar las distancias necesarias para calcular las rutas. La primera idea que surge es usar un mapa para poder calcular las longitudes de los caminos que unen las diferentes casas con los puntos de encuentro fijados. Esta idea no es buena puesto que es difícil encontrar un mapa de Corvera de Toranzo en el que aparezcan todas las callejas del pueblo. La mejor herramienta para poder abordar el problema es una fotografía aérea. La dificultad está ahora en que no es tan fácil tomar medidas sobre una fotografía como lo es sobre un mapa, así que la profesora recomendó a los alumnos usar *Iberpix* y les enseñó a manejarlo. *Iberpix* es una aplicación que se encuentra en la página del Instituto Geográfico Nacional, que nos permite manejar fotografías aéreas y calcular distancias sobre ellas. Justo lo que buscaban.

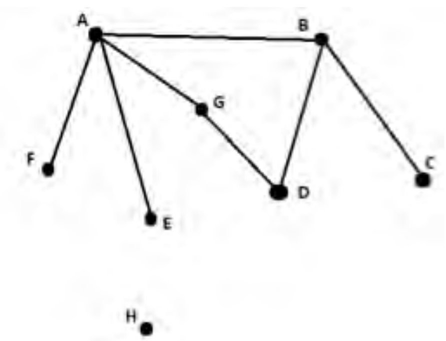
Trabajo de los alumnos

Con las fotografías aéreas y las longitudes de los caminos calculadas, los alumnos tenían que construir el grafo que representase la situación que encontramos en Corvera de Toranzo. Entonces surgió un nuevo problema: ¿cómo dibujarían el grafo? Lo primero que se les ocurrió fue usar *Paint*, pensaron poner la foto de fondo y sobre ella dibujar el grafo, pero la profesora, que ya tenía experiencia en el manejo de grafos, les dijo que con *Paint* resultaría muy difícil y que no quedaría bien, que necesitaban otro software llamado *Grafos*, para la construcción, edición y análisis de grafos, desarrollado por Alejandro Rodríguez Villalobos, profesor de la Universidad Politécnica de Valencia. Este programa les permitió poner las fotografías aéreas como "tapiz" y, con ellas de fondo, construir el grafo sobre el que realizar los cálculos. También les permitió asignar a cada arista del grafo un peso que mostrara la distancia calculada previamente con *Iberpix*.

Los alumnos iban a usar teoría de grafos así que tuvieron que buscar información sobre ella, algunas definiciones y algoritmos que les iban a hacer falta. Además, tuvieron que realizar dibujos (esta vez con *Paint*), que apoyaran sus explicaciones. Lo que sigue es una transcripción literal de su trabajo.

La teoría de grafos es una rama de la matemática discreta y de las ciencias de la computación que usa diferentes conceptos de diversas áreas como el análisis combinatorio, el álgebra abstracta, la probabilidad, la geometría de polígonos, la aritmética y la topología, para estudiar las propiedades de los grafos.

Los grafos son estructuras que constan de dos partes: el conjunto de vértices, nodos o puntos; y el conjunto de aristas, líneas o lados.



Representación gráfica de un grafo.

Origen

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg (actualmente Kaliningrado). Este consistía en encontrar un camino por los siete puentes del río Pregel de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Este tipo de caminos reciben el nombre de caminos eulerianos (en honor a Leonhard Euler).

Grafo que sirvió para resolver el problema de los puentes de Königsberg, dibujado sobre un mapa de la ciudad en 1736.

Luego, en 1847, Gustav Kirchhoff utilizó la teoría de grafos para el análisis de redes eléctricas publicando sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos, conocidas como leyes de Kirchhoff. Este trabajo de Kirchhoff es considerado la primera aplicación de la teoría de grafos a un problema de ingeniería.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores, el cual afirma que es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, en 1976, puede ser considerado el nacimiento de la teoría de grafos puesto que, al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Caminos de longitud mínima

Dos aristas adyacentes son aquellas que inciden en un mismo nodo.

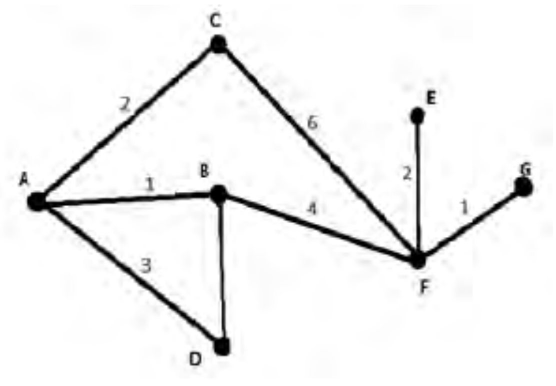
Un camino, dentro de un grafo, es una sucesión de aristas adyacentes.

Además de los caminos eulerianos, mencionados antes, existen otro tipo de caminos llamados caminos hamiltonianos. Estos se llaman así en honor de William Rowan Hamilton, inventor de un juego que consistía en encontrar un ciclo hamiltoniano en las aristas de un grafo de un dodecaedro.

Un camino hamiltoniano es un camino de un grafo que visita todos los vértices del grafo una sola vez. Si, además, el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un ciclo hamiltoniano.

Un grafo se dice conexo si para cualquier par de vértices del grafo existe, al menos, un camino de un vértice al otro.

Cuando a cada arista de un grafo se le asigna un número específico, llamado peso, ponderación o coste, según el contexto, se obtiene un grafo ponderado.



Grafo ponderado.

Dado un grafo ponderado, se define el camino de coste mínimo de un nodo u a un nodo v como el camino donde la suma de los pesos de las aristas que lo forman es la más baja entre las de todos los caminos posibles de u a v.

Problema del camino más corto

Este problema consiste en encontrar un camino entre dos vértices de tal manera que la suma de los pesos de las aristas que lo constituyen es mínima. Un ejemplo es encontrar el camino más rápido para ir de una ciudad a otra en un mapa. En este caso, los vértices representan las ciudades y las aristas las carreteras que las unen, cuya ponderación viene dada por el tiempo que se emplea en atravesarlas. En nuestro caso, en lugar de asignarle un tiempo, a cada arista le asignaremos como peso la longitud del camino que representa.

Para resolver este problema, los algoritmos más usados son los de Dijkstra, Floyd y Warshall. Nosotros usaremos el de Dijkstra.

El algoritmo de Dijkstra es un algoritmo eficiente de complejidad $O(n^2)$, donde n es el número de vértices del grafo, que sirve para encontrar el camino de coste mínimo desde un nodo origen a todos los demás nodos del grafo. Su nombre se refiere a Edsger Wybe Dijkstra, quien lo describió por primera vez en 1959. Este algoritmo es un típico ejemplo de algoritmo ávido, que resuelve los problemas en pasos sucesivos, seleccionando en cada paso la solución más óptima con el objeto de resolver el problema.

El fundamento sobre el que se basa este algoritmo es el principio de optimizar: si el camino más corto entre los nodos u y v pasa por el nodo w, entonces la parte de camino que va de w a v debe ser el camino más corto entre todos los caminos que van de w a v. De esta manera, se van construyendo sucesivamente los caminos de coste mínimo desde un nodo inicial hasta cada uno de los vértices del grafo y se utilizan los caminos conseguidos como parte de los nuevos caminos.

El algoritmo de Dijkstra en cada paso selecciona un nodo u cuya distancia es desconocida, entre los que tiene la distancia más corta al nodo origen s, entonces el camino más corto de s a u ya es conocido y marca el nodo u como ya conocido. Así, sucesivamente se van marcando nuevos nodos hasta que estén todos marcados; en ese momento, es conocida la distancia mínima del origen s al resto de los nodos.

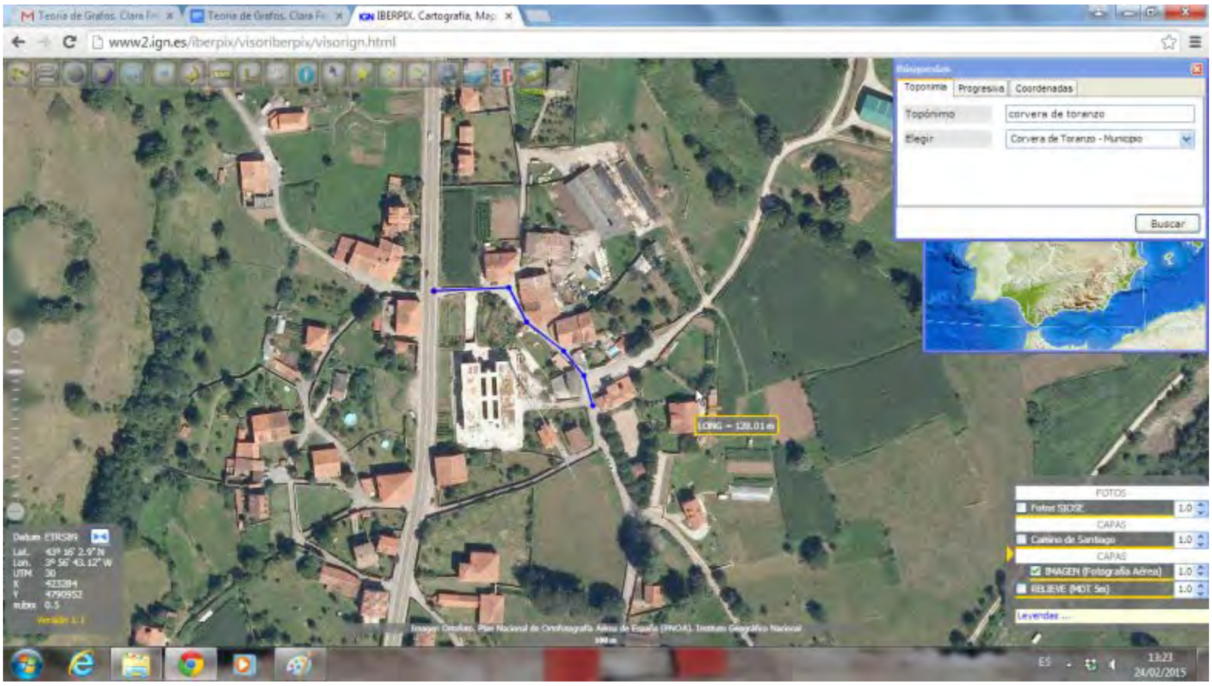
Entre las condiciones más importantes que deben considerarse para aplicar el algoritmo están:

- *Las aristas deben tener un peso no negativo. En nuestro caso, una distancia.*
- *El grafo debe ser dirigido y, por supuesto, ponderado. En nuestro caso, el nodo origen es el que marca la plaza de nuestro pueblo y la poderación viene dada por los pesos asignados a las aristas.*

Llegados a este punto, los estudiantes describieron un ejemplo para explicar los pasos del algoritmo de Dijkstra. Para que los alumnos llegaran a entender el algoritmo y lo aplicaran correctamente, la profesora les proporcionó la dirección de varios vídeos de *YouTube*, valga como ejemplo https://www.youtube.com/watch?v=fgdCNuGPJnw, y elaboró ejercicios donde debían aplicar el algoritmo para resolverlos. No vamos a reproducir aquí el ejemplo expuesto por los alumnos en su trabajo para no extendernos más de lo necesario, pero pueden verlo en el blog del departamento de matemáticas: http://matematicasdesdealceda.blogspot.com.es

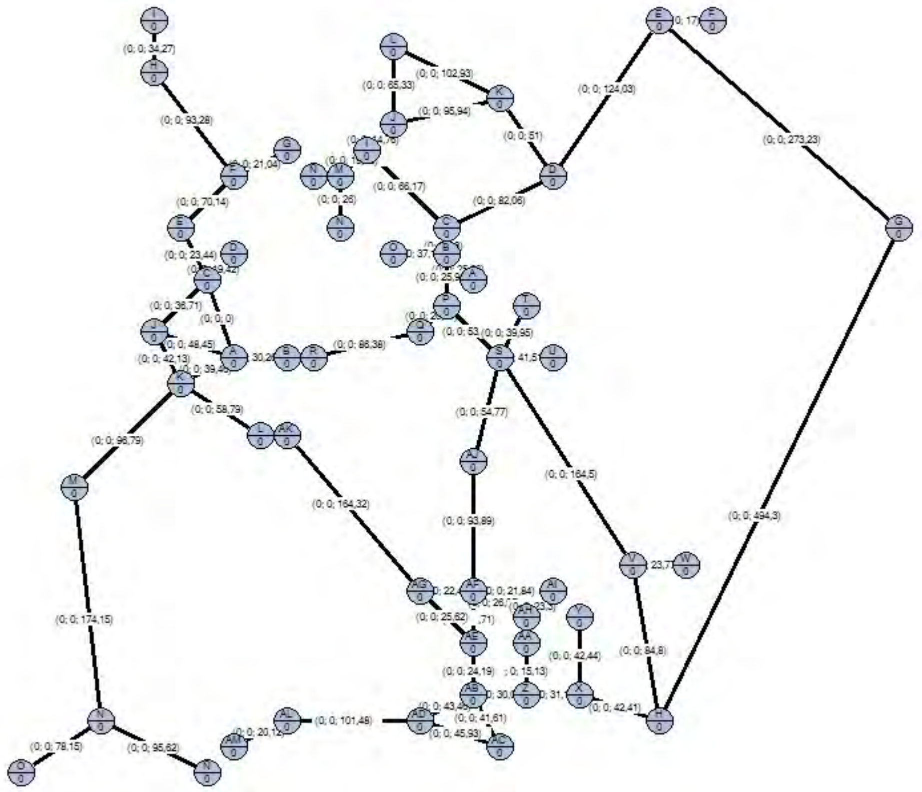
Después de realizar todo este trabajo, llegó el momento de resolver su problema.

Sobre la fotografía aérea de Corvera de Toranzo, y usando *Grafos*, construyeron el grafo que les ayudaría a calcular los caminos de longitud mínima. Tuvieron que construir dos grafos porque Corvera de Toranzo está dividida por la carretara nacional N-623 en dos partes y trabajaron en cada una de ellas por separado. Consideraron el grafo de la izquierda de la carretera, más pequeño, y el de la derecha, más grande. Los pesos de las aristas fueron las distancias, en metros, entre los distintos puntos de interés: plazas, casas, cruces de calles y caminos,... todas calculadas usando *Iberpix.*



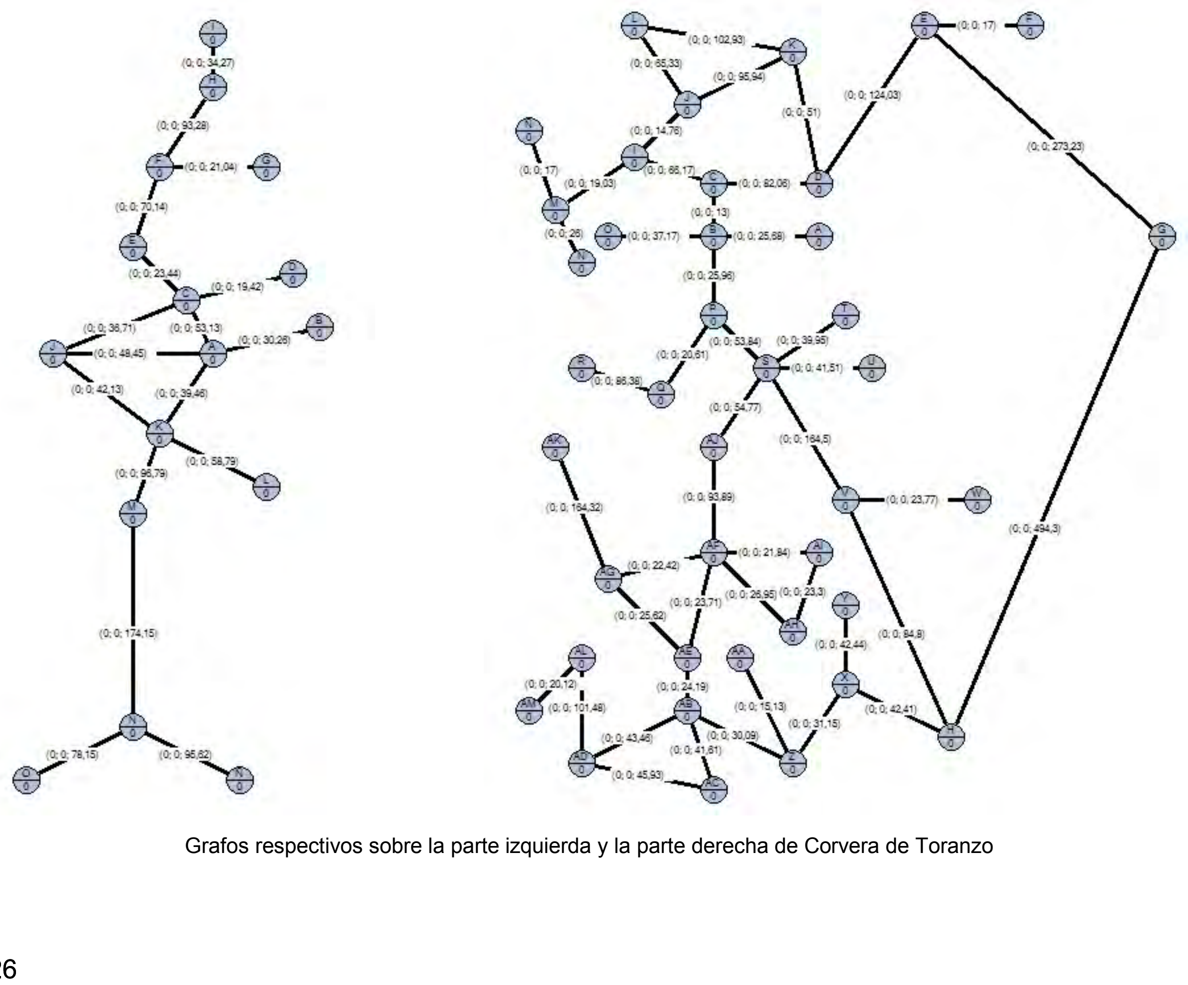
Ejemplo de la utilización de *Iberpix*.

Fotografía aérea de Corvera de Toranzo
y
Grafos construidos sobre la fotografía aérea de Corvera de Toranzo.



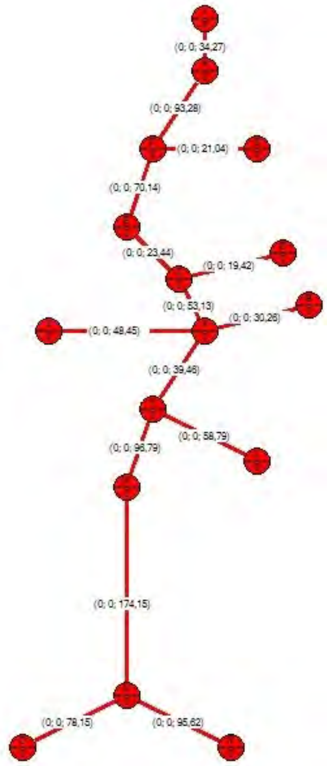
Grafos, sin la imagen de Corvera de Toranzo de fondo.

Trabajar sobre el grafo no conexo (son dos subgrafos conexos) que se ve en la figura anterior es muy complicado puesto que apenas se ven los pesos (distancias) sobre las aristas. Es, por esto, que los alumnos los agrandaron y trabajaron sobre cada subgrafo por separado.

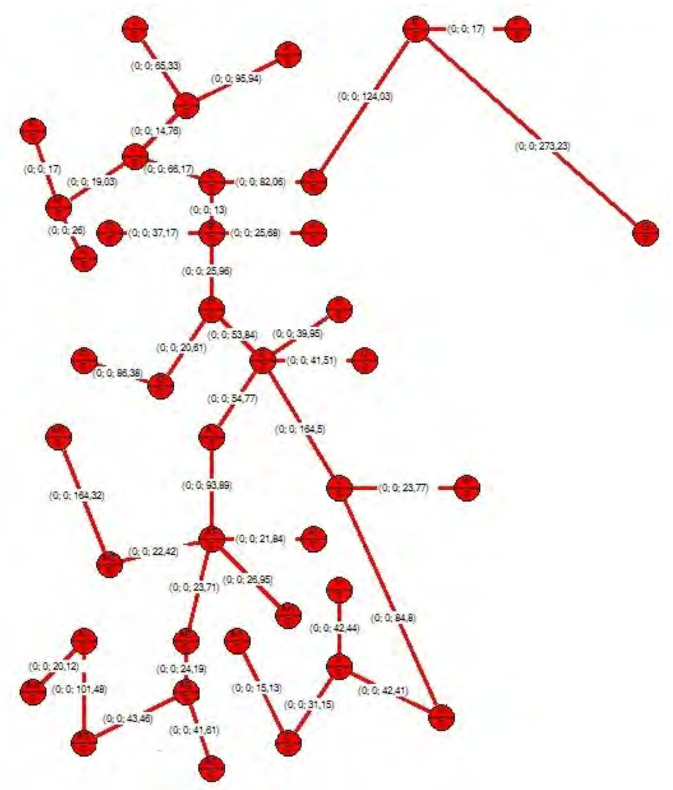


Grafos respectivos sobre la parte izquierda y la parte derecha de Corvera de Toranzo

Por último, en las siguientes figuras se muestran los caminos de longitud mínima de cada grafo, calculados mediante el algoritmo de Dijkstra, y los nodos que han sido elegidos al aplicar el algoritmo. Como es evidente, están todos en rojo puesto que se trata de calcular el camino mínimo desde el nodo A (el que marca las plazas o puntos de reunión del pueblo) hasta cada uno de los nodos del grafo.



Caminos mínimos calculados mediante el algoritmo de Dijkstra en la parte izquiera de Corvera de Toranzo.



Caminos mínimos calculados mediante el algoritmo de Dijkstra en la parte derecha de Corvera de Toranzo.

Conclusiones

Las conclusiones que extrajeron los estudiantes de su estudio son que su pueblo está dividido en dos partes por la carretera nacional N-623 y que, por este motivo, tuvieron que considerar dos puntos de reunión, uno en la parte izquierda y otro en la parte derecha, a los que deberían acudir en caso de que necesitasen reunirse todos por cualquier motivo. El centro de reunión de todo el pueblo es el que está señalado con el nodo A del grafo de la derecha de Corvera de Toranzo, aún así consideraron otro nodo A en la parte izquierda que también podría servir de punto de encuentro y que evitaría el tener que cruzar la carretera. Con este trabajo calcularon las rutas más cortas para llegar a cada uno de los puntos de reunión, según se encontraran en la parte derecha o en la izquiera de su pueblo.

No obstante, señalaron que su pueblo es un pueblo pequeño y no tiene muchos caminos entre los que elegir para ir o salir de un lugar. Como se deduce de los grafos que dan los caminos mínimos, casi siempre existe un único camino que va de un sitio al punto de encuentro y al revés. Por suerte, el pueblo está en un valle y, si en algún momento, se cortase un camino, podrían ir campo a través, pero si no fuese así, destacaron que su trabajo muestra que habría que poner solución a esa situación puesto que no hay muchas rutas alternativas.

Por otro lado, los alumnos comentaron que les había gustado mucho trabajar en este proyecto por la posibilidad que les dio de conocer distintas herramientas y software, además de mostrarles una imagen más útil de las matemáticas, ya que las vieron aplicadas a un problema real.

Bibliografía

- Abellanas, M. y Lodares, D. “Análisis de algoritmos y teoría de grafos”. Rama. 1990.
- Biggs, N. L., “Matemática discreta”. Ed. Vicens Vives. 1994.
- Crespo Crespo, C. R. “Cruzando puentes, pintando mapas,… Una introducción a la teoría de grafos”. Cursos cortos. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Menéndez Velázquez, A. “Una breve introducción a la teoría de grafos”. Revista Suma. Junio 1998, pp. 11-26.
- http://www.ign.es/iberpix2/visor
- http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Dijkstra
- http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Ejemplo_de_Algoritmo_de_Dijkstra
- https://www.youtube.com/watch?v=fgdCNuGPJnw
- https://www.youtube.com/watch?v=607Y3dJGUHI
- https://www.youtube.com/watch?v=S_5W5bImTH4

Proyecto “APLICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA ENTREGAR LA BOTA DE ORO EN LOS MUNDIALES DE FÚTBOL”

Este trabajo ha sido el ganador del Segundo Premio del IV Concurso de Investigación en ESO de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Cantabria, y ha sido realizado por Javier Díaz Díaz, César Díaz Mantecón, Julia Fernández García, Marta Martínez Gutiérrez y Vanessa Velasco Magni, todos ellos estudiantes de 3º de ESO.

El proyecto consiste en utilizar la idea expuesta por García Cubero en su trabajo *“A la FIFA no le gustan las mates”*, publicado en el número 68 de la revista *Suma*+, para ver de un modo objetivo, utilizando unos sencillos cálculos matemáticos, quiénes deberían ser los ganadores de las *Botas de Oro, Plata y Bronce* en cada uno de los Mundiales de Fútbol que se han celebrado a lo largo de la historia. Además, comprueba en cuántas ocasiones los ganadores reales coinciden con nuestros ganadores objetivos.

Completa los cálculos un resumen histórico relativo a la *Copa Mundial de Fútbol* y a los premios que en ella se dan, distinguiéndose entre el *Balón de Oro del Mundial* y el de la revista *France Football*.

Puesta en marcha

Para comenzar su trabajo los alumnos buscaron información sobre la historia de la *Copa Mundial de Fútbol* y los premios asociados a ella. A continuación se expone una transcripción literal de su trabajo:

El primer Mundial de Fútbol fue jugado en el año 1930 en Uruguay y fue organizado por la FIFA. Desde entonces, se ha celebrado cada cuatro años a excepción de 1942 y 1946 que se suspendió debido a la Segunda Guerra Mundial.

De todos los Mundiales, ocho se han celebrado en América (Uruguay, Brasil, Chile, México, Argentina, México, EEUU y Brasil), diez en Europa (Italia, Francia, Suiza, Suecia, Inglaterra, Alemania, España, Italia, Francia y Alemania), uno en Asia (Corea del Sur y Japón, con sedes en los dos países) y otro en África (Sudáfrica).

Al finalizar el Mundial se entregan varios trofeos:

- *Al equipo ganador se le da el trofeo de Campeón del Mundo por cuatro años.*
- *El Premio al Juego Limpio es entregado al equipo con mejor disciplina de la competición.*
- *Individualmente:*
    - *El Balón de Oro se entrega al mejor jugador del torneo. También se entregan los Balones de Plata y Bronce al segundo y tercer clasificados en esta votación.*
    - *Se entrega la Bota de Oro al jugador que más goles haya conseguido meter. Normalmente, en caso de empate entre goleadores, se da el premio a todos los jugadores empatados. También se entregan las Botas de Plata y Bronce al segundo y tercer máximos clasificados en este ranking.*
    - *El Guante de Oro se otorga al mejor portero del torneo.*
    - *El premio al Mejor Jugador Joven se otorga al mejor jugador menor de 21 años. Existe desde el Mundial de 2006.*

El premio Balón de Oro, hoy entregado por la marca de material y prendas deportivas Adidas, es el que, como hemos explicado más arriba, se otorga al mejor jugador de cada edición de la Copa Mundial de la FIFA. Este reconocimiento se entrega desde el Mundial de Fútbol de 1982 (el Mundial celebrado en España). Durante el Mundial la FIFA elabora una lista de diez jugadores y los periodistas votan al que consideran mejor jugador del Mundial. El jugador con más votos gana el Balón de Oro.

Existe otro premio denominado Balón de Oro y es el que otorga la revista francesa France Football desde 1956. Este es un premio al mejor jugador inscrito cada año en algún campeonato de fútbol profesional europeo y es elegido por 96 periodistas especializados, cada uno de un país diferente. El jurado elige a los cinco mejores jugadores de una lista elaborada por la revista. Al primer jugador que elija cada periodista se le da 5 puntos, al segundo 4 y así sucesivamente. Sólo se concede un trofeo y es para el jugador con mayor puntuación en el cómputo global.

La Bota de Oro es otro premio que se otorga desde la Copa Mundial de Fútbol de 1982, bajo el nombre oficial de Bota de Oro Adidas. Desde los inicios del torneo, el título de goleador ha sido uno de los más codiciados y respetados, pero sólo en 1982 fue instituido oficialmente. Debido a los errores en los registros de los primeros torneos, existe discrepancia sobre las cifras de algunos jugadores, existiendo hasta el día de hoy dudas sobre la cantidad de goles anotados por Oldřich Nejedlý, Leônidas da Silva, Ademir y Dražan Jerković, entre otros. Ejemplo de ello es que solamente en noviembre de 2006, la FIFA reconoció oficialmente un quinto gol a Nejedlý, que lo dejó como único goleador de la Copa Mundial de Fútbol de 1934.

En la Copa Mundial de Fútbol de 2006 fueron además instituidos la Bota de Plata y la Bota de Bronce, para los jugadores en segundo y tercer lugar de la estadística de goleadores. Para esto, el criterio de selección se basa primeramente entre quien anota más goles, en segundo lugar por el mayor número de asistencias de gol y finalmente por quien menos minutos jugó.

Como indicamos antes, normalmente, cuando hay varios jugadores empatados al máximo número de goles conseguidos se les entrega a todos la Bota de Oro. No obstante, ha habido casos en los que esto no ha ocurrido, como el Mundial de 2010, el celebrado en Sudáfrica. En este Mundial hubo cuatro máximo goleadores y la FIFA, en lugar de dar cuatro Botas de Oro, decidió tener en cuenta las asistencias (cosa que nunca había hecho antes) y entregó la Bota de Oro a Müller.

Müller (Alemania)	*5 goles*	*3 asistencias*
Villa (España)	*5 goles*	*1 asistencia*
Snijder (Holanda)	*5 goles*	*1 asistencia*
Forlán (Uruguay)	*5 goles*	*0 asistencias*

La duda que surge con este criterio es la de cómo valorar las asistencias: ¿valen todas las asistencias o sólo las que acaban en gol? Ante esto, García Cubero ofrece un método objetivo para entregar la Bota de Oro: cuando hay varios máximos goleadores, deberíamos considerar el valor que tienen cada uno de esos goles dentro de cada partido.

Trabajo de los alumnos

Veamos, con un ejemplo extraído del trabajo de los estudiantes, qué método propone García Cubero.

Por ejemplo, en el mundial de 1934 Oldrich Nejedly marcó 5 goles y Edmund Conen y Angelo Schiavio marcaron 4 goles cada uno. Así, a Nejedly le corresponde la Bota de Oro. Veamos a quién le corresponde la Bota de Plata y a quién la Bota de Bronce siguiendo la propuesta de García Cubero.

En el partido Alemania – Bélgica el resultado fue 5 – 2. Los tres puntos que se jugaban en el partido fueron para Alemania. Los goles se marcaron en el siguiente orden:

Alemania – 5	*Bélgica – 2*
Stanislaus Kobierski 25'	
	Bernard Voorhoof 29'
	Bernard Voorhoof 43'
Otto Siffling 49'	
Edmund Conen 66'	
Edmund Conen 70'	
Edmund Conen 87'	

Realmente los dos últimos goles marcados por Edmund Conen no fueron necesarios para que Alemania ganase el partido; por tanto, los tres puntos del partido deberían repartirse entre Kobierski, Siffling y Conen, por lo que a cada jugador le correspondería 1 punto.

El siguiente partido en el que Conen marcó gol fue Austria – Alemania, cuyo resultado fue 2 – 3. Los goles se marcaron en el siguiente orden:

Austria – 2	*Alemania – 3*
	Ernest Lehner 1'
	Edmund Conen 27'
Johann Horvath 28'	
	Ernest Lehner 42'
Karl Sesta 54'	

En este caso, los tres goles de Alemania fueron necesarios para ganar los tres puntos del partido, así que dividimos esos tres puntos entre los tres goleadores del mismo y a cada uno le corresponde 1 punto.

Por tanto, Conen marcó 4 goles y, por ellos, le corresponden 2 puntos. Siguiendo a García Cubero, dividimos los puntos conseguidos entre los goles marcados y la puntuación de Conen es 0,5.

Hagamos el mismo estudio y los mismos cálculos para obtener la puntuación de Angelo Schiavio. El primer partido en el que marcó gol Schiavio fue Italia – EEUU y el resultado fue 7 – 1. El orden en el que se marcaron los goles fue el siguiente:

Italia – 7	*EEUU – 1*
Angelo Schiavio 18 min	
Raimundo Orsi 20'	
Angelo Schiavio 29'	
	Aldo Donelli 57'
Giovanni Ferrari 63'	
Angelo Schiavio 64'	
Raimundo Orsi 69'	
Giuseppe Meazza 90'	

Los únicos goles necesarios para que los tres puntos de partido fuesen para Italia son el primero de Schiavio y el primero de Orsi. Los otros cinco goles de Italia no fueron necesarios para que Italia ganase el partido. Por tanto, dividimos los tres puntos del partido entre Schiavio y Orsi, correspondiéndole 1,5 puntos a cada uno.

El siguiente partido en el que marcó gol Schiavio fue Italia – Checoslovaquia y el resultado fue 2 – 1. El orden en el que se marcaron los goles fue:

Italia – 2	*Checoslovaquia – 1*
	Antonin Puc 76'
Raimundo Orsi 81'	
Angelo Schiavio 95'	

En este caso, todos los goles de Italia fueron necesarios para que Italia se llevase los tres puntos del partido; por tanto, al repartir los tres puntos entre los dos goleadores, a cada uno le corresponde 1,5 puntos.

De este modo, Schiavio marcó 4 goles y, por ellos, le correspondieron 3 puntos. Si dividimos los tres puntos entre los 4 goles el resultado es que la puntuación de Schiavio es 0,75.

Por tanto, la Bota de Plata le corresponde a Angelo Schiavio y la Bota de Bronce a Edmund Conen. Este orden no coincide con el que aparece en http://www.losmundialesdefutbol.com, donde se reflejan los datos de todos los Mundiales con el permiso por escrito de la FIFA, según consta al final de la página web.

Este mismo mecanismo fue el que aplicaron los alumnos para todos los ganadores de Botas de Oro, Botas de Plata y Botas de Bronce en todos los mMndiales, incluso en los anteriores al de 1982. Los resultados con detalle pueden verse en el trabajo que se encuentra en el blog del departamento, señalado más arriba.

Conclusiones

Las conclusiones a las que llegaron fueron que, siempre que no haya futbolistas empatados a goles, la FIFA no se equivoca y entrega las Botas de Oro, Plata y Bronce de manera correcta y objetiva. Como cabría esperar, puesto que sólo hay que contar goles. Los problemas surgen cuando hay empates y la FIFA siempre los ha resuelto ordenando a los futbolistas en orden alfabético, salvo en el año 2010 cuando hubo cuatro futbolistas empatados a cinco goles y tuvo en cuenta las asistencias, pero sin distinguir las que acabaron en gol de las que no. Nunca ha dado más de tres premios, ya sean tres Botas de Oro, una de Oro y dos de Plata o dos de Oro y una de Plata. Por tanto, cuando ha habido jugadores empatados a goles, el orden alfabético ha hecho que los últimos jugadores no recibieran ni siquiera una mención en la web http://www.losmundialesdefutbol.com

Por otro lado, según el estudio realizado por los alumnos, la FIFA nunca ha considerado los goles marcados en las tandas de penaltis, aun cuando esos pudieron suponer que se clasificase un equipo y no otro. No obstante, sí se ha considerado los goles marcados en penaltis ocurridos en el tiempo de juego.

Finalmente, los alumnos añadieron un resumen de cómo los acontecimientos históricos se han ido reflejando en los Mundiales de Fútbol, sobre todo en lo que respecta a los equipos participantes en la fase final. Sus observaciones literalmente transcritas son:

> *Anteriormente señalamos que durante la Segunda Guerra Mundial no se celebraron Mundiales de Fútbol (1942 y 1946); pero, además, hemos visto que Alemania sólo ha faltado en dos Mundiales; el primero, celebrado en 1930, y en el de 1950, en el que seguramente no participó porque hacía sólo cinco años que había acabado la Segunda Guerra Mundial y estaban iniciando la reconstrucción del país. Después, desde 1954 hasta 1990, Alemania Occidental y Alemania Oriental participaron por separado. Al principio sería por las tensiones que comenzaban a existir entre el bloque comunista (URSS) y el bloque capitalista (EEUU), posteriormente esas tensiones se transformaron en una separación real materializada de forma muy evidente en Berlín con la construcción del conocido como Muro de Berlín, el 13 de agosto de 1961. Este Muro no fue derribado hasta el 9 de noviembre de 1989 y, con la caída de este símbolo de la Guerra Fría, se reunificaron las dos "Alemanias" participando desde entonces una única selección alemana. No obstante, en el Mundial de 1990 participó Alemania Occidental, puesto que las fases previas de clasificación la jugaron como tal selección. Hay que destacar que el único Mundial en el que Alemania Oriental llegó a la fase final fue el de 1974 y, como curiosidad, diremos que el 22 de junio se enfrentaron ambas selecciones resultando ganadora, por un gol a cero, Alemania Oriental.*

Saludo entre los capitanes de las dos "Alemanias",
antes del partido del Mundial de 1974.

En diciembre de 1991 la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) se derrumbó y fue disuelta; por eso, a partir de entonces ya no aparece la URSS como una selección clasificada para la fase final de los Mundiales y lo hace Rusia. Otros países que surgieron después de la disolución de la URSS aún no se han clasificado para la fase final de ningún Mundial.

Otro reflejo de la historia en los Mundiales es el caso de la República Socialista Federativa de Yugoslavia (estado yugoslavo de mayor duración, pues previamente había recibido otros nombres, aunque popularmente siempre fue llamada Yugoslavia), compuesta por Bosnia Herzegovina, Croacia, Eslovenia, Macedonia, Montenegro y Serbia. Este país participó como Yugoslavia en los Mundiales de 1930, desde 1950 a 1962, en 1974, en 1982 y 1990. A partir de 1991, debido a las Guerras Yugoslavas, este país se desintegró y el siguiente país llamado Yugoslavia, la República Federal de Yugoslavia, existió hasta 2003, cuando pasó a denominarse Serbia y Montenegro. Montenegro se separó de Serbia en 2006. Observando las selecciones clasificadas para la fase final de los Mundiales, en 1998 se clasificaron Croacia y la República Federal de Yugoslavia. En 2002 lo hicieron Croacia y Eslovenia. En 2006 se clasificaron Croacia y Serbia y Montenegro. En 2010 lo hicieron Eslovenia y Serbia, y en 2014 se clasificaron Bosnia Herzegovina y Croacia.

El caso de Checoslovaquia también se ve reflejado en los Mundiales. Esta república centro europea existió desde 1918 hasta 1992 cuando se escindió de común acuerdo y de forma pacífica, dando lugar a los dos países originales la República Checa y Eslovaquia. Así, Checoslovaquia participó en los Mundiales de 1934, 1938, desde 1954 a 1962, en 1970, 1982 y 1990. La República Checa ha participado en el Mundial de 2006 y Eslovaquia en el Mundial de 2010.

Bibliografía

- García Cubero, F. J. *A la FIFA no le gustan las mates*. Suma, nº 68. Noviembre 2011, pp. 11-15.
- http://www.losmundialesdefutbol.com
- http://es.wikipedia.org/wiki/Bal%C3%B3n_de_Oro
- http://es.wikipedia.org/wiki/Muro_de_Berl%C3%ADn
- http://es.wikipedia.org/wiki/Yugoslavia
- http://es.wikipedia.org/wiki/Uni%C3%B3n_Sovi%C3%A9tica
- http://es.wikipedia.org/wiki/Checoslovaquia

CONCLUSIÓN

Embarcarse en un proyecto de investigación similar a los presentados más arriba supone mucho esfuerzo, no sólo a los alumnos, también a los profesores que los dirigen. Es muy difícil conseguir que todos los miembros de grupo se impliquen del mismo modo y que llegue a buen puerto el proyecto.

No obstante, los beneficios que se obtienen al aplicar este tipo de metodología son muchos: los alumnos se vuelven más autónomos y les encuentran más sentido a las materias que normalmente estudian por separado; además, se hacen más organizados e incluso crean sus propias estrategias de aprendizaje.

Su interés por la materia en cuestión, en este caso matemáticas, aumenta del mismo modo que su autoestima. Algunas veces, su interés parte sólo del deseo de ganar un premio (porque van a participar en un concurso), pero después quieren conocer la solución del problema que están estudiando y eso se vuelve más importante.

En cuanto a los profesores, estos trabajos nos suponen un incentivo, un aliciente que nos saca de la rutina que supone dar siempre las clases del mismo modo y repetir año tras año el currículum. Trabajar por proyectos nos ofrece la oportunidad de comprobar hasta dónde son capaces de llegar nuestros alumnos, de resolver problemas reales, de aprender y/o inventar nuevos sistemas de evaluación; en definitiva, de hacer nuestro trabajo aún más pleno.