PRIMER ACERCAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA A ECUACIONES MEDIANTE LA TEORÍA APOE.

Cristian Gonzalo Camacho Ruiz – Lennin David López Castañeda
cristiangcamachor@gmail.com – yiret24@gmail.com
Academia Militar Mariscal Sucre (Colombia)

Tema: Pensamiento algebraico.
Modalidad: C. B.
Nivel educativo: Primaria (6 a 11 años).
Palabras clave: Álgebra, APOE, Didáctica, Ecuación.

Resumen

El presente texto muestra una investigación que trabaja la enseñanza-aprendizaje de aspectos asociados al primer encuentro de estudiantes de básica primaria con ecuaciones simples, desde un análisis teórico (apoyado en la teoría APOE) que parte de una descomposición genética del objeto ecuación y brinda los primeros indicios de las construcciones mentales que poseen y logran construir los estudiantes, luego se complementa con un parte de diseño e implementación de actividades en el aula con el ciclo de enseñanza ACE. Como la base es una investigación sobre la propia práctica del docente, se trata de un primer avance en este campo, lo que implica un estudio abierto a cualquier persona que requiera ampliarlo y/o complementarlo.

Presentación del problema.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas escolares, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), busca que los estudiantes de educación básica desarrollen competencias en relación a la construcción de igualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos, así mismo busca que los estudiantes representen y relacionen patrones numéricos con tablas y reglas verbales.

Por ello, en el ciclo de 4º y 5º grado, se hace necesario vincular objetos matemáticos que trabajen dichos procesos, uno de ellos es ecuación simple, ya que este es un objeto que se relaciona con lo que diferentes psicólogos han considerado como procesos de simbolización, abstracción y generalización, que puede ser apropiado para muchos de los alumnos de primaria (Godino & Font, 2003). Pero al abordar la enseñanza y el aprendizaje en la escuela del concepto de ecuación se presentan algunas dificultades iniciales del algebra, tal como las definen Camacho, Hernández, Palarea & Socas (1996):

- La naturaleza y significado de los símbolos y las letras
- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra
- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes
- El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos (algoritmos).

En complemento a lo anterior, surge otra dificultad centrada en el proceso de enseñanza que realizan los profesores de matemáticas donde prevalece la ejercitación sin reflexión, por ello, Azcárate, Casadevall, Casellas & Bosch (1996) afirman que los estudiantes son capaces de realizar ciertos ejercicios sin comprender el significado de ecuación.

De acuerdo a todo lo anterior, se observa una confrontación entre lo que debe ser aprendido-enseñado en la escuela y lo que realmente se da gracias a las dificultades descritas, por ello se hace necesario identificar la comprensión que logran los estudiantes de primaria en relación a los procesos de interpretación y solución de ecuaciones simples (lineales), por ello surge la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuál es la primera caracterización de ecuaciones que logran desarrollar los estudiantes de básica primaria dentro de las fases de: análisis teórico y tratamientos de instrucción de la teoría APOE?*

Marco de Referencia Conceptual.

Esta investigación toma como referencia la teoría APOE, por ello para Asiala, Brown, De Vries, Dubinsky, & Mathews (2004) en la teoría APOE, se indica que:

> El conocimiento matemático de un individuo es la tendencia a responder a situaciones problema percibidos por la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y por la construcción o reconstrucción de las acciones matemáticas, procesos y objetos y la organización de éstos en esquemas para utilizar en el tratamiento de las situaciones (p.7).

Además, se indica que comprender en matemáticas, específicamente el concepto de ecuación consiste en crear construcciones mentales que actúen sobre situaciones problemas. También, se hace importante (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, & Mathews, 2004) para mejorar el conocimiento agregar la reflexión como aquel proceso de tener una atención consciente a las operaciones que se realizan.

En busca de esa reflexión Godino & Font (2003) brindan una definición que podría ayudar en la comprensión por parte de los estudiantes sobre ecuaciones, esta empieza con la importancia de las igualdades y el signo igual (=), así que el signo "=" indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, y lo que se encuentra a la derecha, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo, designando así la igualdad y la idea básica de esta definición radica en observar que cuando la igualdad es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se dice que se trata de una ecuación.

Complementando lo anterior Godino & Font (2003) afirman que muchos de los problemas que han de resolver los alumnos de primaria consisten en hallar un número desconocido que cumpla ciertas condiciones. La formulación de esta pregunta suele ser en forma de enunciado, pero también se utiliza un lenguaje simbólico del tipo:

$7 + \bullet = 20$

Por otra parte, el análisis teórico que busca como resultado llegar a una descomposición genética de dicho concepto (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, & Mathews, 2004). Es decir, la descomposición genética de la ecuación como igualdad verdadera solo para algunas variables (incógnitas), es el conjunto estructurado de construcciones mentales que deben describir cómo se podría desarrollar este concepto en la mente de los estudiantes por ello es importante definir acciones, procesos, objetos y esquemas:

Acciones: de acuerdo con Cottrill et al. (1996) las acciones son transformaciones físicas o mentales de algún objeto para convertirlo en otro objeto, pero estas transformaciones se presentan como reacción a algo externo, de esta manera puede ser un paso simple para dar una respuesta, un reflejo físico, etc., en general son conocimientos algorítmicos sin reflexión y es un conocimiento muy limitado ya que no muestran un control de lo que se trabaja.

Procesos: de acuerdo con Asiala, Brown et al. (2004) los procesos suceden cuando se repite una acción y el estudiantes adquiere la capacidad de reflexionar, describir, coordinar con otros procesos o incluso revertir los pasos de la transformación sobre ello y logra tomar el control, sin necesidad de actuar como respuesta a estimulaciones externas.

Objetos: según Alvarenga (2006) los objetos son reconstrucciones de los procesos ya que implican reflexionar sobre las transformaciones (acciones y procesos) como un todo que estructurado conforma objetos cognitivos, se tiene una buena comprensión del objeto matemático y se puede construir, reconstruir, transformar y especificar dicho objeto de manera interna y en algunos casos sin llegar a hacer uso de ejemplos específicos, sino únicamente tratando el concepto en general.

Esquemas: de acuerdo con Asiala, Brown et al. (2004) un esquema es una colección de procesos y objetos que se organizan de forma estructurada, dichos esquemas pueden ser tratados como objetos y se unen o coordinan con otros esquemas para conformar esquemas de mayor nivel. Para trabajar dichos esquemas se propone seguir lo que indica DeVries (2001, citado en Aldana, 2011) con ello se trabajan 3 niveles, los cuales se denominan intra, inter y trans y lo que diferencia el estar o no en algún nivel no es por el aumento de conocimiento sino por la capacidad de reestructuración y adaptación a un nuevo esquema mental que logra cada individuo al desarrollar cada concepto asociado al concepto ecuación.

Metodología:

La teoría APOE de acuerdo con Asiala, Brown et al. (2004) muestra un esquema para el desarrollo de la investigación, se habla de un ciclo con tres fases importantes, 1- el análisis teórico, 2- tratamientos de Instrucción & 3- evaluación y resultados. El presente artículo trabaja las dos primeras fases con un diseño realizado por el docente, con la intención de aplicarlo en estudiantes de grado 5º.

Además se tiene en cuenta los aspectos comunes de las investigaciones de tipo cualitativo, entre ellos la recolección de información dentro y fuera de los salones de clase. Por ultimo cabe mencionar que las acciones, procesos, objetos y esquemas conforman una espiral que va subiendo de nivel a medida que se llega a construcciones mentales más complejas, cada vez agregando nuevos objetos a esquemas con estructuras cada vez más amplias, pero en este trabajo simplemente se trata de analizar el primer acercamiento que logran tener los estudiantes al concepto y desarrollo de ecuaciones.

Análisis De Datos.

1. El análisis teórico. Este análisis se realiza con el objetivo de describir construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para desarrollar o entender el concepto de ecuación a partir de su primer acercamiento en la escuela. Para empezar las construcciones mentales y la descomposición genética del concepto ecuación es importante definir acciones, procesos, objetos y esquemas, que se presentan antes de trabajar el concepto en clase, a modo de ejemplo:

Ejemplos de *acciones* en las ecuaciones:

- Encontrar el valor de una incógnita reemplazando algún número al azar en alguna ecuación.
- Realizar un proceso de aproximación sin identificar el patrón o regla que permite de manera efectiva (en pocos pasos) encontrar dicha incógnita.

Ejemplos de *procesos* en las ecuaciones:

- Evaluar valores exactos para encontrar un patrón o regla para determinar el valor de la incógnita (esto guiado con algún tipo de pensamiento aritmético, algo (incógnita) más 10 es igual 15 ¿Qué hacer para saberlo?).
- Realizar procesos exactos que recurran a procesos de generalización para entender el concepto de ecuación, por ejemplo el manejo de las operaciones en la solución de una ecuación.

Ejemplos de *objetos* en las ecuaciones:

- Se logra observar el valor de la incógnita como la única solución verdadera detrás de un proceso de generalización guiado por equivalencias, en el cual se identificó algún tipo de patrón o regla que permitió encontrarlo, además posee un buen significado de las operaciones que llevaron consigo a la solución de la ecuación.

Pensar en forma de *esquemas* sobre las ecuaciones implica una comprensión muy cercana del concepto propio de ecuación y además permite observar este concepto en varias representaciones y sobre todo permite su aplicación en la búsqueda de solucionar situaciones problema que se presenten, pero cabe decir que ningún estudiante logro tal manejo de este concepto en este primer acercamiento con grado 5º, en si se trata de los comienzos del algebra y de seguro un buen dominio del tema se logra con mayor tiempo.

2. Tratamientos de instrucción. Con el primer boceto del análisis teórico presentado anteriormente se definen las actividades para llevar al aula en primaria (Chamorro, 2003) y que son planeadas con ACE ciclo de enseñanza (Actividades, discusiones de Clase y Ejercicios), de esta manera, se llevan las actividades al colegio y se genera la reflexión por parte del profesor en busca de lograr una primera comprensión del concepto de ecuación en los estudiantes de grado 5º (Grupo, 1993). Dentro de las actividades enmarcadas en el ciclo ACE, se propusieron discusiones de clase a partir de actividades como las que proponen Camacho et al. (1996):

Actividades de amontonar boliches:

- **Objetivos:** Traducir el lenguaje habitual al lenguaje algebraico.
  Usar las letras como incógnitas.
  Establecer igualdades de cantidades. Formular ecuaciones.
  Utilizar el álgebra como herramienta para probar situaciones.
- **Actividades:** Un montón tiene a boliches. Expresa el número de boliches que hay en el segundo montón sabiendo que:
  1. Hay doce boliches menos que en el primero.
  2. Hay siete veces más que en el primero.
  3. Hay la sexta parte de boliches que en el primero, etc.
- **Actividad 1:** Escribir la igualdad de las dos cantidades sabiendo que hay dos montones. El primero tiene doble que el segundo. Y en total hay 24 boliches.

1.er montón	2.º montón	Total
$2a$	a	24

$$2a + a = 24$$

- **Actividad 2:** Escribir la igualdad de las dos cantidades sabiendo que hay tres montones. El primero tiene 3 boliches más que el segundo. El tercero tiene el doble de boliches que el primero. En total hay 29 boliches.

1.er montón	2.º montón	3.er montón	Total
$(a + 3)$	a	$2(a + 3)$	29

$$(a + 3) + a + 2(a + 3) = 29$$

Ilustración 1: Actividad iniciación al algebra

Así que con estos tratamientos de instrucción se intenta generar su propio conocimiento matemático a través de la reflexión sobre la resolución de problemas en un contexto social (empezando por la escuela), tal como lo describe la teoría APOE.

A continuación se presentan algunos ejemplos de pensamientos escritos por estudiantes de 5º y que de alguna manera explican sus comprensiones sobre algunas ecuaciones.

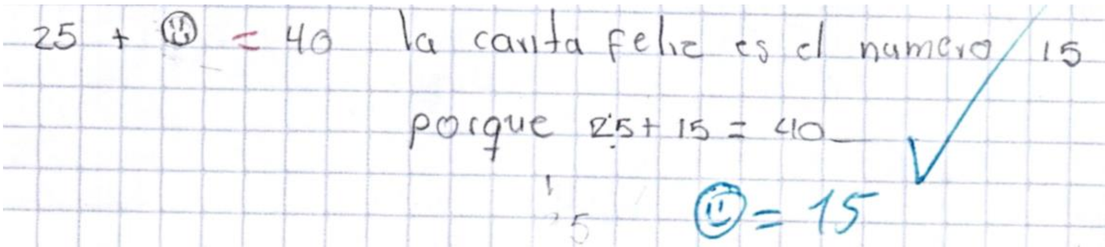

Ilustración 2: Ejemplo de un PROCESO en el tratamiento de la ecuación evaluando un valor exacto que es el valor de la incógnita

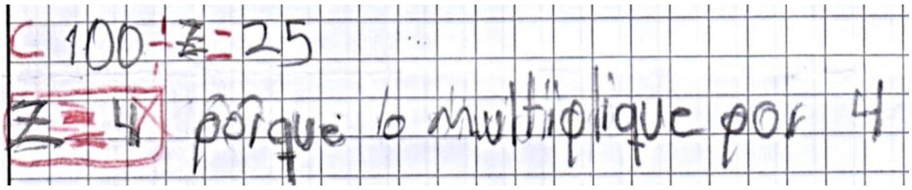

Ilustración 3: Ejemplo de un PROCESO en el tratamiento de la ecuación evaluando un valor exacto que es el valor de la incógnita

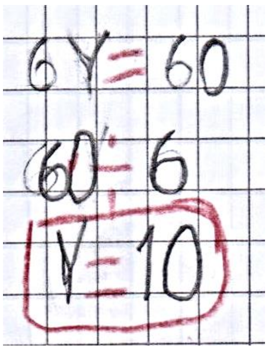

Ilustración 4: Ejemplo de un OBJETO en la solución de la ecuación, el estudiante encuentra el valor de la incógnita como la única solución verdadera detrás de un proceso de generalización guiado por equivalencias

Conclusiones.

Lograr la comprensión de un objeto matemático es una labor ardua y requiere ser complementada por medio de la práctica misma del profesor de matemáticas, es por ello que se afirma que lo presentado es un trabajo en desarrollo y aún no concluye, sin embargo deja abierta la posibilidad para aportar en las investigaciones de la teoría APOE, específicamente la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones.

A modo de conclusión parcial, se observa la utilidad de pensar en formas alternas de trabajar los objetos matemáticos dentro del aula, comenzando por la solución de problemas puramente matemáticos hasta una construcción que solo se logra a partir de contextos sociales, por ejemplo las discusiones que se dan en clase al trabajar con una balanza (representando la igualdad entre dos objetos) o al intentar saber la edad de alguien cuando no se tiene el dato exacto, pero ayudados de otra información se logra averiguar, determinando un valor exacto en ese proceso de relaciones inmersas en las ecuaciones, permitiendo que el objeto matemático ecuación sea considerado como un objeto propio y no como un conjunto de letras y números sin utilidad.

Con esto se puede indicar que el primer acercamiento que tienen los estudiantes de grado 5º al concepto de ecuación en promedio conlleva a que la mayoría de estudiantes solo conformen acciones o procesos algo básicos, pero igualmente importantes para ser tenidos en cuenta en el estudio del desarrollo de estos conceptos, una pequeña parte de la población logran reconocer y desarrollar algunos objetos en su comprensión de las ecuaciones y ningún estudiante con su primer acercamiento logra desarrollar esquemas en este aprendizaje.

Bibliografía

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, Salamanca.

Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de jovenes universitarios*. Tesis de Doctorado, Intituto Politécnico Nacional.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., & Mathews, D. (2004). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Platteville (Wisconsin): RUMEC series.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Sintesis.

Camacho, M., Hernández, J., Palarea, M., & Socas, M. (1996). Errores en álgebra. En M. Camacho, J. Hernández, M. Palarea, & M. Socas, *Iniciación al álgebra* (págs. 96-110). Madrid: Sintesis.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Devilyna, N., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). *Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema*. Journal of Mathematical Behavior.

Godino, J., & Font, V. (2003). Conocimientos matemáticos. En J. Godino, & V. Font, *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros* (págs. 774-787). Granada: ReproDigital.

Grupo, A. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Sintesis.

MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.