ANALISIS DE ALGUNAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE EN UN TEMA DE ÁLGEBRA EN ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Autores: Oliver,M.;Vecino,S.;Rocerau,C.;Valdez,G.;Medina,P.;Astiz,M.;Vilanova,S.
Institución: Universidad Nacional de Mar del Plata. República Argentina
Dirección electrónica: moliver@mdp.edu.ar, susana@mdp.edu.ar

Nivel educativo: Universitario
Palabras Clave: Dificultades- Aprendizaje – Conjuntos-Universidad

RESUMEN

El presente trabajo, de carácter exploratorio, es parte de una investigación más amplia tendiente a detectar las dificultades más frecuentes en el aprendizaje del Álgebra en el primer año de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática, indagar posibles causas y proponer alternativas de solución. A tal efecto se da tratamiento a las respuestas obtenidas por parte de los alumnos en dos actividades sobre Conjuntos, tema inicial de la asignatura, las que han sido analizadas cualitativamente. Por otro lado, se administró un cuestionario de datos personales y laborales a los alumnos participantes. Se presenta aquí una descripción de las dificultades detectadas con mayor frecuencia.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de conceptos no es algo sencillo. Cada concepto, incluso aquellos en apariencia simples, están circundados de un entorno fluctuante y complejo de representaciones asociadas que comportan múltiples niveles de formulación y de integración.
La construcción de conceptos matemáticos en particular requiere, no sólo de la capacidad de representarlos, de tratar con estas representaciones y de convertirlas a registros diferentes, sino también de concebirlos incluidos en sistemas y comprender el juego de transformaciones internas que estos sistemas permiten (D´Amore, 2005).
Desde un punto de vista cognitivo, el desarrollo del conocimiento implica tres fases recurrentes (Karmiloff-Smith, 1994). En la primera fase, si bien los que aprenden son capaces de resolver ejercicios utilizando sus representaciones, éstas no se encuentran relacionadas entre sí en la estructura cognitiva y se observan dificultades para verbalizarlas y expresarlas en lenguaje simbólico. En la segunda fase, se redescriben internamente las representaciones dándoles otro formato, ya no tan centrado en los datos externos, ya que es la dinámica interna la que controla la situación, pudiendo ocurrir que ese descuido de los datos externos los conduzca, eventualmente a incurrir en nuevos errores. Es en la tercera fase, donde se alcanza un equilibrio entre la búsqueda del control interno y el externo. Aprender un determinado concepto, entonces, es un proceso gradual que comprende desde las primeras manifestaciones implícitas de la presencia de dicho concepto en el alumno, hasta sus formas más explícitas que incluyen su verbalización y simbolización. Enseñar, por lo tanto, no consiste sólo en proporcionar información sino que implica guiar al alumno hacia la modificación del tipo de representaciones y procesos desde los que aborda los problemas y situaciones a las que se enfrenta.
El aprendizaje del álgebra, requiere que el alumno transite las tres fases del proceso de redescripción representacional ya que debe ser capaz, no sólo de pensar *en* las teorías, sino también de pensar *con* las teorías para demostrar, argumentar, interpretar simbólicamente, etc. Esto implica la utilización de habilidades que van más allá del contenido en sí (la demostración, por ejemplo, tiene un significativo valor educativo y cumple con una función formativa esencial).
Desde un punto de vista matemático, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra requieren de rigor y precisión en el lenguaje. Tal como lo expresa Gentile (1973) refiriéndose a los docentes, en el prólogo de su libro Notas de Algebra I: *"(…) se hacen afirmaciones, se enuncian*

propiedades, se definen cosas, se hacen demostraciones, se dan ejemplos y contraejemplos. Es claro que para que nuestra labor tenga un desarrollo feliz debemos lograr que todas las formulaciones se hagan con la máxima precisión". En la escuela secundaria, los conocimientos y habilidades en Matemática son, en general, incorporados sin un desarrollo riguroso del lenguaje matemático, destacándose más los aspectos operativos y manipulativos mientras que en el nivel universitario se incorporan utilizando el lenguaje matemático formal como principal medio de presentación, por lo que los alumnos deberán establecer con los objetos matemáticos, relaciones diferentes a las establecidas en la escuela media.
Investigaciones previas (Movshovitz-Hadar et al, 1995) han permitido clasificar los errores más frecuentes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática en 6 categorías: a) *Datos mal utilizados* (producidos por una discrepancia entre los datos y el tratamiento que les da el alumno); b) *Interpretación incorrecta del lenguaje* (traducción incorrecta de hechos matemáticos de un lenguaje simbólico a otro); c) *Inferencias no válidas lógicamente* (debido a falacias de razonamiento y no al contenido específico); d) *Teoremas o definiciones deformados* (deformación de un principio, regla o definición identificable); e) *Falta de verificación de la solución* (los pasos son correctos pero el resultado no) y f) *Errores técnicos* (errores de cálculo, al tomar datos, al manipular símbolos algebraicos, etc.).

PLANTEO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

En los últimos años, se ha observado un marcado incremento de las dificultades en el aprendizaje del Álgebra en el primer año de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata, lo que ocasiona un bajo porcentaje de aprobación de las cursadas y un alto índice de deserción o migración a otras carreras o instituciones.
Desde el punto de vista curricular, los alumnos de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática cursan en el primer cuatrimestre del primer año, según el plan de estudios vigente, tres asignaturas: Algebra Lineal I, Cálculo I y Algebra.
Las dos primeras son compartidas con las otras carreras de la Facultad (Física, Química y Biología), por lo que están estructuradas de modo tal de introducir al alumno al cálculo, mientras que Álgebra, es la que deberá formarlos en los conceptos básicos de Lógica, en los métodos de demostración y en la caracterización y las propiedades de los conjuntos numéricos.
El presente trabajo, de carácter exploratorio, constituye la primera etapa de una investigación más amplia sobre el aprendizaje del Algebra para el primer año de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática. Está basado en el análisis de los errores y dificultades más frecuentes de los alumnos en el tema Conjuntos, con el que se inicia el programa de la asignatura, a fin de indagar sus posibles causas.

METODOLOGÍA

Tipo de estudio
Se desarrolló un estudio transversal, de tipo exploratorio-descriptivo.
Participantes:
Los datos analizados aquí corresponden a alumnos de la cohorte 2008 de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNMDP.
Instrumentos
a. Actividades 1a y 1b.
La primera actividad (1.a) involucra la interpretación de la definición de Conjunto de Partes. La segunda (1.b) presenta una implicación cuyo antecedente es una conjunción ($p \wedge q$) y su consecuente es una igualdad entre conjuntos, que se demuestra mediante dos inclusiones.
El enunciado de las actividades analizadas, escrito en lenguaje matemático formal, que es el utilizado en la asignatura, fue el siguiente:

Probar las siguientes propiedades de conjuntos;

1.a) $P(B-A) \subset \left(P\left(B\right)-P\left(A\right)\right) \cup \{\varnothing\}$

1.b) Si para algún conjunto C, $C \cup A = C \cup B \quad y \quad C \cap A = C \cap B \Rightarrow A = B$

Como puede verse, estas actividades, involucran conceptos de *operaciones entre conjuntos* y *conjunto de partes* y por tratarse de alumnos que cursan el profesorado y/o la licenciatura en Matemática, resultan de especial importancia por la necesidad de la demostración. Ambas se corresponden con un clásico problema por demostrar (Polya, 1979) y requieren para su resolución las operaciones básicas entre conjuntos.

Estas actividades fueron administradas a los alumnos junto con el primer parcial de la asignatura.

b. Cuestionario de datos personales y laborales

Al comenzar la cursada, se administró un cuestionario a todos los alumnos con la finalidad de recolectar información sobre su historia escolar previa, su situación laboral, los motivos de elección de carrera y sus hábitos de estudio ya que consideramos que todas estas cuestiones podrían, de alguna manera, ser factores importantes en el desempeño de los alumnos. La versión completa del instrumento se presenta en el Anexo.

RESULTADOS

a. Actividades 1*a* y 1*b*:

El análisis global de la corrección de las dos actividades propuestas se muestra en el cuadro de la derecha:

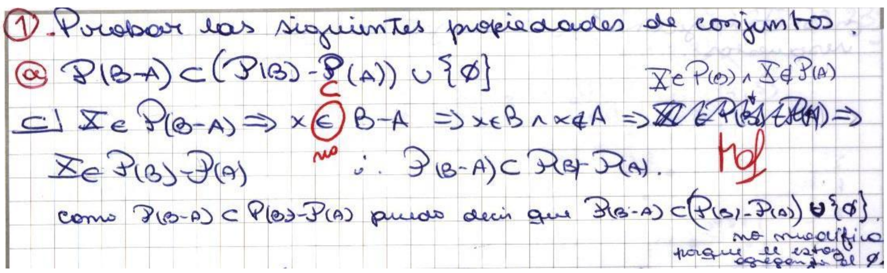
Actividad	1*a*	1*b*
No resuelve	0	0
Resuelve Mal	11	8
Regular	1	2
Correctamente	0	2

Las dificultades detectadas con mayor frecuencia fueron las siguientes:

En la actividad 1-a)

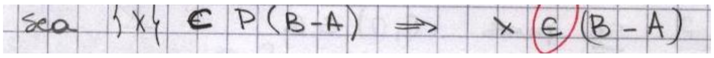
Los once alumnos que resolvieron mal este ítem mostraron, con distintos matices, dificultades relativas a la interpretación de la implicación $X \in P(A) \Rightarrow X \subset A$

Por ejemplo, en el siguiente desarrollo extraído de una de las evaluaciones, se muestra el error cometido por cinco de los alumnos:

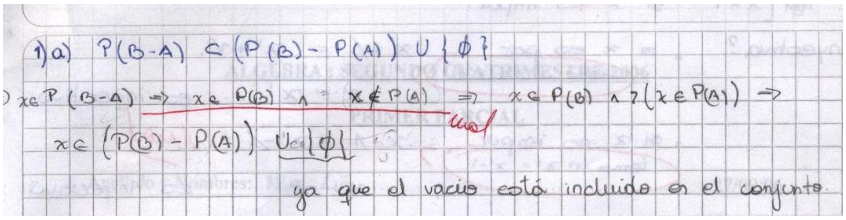

① Probar las siguientes propiedades de conjuntos.
ⓐ $P(B-A) \subset (P(B) - P(A)) \cup \{\varnothing\}$ $X \in P(B) \wedge X \notin P(A)$
$\subset)$ $X \in P(B-A) \Rightarrow X \in B-A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow$ ~~$X \in P(B) \wedge X \notin P(A)$~~ $\Rightarrow$
$X \in P(B) - P(A)$ no $\therefore P(B-A) \subset P(B) - P(A)$.
como $P(B-A) \subset P(B)-P(A)$ puedo decir que $P(B-A) \subset (P(B)-P(A)) \cup \{\varnothing\}$
no modifica porque el estoy agregando el $\varnothing$.

El alumno parece advertir que no es posible que X ∈ *P (B-A)* y a su vez X ∈ (*B-A*), y, tal vez por no saber cómo salir de esa situación, recurre a modificar el tamaño de X para convertirlo en un elemento de (*B-A*).

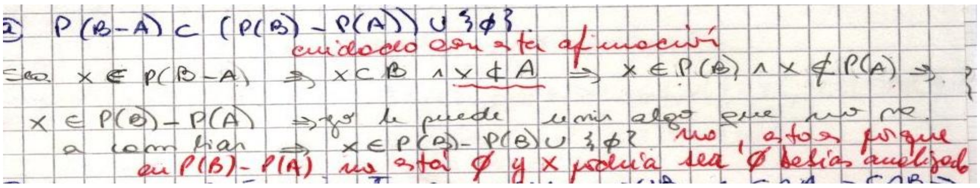
En una entrevista informal con el alumno, pudimos comprobar que esto fue así, con lo cual queda en evidencia que no interpreta el rol de X en cada caso. La noción de pertenencia elemento-conjunto y la de inclusión entre conjuntos no ha sido incorporada. Algo similar ocurre con otros casos en los que encontramos la siguiente expresión:


Sea $\{x\} \in P(B-A) \Rightarrow x \in (B-A)$

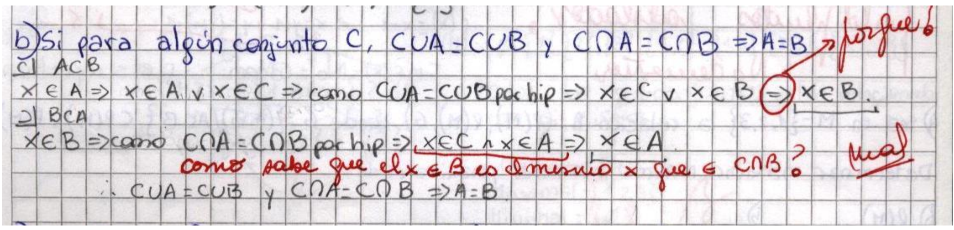
También se registró la aplicación de la propiedad distributiva al conjunto de partes de una diferencia entre conjuntos:


1)a) $P(B-A) \subset (P(B) - P(A)) \cup \{\emptyset\}$
$x \in P(B-A) \Rightarrow x \in P(B) \wedge x \notin P(A) \Rightarrow x \in P(B) \wedge \neg(x \in P(A)) \Rightarrow$ mal
$x \in (P(B) - P(A)) \cup \{\emptyset\}$
ya que el vacío está incluido en el conjunto

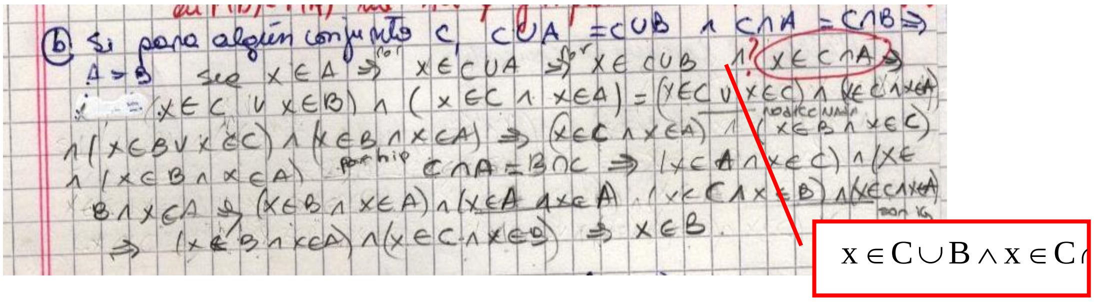
¿Trasladan la definición de diferencia entre conjuntos al conjunto de partes de una diferencia? ¿Utilizan lo que deben demostrar como parte de la demostración?
En el siguiente caso, se consideró que el ejercicio está regular pues, si bien el alumno manifestó en la entrevista interpretar la implicación X $\in$ *P (A)* $\Rightarrow$ X $\subset$ *A*, trabaja mal el significado de X $\subset$ (B – A):


2) $P(B-A) \subset (P(B) - P(A)) \cup \{\emptyset\}$
cuidado con esta afirmación
Sea $x \in P(B-A) \Rightarrow x \subset B \wedge x \not\subset A \Rightarrow x \in P(B) \wedge x \notin P(A) \Rightarrow$
$x \in P(B) - P(A) \Rightarrow$ yo le puedo unir algo que no me la cambian $\Rightarrow x \in P(B) - P(B) \cup \{\emptyset\}$ no, está porque en $P(B) - P(A)$ no está $\emptyset$ y x podría ser $\emptyset$ debías analizar

En la actividad 1-b)
Esta actividad la resolvieron bien dos alumnos, y otros dos obtuvieron un regular por haber demostrado sólo una inclusión (A $\subset$ B). Los otros ocho casos mostraron serios problemas en la utilización del valor de verdad de una disyunción, considerando verdadero sólo el caso que les resulta favorable para la inclusión que deben probar e ignorando los otros casos posibles como se ilustra a continuación:


b) Si para algún conjunto C, $C \cup A = C \cup B$ y $C \cap A = C \cap B \Rightarrow A = B$ ¿porque?
c) $A \subset B$
$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in C \Rightarrow$ como $C \cup A = C \cup B$ por hip $\Rightarrow x \in C \vee x \in B \Rightarrow x \in B$.
⊇) $B \subset A$
$x \in B \Rightarrow$ como $C \cap A = C \cap B$ por hip $\Rightarrow x \in C \wedge x \in A \Rightarrow x \in A$
como sabe que el $x \in B$ es el mismo x que $\in C \cap B$? mal
$\therefore C \cup A = C \cup B$ y $C \cap A = C \cap B \Rightarrow A = B$

La hipótesis y la tesis son las partes principales de un “*problema por demostrar”* y una pobre o escasa identificación de las mismas deriva en errores del tipo siguiente:



b. Cuestionario de datos personales y laborales.

Ya que el cuestionario proporcionado a los alumnos, tuvo como objetivo aportar más datos sobre las causas del fracaso de ellos en su primer año de estudios, sólo haremos un comentario sobre las cuestiones que consideramos más relevantes. El análisis de las respuestas nos permite observar que:

- La carencia de habilidades de estudio previas agudiza las dificultades, esto puede verse en los ítems referidos a la forma de estudio, ya que son muy pocos los que leen las teorías antes de resolver las prácticas y son muchos los que no asisten a las teorías y/o a las prácticas.
- Son muchos los que contestan afirmativamente a la pregunta ¿trabaja?, lo que, sin duda, resta muchas horas a su tiempo de estudio

CONCLUSIONES

El análisis de los datos obtenidos permite ver que:

- Desde el *punto de vista cognitivo*, los resultados expresan que la mayoría de los alumnos son capaces de repetir, posiblemente de manera memorística, una definición, pero en las producciones escritas las aplicaciones resultan erróneas. Esto podría estar indicando que se encuentran en la primera fase de la redescripción representacional, y que la segunda fase –instancia en la que el alumno internamente redescribe sus representaciones dándole otro formato –no ha sido completada.
- *Las dificultades en la utilización del lenguaje formal,* producen errores en la construcción y en la interpretación de los conceptos matemáticos y obstaculizan la comunicación. Si bien los alumnos, como ya se ha expresado, se enfrentan a estas cuestiones por primera vez en la Universidad, las mismas fueron trabajadas en clase mediante problemas y tipos de enunciados similares, lectura, interpretación y uso del lenguaje conjuntista y de los elementos de la lógica formal que subyacen a las operaciones entre conjuntos. No obstante, en el análisis de la producción de los alumnos se detectan principalmente errores vinculados a las primeras cuatro categorías planteadas por Movshovitz-Hadar et al (1995): datos mal utilizados o lectura incorrecta del enunciado, interpretación incorrecta del lenguaje, inferencias no válidas lógicamente y teoremas o definiciones deformados.
- En base a los *datos personales obtenidos mediante el cuestionario* que se presenta en el Anexo, puede observarse, además, que existen dificultades de adaptación al sistema universitario, en el que encuentran un escenario diferente al de la escuela media: mayor libertad, falta de un seguimiento personalizado y cambios en la modalidad del dictado de las

clases. Se nota también la falta de estrategias y hábitos de estudio adecuados y en algunos casos, falta de tiempo por razones laborales o de otra índole.

En general, vemos una multiplicidad de factores que inciden en el aprendizaje en esta asignatura y pueden ser causas probables de las dificultades que se repiten año a año. El alumno que comienza a cursar Algebra en el primer año de las carreras de Matemática de la Facultad, no suele contar con el bagaje de estrategias cognitivas, recursos matemáticos y hábitos de estudio necesarios para el aprendizaje en el nivel universitario. Esta situación se ve agravada, en algunos casos, por situaciones laborales o personales que impiden dedicarle al estudio el tiempo necesario.

CONSIDERACIONES FINALES Y PASOS FUTUROS

El aprendizaje de la matemática en general y del álgebra en particular, requiere de la interrelación de distintos factores, algunos de los cuales hemos mencionado al comienzo de este trabajo: estrategias cognitivas apropiadas, un determinado nivel de desarrollo cognitivo, manejo de recursos matemáticos adecuados a los problemas a resolver, metodologías de enseñanza que favorezcan el desarrollo de una actitud matemática, etc. Otros factores externos como situaciones personales o laborales, contenidos y planes de estudio también repercuten en los resultados de aprendizaje obtenidos.

El análisis de las dificultades de los alumnos que hemos realizado requiere sin duda una mayor profundización pero permite, sin embargo, abrir algunos interrogantes sobre el rol docente en estas asignaturas: ¿conocemos los recursos de que disponen nuestros alumnos, es decir, la naturaleza del conocimiento matemático que tienen a su disposición? Si se considera que un concepto se ha adquirido en un dominio cuando se ha desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas y las necesarias relaciones funcionales entre ellas, ¿estamos contribuyendo con actividades adecuadas, con propuestas de situaciones diferentes para desarrollarlas? ¿formamos a los alumnos en la tenacidad, la perseverancia, el esfuerzo y la constancia en el proceso de resolución de un problema, para contribuir al logro de cierta independencia? Respecto a los planes de estudio, ¿tenemos en cuenta si se está perjudicando el nivel de formación de nuestros futuros docentes de Matemática en pos de atender a las necesidades de otras carreras?

Si bien todos estos interrogantes están abiertos, son muchos y muy amplios, la profundización en el análisis de las dificultades detectadas y la discusión de modificaciones conducentes a lograr respuestas a estas situaciones son los pasos que siguen.

ANEXO

APELLIDO Y NOMBRES:…………………………………………………………	
EDAD: ……………	AÑO DE EGRESO DE LA ESCUELA MEDIA:…………..
ESCUELA DE PROCEDENCIA: ……………………………………	AÑO DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD: …………………………………..
CARRERA(S) QUE CURSA: PROF. EN MATEMÁTICA ☐	LIC. EN MATEMÁTICA ☐
MOTIVO DE ELECCIÓN DE LA CARRERA:…………………………………….. ……………………………………………………………………………………	
¿REGISTRA ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **COMPLETOS** ANTERIORES? NO ☐ SI ☐ → ¿CUÁLES?..	
¿REGISTRA ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **INCOMPLETOS** ANTERIORES?	

NO ☐ SI ☐ → ¿CUÁLES?..	
¿APROBÓ LA CURSADA DE ALGUNA MATERIA DE LA CARRERA EL AÑO ANTERIOR?	
NO ☐ SI ☐ → ¿CUÁL/ES?..	
¿ES RECURSANTE DE ESTA ASIGNATURA?: NO ☐ SI ☐ → ¿EN QUÉ MOMENTO DEJÓ LA MATERIA?: AL INICIO ANTES DEL PRIMER PARCIAL DESPUÉS DEL PRIMER PARCIAL ¿POR QUÉ MOTIVO?..	
¿TRABAJA?: NO ☐ SI ☐ → ¿CUÁNTAS HORAS DIARIAS?.	
EN CUANTO A SU FORMA DE ESTUDIO:	
¿QUÉ MATERIAS CURSA ESTE CUATRIMESTRE? ………………………………………...	¿CUÁL(ES) DE ELLAS LE PRESENTA(N) MAYOR DIFICULTAD y POR QUÉ? ………………………………………………. ………………………………………………
FUERA DE LA UNIVERSIDAD, ¿CUÁNTAS HORAS SEMANALES DEDICA AL ESTUDIO DE ESTA ASIGNATURA? …………………………………………………	
¿LEE LA TEORÍA ANTES DE RESOLVER LAS PRÁCTICAS?: A VECES ☐ SIEMPRE ☐ NUNCA ☐	
¿ASISTE A LAS TEORÍAS?: A VECES ☐ SIEMPRE ☐ NUNCA ☐	
¿ASISTE A LAS PRÁCTICAS?: A VECES ☐ SIEMPRE ☐ NUNCA ☐	

BIBLIOGRAFIA

- Chevallard Y. (1992). “Concepts fondamentaux de la didactique: perspectivas aportées par un approche anthropologique“. *Recherches en Didactique des Matehématiques* 12, pp.73-128.
- D´Amore, B. (2005). *Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.
- Gentile, E. (1973). *Notas de Algebra I.*Ed. Eudeba, Buenos Aires.
- Karmiloff-Smith, A. (1994). Más allá de la modularidad. Alianza Editorial, Madrid.
- Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar. (1995). en Rico, L. et al. “Educación Matemática“. *Grupo Editorial Iberoamérica*, pp. 90-91.
- Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México.