VISUALIZACION DEL CONCEPTO DE EXACTITUD EN INTEGRACION NUMERICA

Autores: Oscar Enrique Ares y Stella Nora Gatica
Institución: Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis - Argentina.
Dirección Electrónica: oares@fices.unsl.edu.ar o nimberti@fices.unsl.edu.ar
Nivel Educativo: universitario
Palabras clave: visualización, método de Simpson, nuevas tecnologías, cálculo numérico

RESUMEN

En los últimos tiempos, el estudio de la visualización en el pensamiento matemático es objeto de numerosas investigaciones, en parte, posiblemente, debido al surgimiento de la computadora como un recurso didáctico para la comprensión de conceptos matemáticos.
Este trabajo tiene como objetivo reflexionar sobre la importancia de poder relacionar e interpretar imágenes visuales (utilizando manipulables virtuales) con la información que está dada en forma simbólica.
Presentamos una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de exactitud del método de Simpson utilizándose la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface), la cual fue puesta en práctica con alumnos de la asignatura Cálculo Numérico de la carrera Ingeniería Electrónica.
El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas por lo que el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren el uso efectivo en el aula, es sumamente importante.
Del análisis realizado en la evaluación escrita y en el examen parcial de la asignatura, esta nueva metodología permite afianzar la comprensión y fijar el concepto con mayor facilidad a los que se someten a la enseñanza predominantemente algorítmica.

INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo de las ciencias matemáticas se han formalizado los conceptos matemáticos en definiciones rigurosas sin tener en cuenta las representaciones gráficas o las definiciones informales.
Sin embargo, de acuerdo a Duval (1998), para favorecer el aprendizaje, los profesores deben proponer actividades de conversiones entre diferentes registros de representación semiótica, aunque Artigue (1995) establece que se ha comprobado que la enseñanza del Análisis tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio sin proponer a los estudiantes conversiones entre registros.
Diversas investigaciones (Hitt F., 1998a, 1998b; Duval R., 1998; Fabra M. y Deulofeu J., 2000; Gatica y otros, 2002, Villalobos A. y Farfan R., 2001; etc.) han comprobado la importancia de la articulación entre diferentes registros de representación. Pero también estos estudios manifiestan que los alumnos, tanto de escuela secundaria como universitaria, no son capaces de lograr estas relaciones entre varios registros de representación.
Esta situación se agudiza en los alumnos de Ingeniería, ya que en las materias de la especialidad, el uso que se le da a los conceptos como modelos matemáticos, cumplen con objetivos muy diferentes; por un lado, en los procesos de resolución, se requiere de implementar métodos numéricos y gráficos y por otro, cuando se tiene una solución algebraica el principal interés reside en estudiar el comportamiento (por ejemplo de funciones) por medio de su representación gráfica identificando los parámetros involucrados en la misma.
En la mayoría de los casos, estas actividades resultan ser difíciles para los alumnos, ya que para poder realizar estas articulaciones, los estudiantes necesitan recurrir a la visualización. La

visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*" (Cantoral R. y Montiel G., 2001, p.24).
En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.
La visualización no es más que un medio con el que cuenta el alumno para poder realizar un mejor entendimiento. Cuando nos referimos a visualizar un concepto, estamos hablando de comprender un concepto a través de una imagen visual.
Los profesores debemos ser conscientes de esta problemática por lo que en la organización de las clases, deberíamos priorizar actividades en los que los alumnos deban realizar conversiones entre registros (principalmente entre el gráfico y simbólico).
Pero muchas veces, necesitamos de herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorecer actividades de manipulación.
Spicer J, (2000) define Manipulables Virtuales como representaciones digitales de la realidad posibilitadas por los computadores, y que el estudiante puede también manipular con el mismo objetivo de los primeros. *Los manipulables virtuales tienen además la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver e imposible de imaginar*" (Spicer J. 2000, p.7). Estas herramientas ayudan al estudiante a construir su propio conocimiento y a la vez posibilita la conversión entre registros (simbólico y gráfico).

PLANTEO DEL PROBLEMA

En los contenidos del curso *Análisis y Métodos Numéricos* de la carrera Ingeniería Electrónica, se encuentra el tema *exactitud de los métodos de integración* que pertenece a la unidad didáctica diferenciación e integración numérica.
En los libros de textos, tales como Mathews J. y Kurtis D. (2005) y Durán R. y Rossi J. (2004), se plantea una secuencia didáctica, que consiste en:

a) definir exactitud
b) determinar la exactitud de los métodos del trapecio y Simpson.

De la experiencia como docentes responsables del curso, observamos, que para los alumnos no es fácil la comprensión y en mayor medida la fijación del concepto de exactitud del método de Simpson, por lo que, en este trabajo, se propone una metodología utilizando la interfase gráfica de Matlab, Gui (graphical user interface).
Específicamente, el problema de exactitud en la regla de Simpson es un método numérico de integración que aproxima mediante interpolación cuadrática, <u>pero curiosamente tiene exactitud tres.</u>

FORMULA DE SIMPSON CERRADA

Las reglas de integración numérica o de cuadratura, consisten en reemplazar la función a integrar por un polinomio, apoyado en el hecho básico, que toda función continua puede aproximarse por un polinomio (teorema de Wierstrass), y estos son fáciles de integrar.

En símbolos: dada $f \in C[a,b]$ se aproxima el valor $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b p(x)dx$ donde p es un polinomio suficientemente próximo a f.

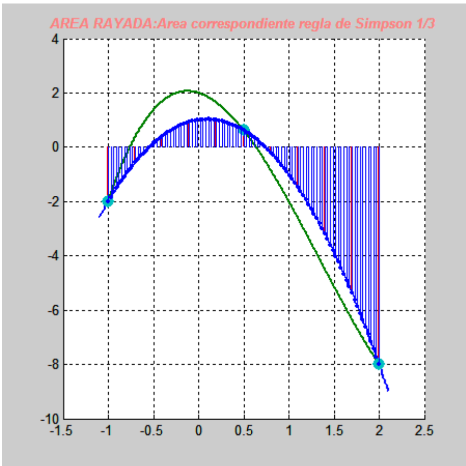
La forma práctica de construir reglas de integración, consiste en elegir un polinomio aproximante que **interpole a f**, en (n+1) puntos. Esto es, se eligen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se halla el único polinomio de grado n que verifica $p_n(x_j) = f(x_j)$ con j=0,1,2, . . . n.

Fórmula de Simpson simple cerrada: Si en el intervalo [-1,1], elegimos una distribución nodal {-1, 0, 1}, y para el polinomio interpolante ($p_n(x_j) = f(x_j)$) de grado dos $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, se determinan los coeficientes resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.
Así, la regla de Simpson se obtiene de integrar el polinomio de Lagrange de segundo grado sobre [a,b] con nodos x_0 = a , x_2 = b y x_1 = a + h , donde h = (b – a) / 2.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

a = -1; b= 2; h= 1.5. En color azul el polinomio cuadrático interpolante, en color verde la función f definida en [-1,2].



EXACTITUD DE LA FÓRMULA DE SIMPSON SIMPLE CERRADA

Diremos que una regla de cuadratura tiene *grado de exactitud* $M \geq 0$ si halla exactamente la integral de cada polinomio de grado $\leq M$, pero no halla exactamente la integral de algún polinomio de grado $M+1$.
Es fácil entender, que la regla de Simpson coincida exactamente con la integral de un polinomio de grado dos, puesto que el polinomio interpolante y la función a integrar son curvas que coinciden exactamente.
Según el grado de exactitud definido la regla de Simpson tiene grado de <u>exactitud 3</u>. Este es el **hecho notable,** a ser visualizado didácticamente, según un registro gráfico.
Matemáticamente, es fácil su verificación:

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ es el resultado exacto, mientras la regla de Simpson $\frac{2}{6}((-1)^3 + 4(0)^4 + 1^3) = 0$ da exactamente el mismo resultado. Se hace notar que basta tomar solo los polinomios de la base canónica.

$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$ mientras el cálculo según la regla de Simpson es $\frac{1}{3}((-1)^4 + 4(0)^4 + 1^3) = \frac{2}{3}$ y no coinciden los resultados. Por lo tanto, el grado de exactitud es tres.

El problema didáctico es la **visualizacion** que permitirá una comprensión, del hecho que el área <u>subtendida por un polinomio de grado 3(tres), coincida exactamente con uno de grado dos, interpolante sobre tres nodos uniformemente distribuidos.</u>
En este trabajo se ha pretendido una ampliación extendiendo la aplicación de la regla de Simpson simple a cualquier otra función, que puede definir el alumno, conjuntamente con un intervalo cerrado arbitrario. Esto permite una gran interactividad, conjuntamente con la visualizacion del proceso que compara paso a paso el resultado exacto con la aproximación dada por la regla de Simpson simple.

Para un intervalo [a , b] la fórmula de Simpson simple cerrada, es;
S(*f*) =(*b* - *a*)/6 * [*f*(*a*) + 4*f*((*a* + *b*)/2) + *f*(*b*)].

OBJETIVOS

El análisis del presente estudio se focaliza más en los fenómenos ligados al aprendizaje. Nos centramos específicamente en mostrar una propuesta didáctica de este tema, utilizando manipulables virtuales, donde los alumnos puedan visualizar la conversión entre dos sistemas de representación, el gráfico y el algebraico.
De acuerdo a Duval (1998) consideramos que es fundamental para la comprensión de los objetos matemáticos distinguir un objeto matemático y su representación. Desde esta perspectiva, la comprensión de un concepto se logra si se utilizan diferentes registros de representación.
Se recurre a un nuevo registro, un <u>*registro gráfico con animación*</u> que permita comprender el concepto de exactitud y sumarle interactividad, puesto que el alumno ingresará una función de una variable y un intervalo [a, b] arbitrario y observa, con animación gráfica, la aplicación algorítmica del método de Simpson. Específicamente para la exactitud, ingresará una función polinomial de grado tres y podrá visualizar el proceso que iguala la integral exacta con el resultado del método numérico que utiliza un polinomio interpolante de grado dos. Debe ingresar también un polinomio de grado cuatro para ver, que no coinciden los resultados, exacto y por cuadratura.

METODOLOGÍA

En el tercer año consecutivo de dictado de la asignatura se ha ensayado, utilizando los programas elaborados en los dos años anteriores, con la interfase grafica de Matlab Guide, una nueva metodología para explicar conceptos y métodos numéricos que es la visualización gráfica pero sumándole la posibilidad de experimentar **interactivamente.**
En el gabinete de matemática, luego de exhibir a los alumnos la verificación interactiva que se expone a continuación, se elaboró una prueba escrita, previa clase de teoría, con el objeto de evaluar el grado de comprensión del tema. La evaluación escrita consta de las siguientes preguntas que fueron evaluadas:

a) Definición de exactitud
b) Determinar el grado de exactitud, demostrándolo, de la regla del trapecio y la regla de Simpson.
c) Para medir la aceptación y cuanto ayuda en la compresión del tema a los alumnos, se les solicito que fijaran un valor (obviamente subjetivo) en una escalada graduada (0_0.25_0,50_0,75_1), para ponderar esta nueva tecnología educativa.

JUSTIFICACIÓN DE LAS PREGUNTAS

a) Definición de exactitud: En la definición están implicados dos términos, la integral exacta aplicada a un polinomio, y la fórmula del método numérico involucrado aplicado a ese polinomio. Y se deben computar ambos para establecer si son iguales. Justamente la visualización permite ´´ver´´ los valores de las áreas involucradas (integral exacta y el método numérico) y por ejemplo convencerse de la igualdad cuando se ingresa un polinomio cúbico o de grado menor a tres. Este proceso de imágenes permite **comprender** la formulación abstracta.
b) Determinar el grado de exactitud, demostrándolo, de la regla del trapecio y la regla de Simpson.
Esta pregunta se corresponde con la **aplicación** de la pregunta anterior pero a los distintos métodos numéricos de integración.
c) La última pregunta es la valoración personal y obviamente subjetiva del alumno de la visualización gráfica cuando intenta responder los ítems a y b.

RECOPILACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Respondieron estas preguntas 7 alumnos (50% del total del curso)

Resolvió bien	4 alumnos
Parcialmente bien	2 alumnos
No resolvió	1 alumno

Definición de los términos utilizados en la tabla anterior y están definidos para este contexto:
<u>Resolvió bien</u>: significa respuesta correcta en todos los términos a lo solicitado.
<u>Parcialmente bien</u>: significa dos posibilidades de análisis a) sin completar y b) error en la respuesta.
Se ilustrará este término analizando sintéticamente el único caso de esta muestra.
<u>No resolvió:</u> Cuando no hay respuestas en ningún ítem.
El promedio de los valores asignados sobre la ayuda de la visualización a la comprensión es significativamente alto: 0,5.

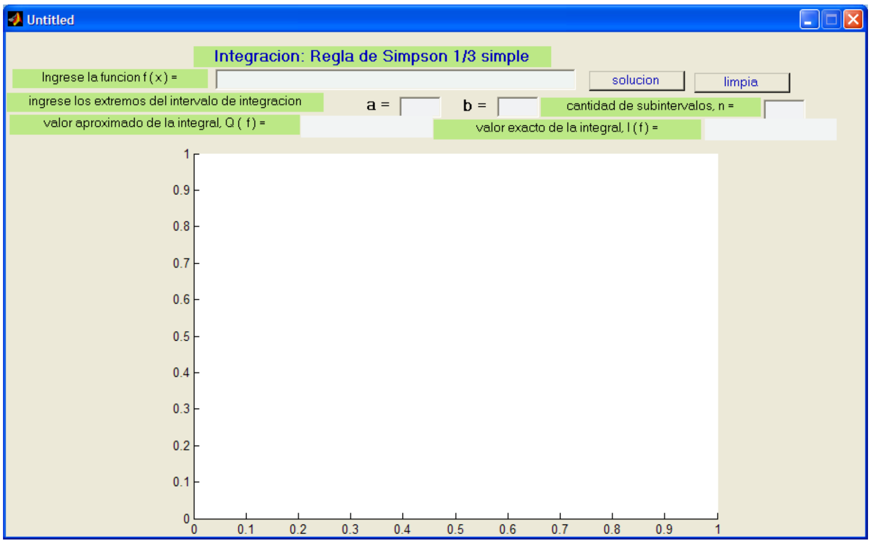
EVALUACIÒN DE LAS RESPUESTAS

Es sorprendente la cantidad de respuestas, que corresponden al ítem resolvió "bien".
En dos casos, al demostrar que el método un Simpson tiene exactitud tres, los alumnos, no verificaron la desigualdad $\int_{-1}^{1} x^4 dx \neq \frac{2}{6}(f(-1)+4f(0)+f(1))$, que implica la **no compresión** completa de la definición, a pesar de que en el proceso de visualización, aparece claramente la desigualdad. Una tentativa de explicación de error, es que la exhibición de la GUI, se realizó una sola vez cargando funciones que son polinomios de grado cuatro. Lo que implica que se deben realizar al **menos dos exhibiciones** de un determinado proceso.

<u>Como una actividad de la segunda evaluación parcial se preguntaron las ítems</u> a) y b) y la respuesta **fue correcta en el 95% de las pruebas**.

PANTALLA DE LA INTERFASE GRÁFICA

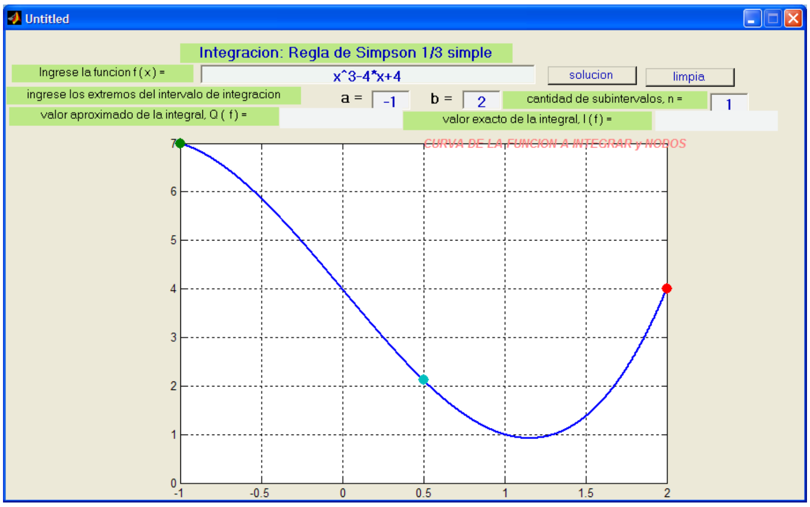
En la siguiente pantalla es donde el alumno debe ingresar los datos y así poder visualizar el proceso interactivo.



VERIFICACION INTERACTIVA DE LA EXACTITUD DE LA REGLA DE SIMPSON

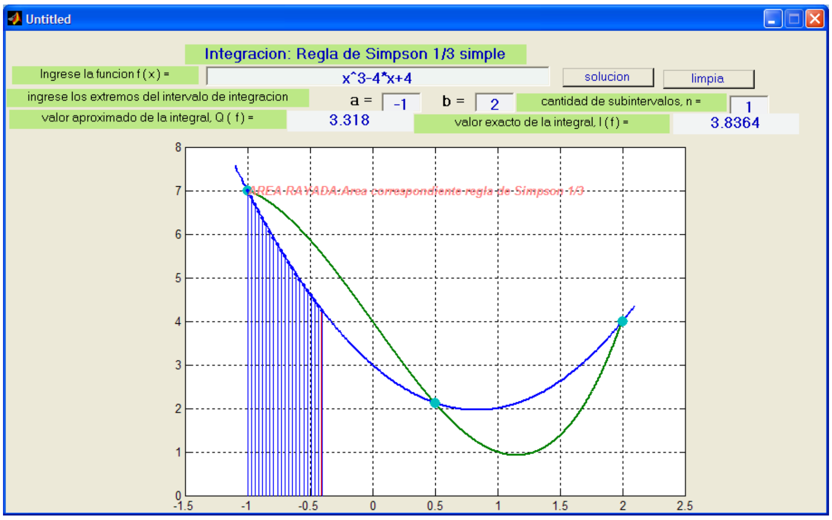
En el edit text de pantalla, correspondiente a ‘ingrese la función f(x)’, el alumno ingresa un polinomio cúbico, por ejemplo x^3 – 4*x + 4. A continuación se ingresan los extremos del intervalo de integración, ejemplo a=-1, b=2, fijando como cantidad de subintervalos n=1. Se pulsa el botón solución.
A medida que se desarrolla el proceso podemos cotejar el valor numérico de la regla de Simpson_simple, en pantalla, valor aproximado de la integral, correspondiente a la curva cuya área subtendida aparece rayada, versus, el valor exacto, en pantalla, el edit text ‘valor exacto de la integral’.

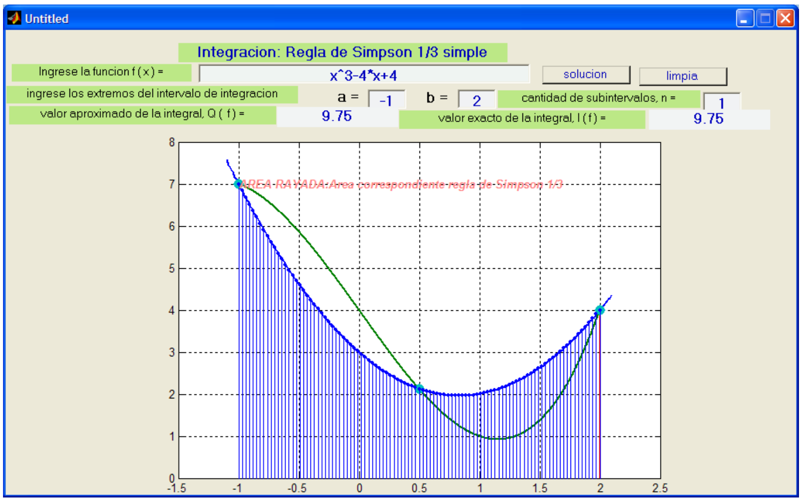
PANTALLA CON DATOS INGRESADOS Y REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION



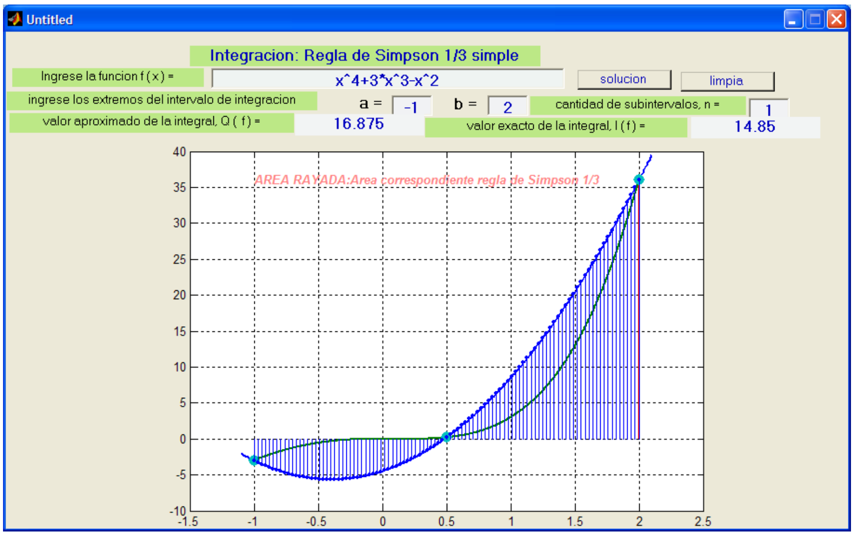
PANTALLA CON GRAFICAS Y VALORES NUMERICOS

Se observa la gráfica de la función f (polinomio cúbico), color verde, y polinomio interpolante de segundo grado (color azul) y los valores numéricos de la cuadratura, regla de Simpson y el valor exacto de la integral en cada paso de este representación.





Finalmente comprobamos, que aunque sorprendentemente las curvas del polinomio cúbico y cuadrático son obviamente diferentes, el **área subtendida por ambas coincide**, en este caso en el valor 9,75.
Se ingresa ahora un polinomio de cuarto grado.



No coincide el valor dado por la regla de Simpson con el valor exacto de la integral en consecuencia, la exactitud es **tres.**

CONCLUSIONES

Que se puedan someter a la verificación interactiva los resultados predichos por la teoría, permiten afianzar la comprensión y fijar el concepto, tal como queda demostrado en la evaluación escrita, al final de la secuencia didáctica y en la evaluación del examen parcial de la asignatura.
La explicación a estos resultados, hipotéticamente, es que el conocimiento definitivamente se aprehende cuando ha sido puesto en juego.

La poca frecuencia con que se recurre al registro gráfico en las actividades áulicas impide que a menudo que los alumnos no puedan visualizar ni interpretar los resultados, lo que dificulta ser consciente de algunos resultados a los que se llega. Los estudiantes se apoyan en el registro algebraico en los que confían plenamente sin llegar a saber que representación gráfica tienen los resultados obtenidos.
Este estudio es de carácter exploratorio (aunque ya ha sido modificado luego de dos años consecutivos), por lo que, de acuerdo al análisis de la propuesta, será reformulada y mejorada en ciclos posteriores.
Es primordial que los profesores, aunque ya sea en un nivel universitario avanzado, utilicemos estas herramientas para ayudar a los alumnos a visualizar los conceptos y a comprobar los resultados obtenidos en la realización de sus trabajos prácticos. El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permiten dar un significado concreto a las nociones matemáticas por lo que el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren el uso efectivo en el aula, es sumamente importante.
Podemos afirmar a modo de conclusión que ésta nueva metodología, al menos en este tema, da buenos resultados.

BIBLIOGRAFIA

Artigue M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México. Grupo Editorial Iberoamérica. (pp. 33 - 61).

John H. Mathews y Kurtis D. Fink. (2005). *Metodos Numéricos con Matlab.* Editorial Pearson.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall & Pearson Educación.

Durán R. y Rossi J. (2004). *Elementos de Cálculo Numérico*.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 173-201.

Eduteka (2003). *Los manipulables en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperable en: http://www.eduteka.org/Manipulables.php.

Hitt, F. (1998a). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa. (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998b). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo.* Revista Educación Matemática. Vol 10, nro 2. (pp. 23 – 45). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000). *Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.3, Num.2, (pp. 207-230).

Gatica N., Tauber L. y Ruiz F. (2002a). *Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería*. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales. (pp.417-430). Universidad de Alicante (España).

Mathews J. y Kurtis D. (2005). *Métodos numéricos con Matlab.*

Spicer, J. (2000). *Virtual Manipulatives*: A New Tool for Hands-on Math. ENC Focus. Recuperable en http://www.eduteka.org/Manipulables.php. 7(4) p.14.

Villalobos A. y Farfan R. (2001): *Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 14. Panamá (pp. 396-399).