NÚMEROS COMPLEJOS, UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA ALUMNOS DE CIENCIAS BIOLÓGICAS.

María Susana Vecino, Guillermo Valdez, María Cristina Rocerau Silvia, Vilanova, Mercedes Astiz, María Isabel Oliver, Perla Medina
Universidad Nacional de Mar del Plata – República Argentina
susana@mdp.edu.ar, gvaldez@mdp.edu.ar

Nivel educativo: Universitario
Palabras claves: metodología, números complejos, biología, historia

Resumen

El avance de las **Ciencias** y de la **Tecnología**, han evolucionado en forma vertiginosa en los últimos tiempos, lo cual genera un interés por parte de los docentes en la búsqueda de actualizaciones para la posterior capacitación y formación profesional. Numerosos cambios se han dado en la enseñanza a nivel universitario, entre ellos: el incremento del número de estudiantes que actualmente cursan estudios terciarios; los importantes cambios curriculares en el nivel pre-universitario; las crecientes diferencias entre la educación matemática de nivel secundario y la de nivel terciario, con respecto a sus propósitos, objetivos, métodos y enfoques de enseñanza; el rápido desarrollo de la tecnología; etc.

Estos aspectos y las exigencias que transcurren en la vida cotidiana, hacen que cada día que pase, el docente aumente su interés por el perfeccionamiento y la búsqueda de nuevas estrategias para poder desenvolverse en una sociedad llena de exigencias, tomando un rol mucho más comprometido con el aprendizaje del alumno.

A efectos de mostrar una experiencia didáctica se ha elegido el tema "Números Complejos", que corresponde a la asignatura Matemática II de la Lic. en Ciencias Biológicas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Este trabajo, que forma parte de estudios realizados por el Grupo de Investigación: " Investigación Educativa" de esta Facultad, propone una alternativa metodológica que intenta ensamblar aspectos históricos, epistemológicos y psicopedagógicos e incorporar una participación activa del alumnado

Fundamentación teórica del trabajo

El grado de crecimiento e integración que han adquirido los conocimientos científicos y sus aplicaciones técnicas y tecnológicas repercuten en un conjunto de esferas de la vida sociopolítica, económica y en particular en la esfera educativa. En consecuencia los actuales sistemas de enseñanza se enfrentan al problema de reelaborar una concepción del proceso de enseñanza de las nuevas condiciones históricas, que garantice la actividad creadora del hombre y el desarrollo de su personalidad. A partir de esta realidad y analizando las distintas tendencias pedagógicas contemporáneas, el trabajo se fundamenta en las siguientes Teorías:

Enfoque Histórico Cultural, con la teoría de la Actividad y la Teoría de formación por Etapas de las Acciones Mentales: Se apoya en los trabajos de Vigotsky. La tesis fundamental que sustenta esta tendencia pedagógica es reconocer la naturaleza histórico social del hombre, de sus cualidades y capacidades y considerar a la actividad consciente y transformadora como el elemento fundamental para el desarrollo del individuo. Uno de los aportes más importantes de Vigotsky lo constituye el concepto de la zona de desarrollo próximo quien la define como la distancia de lo que puede un alumno realizar por si solo, con los conocimientos y habilidades que posee y lo que es capaz de alcanzar con la ayuda de otro .Leontiev y Galperin, enriquecen este enfoque con la Teoría de la Actividad y la Teoría de Formación por etapas de las acciones mentales respectivamente y constituyen junto con el enfoque Histórico Cultural un fundamento teórico que permite contextualizar y hacer más activo el proceso de aprendizaje y del conocimiento del estudiante que es concebido como un proceso de construcción personal que transcurre como parte de una colaboración entre alumnos y profesor en la actividad conjunta que ellos realizan.

El Enfoque Cognoscitivo. Piaget, pionero en la concepción constructivista del aprendizaje, describió el aprendizaje en términos de esquemas, conceptos y estructuras, el conocimiento se manifiesta en niveles de pensamiento y se desarrolla a través de procesos de asimilación, acomodación y adaptación., recurre a la noción de asimilación para describir el proceso por el que un estudiante toma alguna experiencia o trozo de información y lo coloca en la estructura existente de su conocimiento. La asimilación consiste en utilizar los esquemas existentes para dar sentido a lo nuevo que se aprende. La noción de acomodación describe el cambio producido en la configuración del conocimiento para que la idea nueva pueda ser asimilada. Otro concepto planteado por este enfoque es el de Aprendizaje Significativo propuesto por Ausubel, quien lo define como un proceso por el cual se relaciona nueva información con algún aspecto ya existente en la estructura cognitiva de un individuo y que sea relevante para el material que se intenta aprender.

Importancia del tema

Los números complejos sirven no sólo para representar todas las posibles raíces de todos los polinomios de coeficientes reales. Disponer de esta clase de números es de particular importancia en las aplicaciones a la Física, la Ingeniería e incluso la Biología.

En el siglo XVI, los algebristas italianos para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado expresaron las raíces de los números negativos mediante símbolos, como $\sqrt{-n}$, siendo *n* un número real cualquiera, debido a que estas expresiones carecían de significado en el campo de los números reales. En concreto, fueron introducidos por Cardano (1501-1576) para resolver ecuaciones de tercer grado.

Con estos símbolos se operaba según las reglas de cálculo de los números reales, y en el siglo XVII fueron denominados por los matemáticos como *números imaginarios* pues no correspondían entonces a nada concreto.

En el siglo XVIII, los matemáticos intentaron encontrar una teoría coherente para estos números, y así el suizo *Euler* (1707-1783) introdujo la notación i = $\sqrt{-1}$ y posteriormente *Wessel* en 1798 y después *Argand* en 1806 proporcionaron su interpretación geométrica.

Gauss (1777-1855) continuó estudiando esta interpretación e introdujo la expresión de número complejo y mostró que cualquier número complejo puede escribirse mediante la expresión $a + bi$, siendo a y b dos números reales e i el símbolo de *Euler*.

El matemático irlandés *Hamilto*n en 1835 estableció una la teoría completa de los números complejos que ha sido conservada todavía y únicamente se tradujo al lenguaje de la teoría de conjuntos.

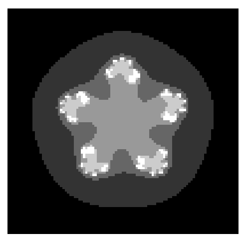
El 19 de mayo de 1673, los naturistas de la Royal Society de Londres recibieron una carta con remitente de Holanda. En ella Leewuwenhoek daba cuenta de sus observaciones con un microscopio que él mismo había construido. En una de sus observaciones demostraba que el agua de las charcas, aparentemente limpia, estaba en realidad poblada por un gran número de seres vivos. Había nacido la MICROBIOLOGÍA.

Tres siglos después el investigador C. A. Pickover, hacía un descubrimiento mientras se encontraba trabajando en un programa para obtener conjuntos de Julia, cometió un error empleando la orden OR en lugar de la AND.

El efecto fue que apareció ante sus ojos un gráfico enteramente distinto al esperado. Bien mirado, su aspecto recordaba algo al de un protozoo. Por ello la revista Omni caracterizó a **Pickover como homólogo de von** Leewuwenhoek **en el siglo XX, porque del mismo modo que el holandés descubrió seres unicelulares en una charca**, **Pickover lo hizo en el propio plano complejo.**

Aunque se trata de construcciones matemáticas, tienen un notable parecido con los seres unicelulares reales. Ciertamente Pickover les puso el nombre de biomorfos y no fue por capricho.

Así es que graficando la función f(z) = $z^5 + c$ donde c = 0.1 - 0.9 i ITERANDO mientras el MÓDULO se mantenga menor que un valor determinado (por ejemplo, 50) aparece la gráfica que recuerda al Paramecium.



PRERREQUISITOS DEL TEMA

La Teoría Ausubeliana del Aprendizaje significativo mantiene que todo nuevo aprendizaje significativo requiere conectarse de algún modo a conceptos ya existentes en la estructura cognitiva del sujeto que aprende. Por eso para obtener mayor rendimiento y un buen desarrollo de los contenidos, asegurando la asimilación y comprensión de los mismos, se deberá verificar que los alumnos tengan en claro los siguientes contenidos**:**

- Propiedades de los números Reales como cuerpo ordenado
- Resolución de ecuaciones lineales de primer grado
- Resolución de ecuaciones de segundo grado con discriminante mayor o igual que cero.
- Valor absoluto de un número real
- Funciones Trigonométricas. Seno, Coseno, Tangente. Valores de estas funciones en los ángulos notables.

Objetivos del tema

- Caracterizar los números complejos mediante sus formas: par ordenado, binómico, polar, y trigonométrica.
- Operar con números complejos en forma binómica y trigonométrica
- Determinar sectores del plano mediante ecuaciones e inecuaciones con números complejos
- Calcular las raíces de la ecuación $X^n = R$, $R \in C$ utilizando el teorema de De Moivre y verificar que son los vértices de un polígono regular de n lados.

Desarrollo:

Se desarrollan tres clases teórico - prácticas presentando el Conjunto de los Números Complejos, las operaciones y sus propiedades utilizando técnicas participativas y recursos informáticos para las gráficas de raíces enésimas de un complejo e iteraciones de funciones de la forma f(z) = $z^5 + c$.

Se aplica la técnica de observación directa experimental en las siguientes instancias:

1. Se continúa en las clases prácticas con el trabajo en pequeños grupos **observando sistemáticamente las actitudes personales** del alumno, su forma de organizar el trabajo, las estrategias que utiliza, de cómo resuelve las dificultades que encuentra, etc. llevando registro mediante.
2. Se seleccionan distintos ejercicios de la práctica para que un **integrante** de cada grupo exponga en forma oral. Esta actividad tiene por objetivo acostumbrar al alumno a fundamentar sus afirmaciones, generar intercambio con sus compañeros de grupo, mejorar su forma de expresión y propiciar que llegue a las instancias de examen parcial con mayores posibilidades. (**INSTRUMENTO A).**
3. Al finalizar la guía de trabajos prácticos, y previo al primer examen parcial, se incorporan instrumentos de **auto evaluación (INSTRUMENTOS B Y C)** y de **reflexión sobre lo aprendido y cómo se ha aprendido, y también, sobre lo enseñado y cómo se ha enseñado**.
4. Al completar la primera mitad del cuatrimestre son evaluados mediante un examen parcial.

Instrumentos de evaluacion

INSTRUMENTO A: para evaluar las exposiciones orales de los alumnos durante el desarrollo de las prácticas correspondientes a cada una de las unidades:

Este instrumento trata de valorar el trabajo independiente del alumno.

Alumno	Totalmente Independ.	Independiente	Con algo de ayuda	Con mucha ayuda	No corresponde
Puede explicar lo que ha hecho.					

Presenta más de una solución (en caso que exista y esté disponible).					
Realiza buenas preguntas tales como Qué pasa si...?					
Discrimina entre la información provista (datos) y la pedida					
Reorganiza conceptos y propiedades vistas para resolver una nueva situación?					

Instrumento de autoevaluación b

Para contestar por los alumnos, una vez finalizada la unidad.

Fecha:	SI	NO	NO LO SUFICIENTE
Leyó los conceptos teóricos previos al desarrollo de la guía de actividades?			
Pudo concluir con la guía de ejercicios según el cronograma propuesto por la asignatura?			
Pudo desarrollar los ejercicios planteados con los conceptos vistos en las clases teóricas?			
La metodología de trabajo le resultó efectiva?			
Pudo consultar a alguno de los docentes cuando era necesario?			

Hubo un buen ambiente de trabajo en las distintas clases prácticas y /o teóricas ?			
Comentarios: (describa brevemente dificultades que tuvo para el desarrollo de esta guía de ejercicios)			

Instrumento de autoevaluacion c:

Para contestar una vez finalizada la unidad y antes de la evaluación sumativa

Casi todos los ejercicios consisten en preguntas de opción múltiple o verdadero-falso que requieren pocos o ningún cálculo. Las respuestas a estos ejercicios se encuentran al pie de página. Los mismos están diseñados para ver si el estudiante entiende las ideas básicas y deben resolverse antes de abordar los problemas más generales que les siguen.

1) $\bar{z} = z$ si y sólo si
a) z es real b) z es imaginario c) z$\neq 0$

2) Para z= a+ bi la magnitud de z, denotada $|z|$ es :
a) $\sqrt{a^2 - b^2}$ b) $\sqrt{a^2 + b^2}$ c) $\sqrt{1 - a^2}$

Verdadero o falso:

3) Para z = a + bi, arg z = $\pi - \arctan g\left|\frac{b}{a}\right|$ si a$\prec 0 \ y \ b \succ 0$

4) $|\bar{z}| = -|z|$

5) $\arg \bar{z} = -\arg z$

6) $-1 = 1.(\cos\pi + isen\pi)$

7) $(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4 - 4i$

8) si $z = 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,sen\frac{5}{4}\pi\right)$ $entonces\ z^{-3} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}\right)$

9) Una de las raíces cuartas de -1 es $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

10) Una de las raíces cúbicas de $\left(-1+i\right)$ tiene argumento mayor que un ángulo llano.

Respuestas a la autoevaluación

1) a 2) b 3) V 4) F 5) V 6) V 7) V 8) V 9) F 10) V

Ejercicios propuestos para la evaluación parcial y correspondientes al tema:

Se muestran a continuación dos ejercicios del tipo de los que se proponen para la evaluación del tema dentro del primer examen parcial

Los mismos se han seleccionado porque:

El ejercicio 1 evaluará el aprendizaje del concepto de raíz n-ésima de un complejo (Validez Conceptual) y también la habilidad para operar con números complejos (Validez funcional).

El ejercicio 2 evaluará la habilidad para calcular las raíces n-ésimas de un complejo (Validez funcional).

EJERCICIO 1

Calcular y expresar en forma binómica el conjugado de $\dfrac{z^4-3i+1}{(z^2+1).(z^2-1)}$ donde z es una de las raíces cuartas de i

EJERCICIO 2

Hallar y graficar todos los complejos z tales que: $(z^3+i).(z^4+16)=0$

__Consideraciones finales:__

A pesar de que el alumno universitario debería tener la inquietud de aprender, más allá del resultado de la evaluación, la realidad muestra que una gran parte de ellos, especialmente alumnos de los primeros años, se preocupan por estudiar lo que "seguramente van a tomarle en el examen" o en discutir la nota obtenida a efectos de conseguir un "aprobado".

El presente trabajo brinda la oportunidad de replantear las clases, considerar y aplicar técnicas participativas, implementar distintas alternativas de trabajo y aplicar recursos que brindan las nuevas tecnologías.

Referencias Bibliográficas

BOYER, C. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid. España: Editorial Alianza Universidad Textos.

CALLEJO, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad*- España: Editorial Narcea.

DÍAZ BARRIGA, A. (1994). *El examen*. En Díaz Barriga (Ed.). Docente y Programa. Lo institucional y lo didáctico (pp. 125-140). Argentina: Aique Grupo Editor S.A .

DÍAZ BARRIGA, A. (1990). *Una polémica en relación al examen*. En Díaz Barriga (Ed.), Currículo y evaluación escolar (pp. 31-52). Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

GENTILE, E. (1973). *Notas de Álgebra I.* Buenos Aires, Argentina: Ed. EUDEBA.

GIMENO SACRISTAN, J. (1994). *La evaluación de la enseñanza.* En Gimeno Sacristán,J. y Pérez Gómez, A. (Eds.). Comprender y transformar la enseñanza (pp. 334-397). Madrid: Ediciones Morata.

PALOU DE MATÉ, M. (1998). *La evaluación de las prácticas docentes y la autoevaluación*. En Camilloni, A.;Celman,S.; Litwin, E. y Palou de Maté, M. (Eds.). La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo (pp. 93-131). Buenos Aires. Argentina: Paidós.

POLYA, G. (1979). *Como plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas.

VILLALONGA de GARCIA, P. y COLOMBO de CUDMANI, L. (2003)- *¿Cómo evaluar el conocimiento matemático de los alumnos?*. Actas de la Décimo Tercera Reunión Nacional de Educación en Física. Volumen en soporte magnético. Río Cuarto. Córdoba. Argentina.