¿UN PROBLEMA EN LA OFERTA?
… POR EL SEGUNDO PAGA LA MITAD

Rocerau, M.C.; Astiz, M.; Oliver, M.I.; Valdez, G.; Vecino, S.; Vivera, C
rocerau@mdp.edu.ar; mastiz@mdp.edu.ar; moliver@mdp.edu.ar; gvaldez@mdp.edu.ar; susana@mdp.edu.ar; cvivera@mdp.edu.ar
Fac. de Cs. Exactas y Naturales- Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina

Tema: Resolución de Problemas
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel: No específico
Palabras clave: Un problema- diferentes grupos- recursos y dificultades

Resumen
El presente trabajo, consiste en explorar de qué manera, individuos de diferentes edades, niveles de formación y experiencia, resuelven una actividad que, si bien para algunos puede ser "un problema" y para otros simplemente un "ejercicio de aplicación", su solución puede encontrarse de distintas maneras utilizando conceptos matemáticos elementales.
Se analizan los recursos utilizados y las dificultades evidenciadas por cada uno de los grupos, y se plantean algunos interrogantes que a nuestro entender merecen atención.

Introducción

Como señala el NTCM (2000), "Una característica central del trabajo matemático es la resolución de diferentes tipos de problemas. Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral. Los buenos problemas deberán integrar múltiples temas e involucrar matemáticas significativas"

"Si bien como ciencia constituida, la Matemática tiene carácter formal, organización axiomática y naturaleza deductiva, en su génesis no están ausentes ni la intuición, ni el pensamiento conjetural ni las aproximaciones inductivas (…) Desde la consulta a calendarios y relojes, la programación y realización de las compras cotidianas, (…..), todos representan tareas que exigen de los ciudadanos autónomos un dominio importante de conocimientos matemáticos." (DGCyE 2012)

Robert y Rogalsky (2004), mostraron a través de diversas investigaciones que gran parte del aprendizaje de los alumnos depende de las actividades que realizan en clase, que están condicionadas por lo que el docente propone, limitado por distintas sujeciones sociales, personales e institucionales. Mostraron también que las prácticas de los docentes se vuelven rápidamente estables y difíciles de cambiar, posiblemente debido a las sujeciones que pesan sobre ellos. Desde este enfoque teórico, en este trabajo, queremos transmitir la experiencia realizada con grupos de alumnos de distintos niveles del sistema educativo a partir de la resolución de una situación que, por sus características, resulta cotidiana para cualquier persona. Si bien dicha situación, puede ser para algunos "un problema" en el sentido que lo consideran autores como Schoenfeld, (1985) y simplemente un "ejercicio de aplicación" para otros, su solución puede encontrarse de distintas maneras utilizando conceptos matemáticos elementales.

Un motivo

Como integrantes del grupo Investigación Educativa y a partir de nuestra labor como coordinadores y evaluadores del curso de Matemática en el ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata y como participantes de jurados en Olimpíadas de Matemática, hemos detectado en los últimos años cierta permanencia de dificultades en torno de algunos conceptos básicos, que por sus múltiples aplicaciones son extremadamente útiles.

Es así que surge la idea de explorar de qué manera, individuos con diferentes características en cuanto a su edad y nivel de escolaridad, proceden en cuestiones que involucran este tipo de conceptos. Para ello seleccionamos un problema cuya solución no necesariamente debe abordarse con recursos algebraicos.

El problema corresponde a una prueba de la instancia zonal del segundo nivel de la Olimpiada Matemática Ñandú, en la que participan niños que cursan el 6º año de la Escuela Primaria. Corresponde aclarar que el sistema educativo en nuestro país, para la educación obligatoria, está organizado en tres niveles: Inicial, Primario y Secundario. El Nivel Inicial sólo es obligatorio para niños de 5 años. Tanto la Educación Primaria (EP) como la Secundaria (ES) contemplan 6 años de educación obligatoria cada una, iniciándose la Primaria a los 6 años de edad y, al finalizar ésta, la Secundaria, cuyos 3 últimos años tienen distintas modalidades.

El problema

En la heladería está la siguiente oferta:

"Si compra dos helados iguales, por el segundo paga la mitad"

Bibi y Ana aprovechan la oferta. Bibi compra dos vasitos y seis cucuruchos; paga en total $ 75. Ana compra dos vasitos y dos cucuruchos; paga en total $33. ¿Cuál es el precio de un cucurucho y cuál es el precio de un vasito?"

Este problema involucra aspectos de la vida cotidiana, se presenta bajo una narrativa accesible y es imaginable para cualquier persona. Fue administrado en grupos de alumnos de EP, ES y con escolaridad obligatoria finalizada.

Una forma de resolución sencilla consiste en observar que la diferencia entre la compra de Bibi y la de Ana es de 4 cucuruchos y que por ellos se pagan $42. A partir de esta observación de una u otra manera se llega a la solución con simples cálculos.

<u>Contexto y grupos cuyas producciones se analizan</u>:

De 6º año de escolaridad Primaria:

46 alumnos con interés y gusto por la matemática que voluntariamente han participado en las Olimpíadas Ñandú y 32 alumnos de un curso de una escuela de gestión privada que no participan en Olimpíadas.

De escolaridad Secundaria:

Grupo de 1^er^ año: 61 alumnos de dos cursos de una escuela de gestión pública.

Grupo de 4º año: 51 alumnos, 35 de la modalidad Ciencias Naturales de una escuela de gestión privada y 16 de Arte de una institución de gestión pública.

Grupo de 6º año: 28 alumnos de orientación Economía y Administración de una escuela de gestión privada

De escolaridad obligatoria finalizada:

Grupo de aspirantes a ingresar a la Facultad: 159 alumnos que rindieron una instancia del ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNMDP. El problema fue uno de los 10 ítems que la integraron.

*Grupo de ingresantes a Matemática***:** 21 alumnos recién ingresados a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la FCEyN- UNMDP. La actividad se propuso en la segunda semana de clase.

Con excepción de los niños de Olimpíada y del grupo de aspirantes, el problema fue administrado por integrantes del grupo de investigación, dentro del horario escolar.

<u>Análisis de las producciones de los alumnos</u>

Organizaremos las producciones analizadas en cada uno de los grupos según estén bien o mal resueltas, describiendo brevemente los recursos y estrategias utilizadas.

Grupos de Escuela Primaria

Analizamos las resoluciones de 46 *niños de Olimpíadas*, de los cuales 17 resuelven bien, 26 mal y en 3 casos no se registra intento de resolución. También analizamos un *Grupo de 6º año EP*, sabiendo que el problema posee un grado de dificultad muy alto para niños de 11 años que no participan en Olimpíadas, de hecho solo 3 de los 32 alumnos, resuelven bien

✓ *¿Cómo lo hacen los que responden correctamente?* Podemos concentrar estas resoluciones en dos grandes grupos, los que:

Interpretan que los precios de cucuruchos y vasitos deben satisfacer tanto el caso de Ana como el de Bibi y “prueban o tantean” con valores hasta que verifican que se cumplen todas las condiciones. Las siguientes expresiones textuales reflejan este tipo de resolución:

- *“En un principio averigüé números pero no llegaba al resultado. Después (muestra pruebas con las que aproxima y verifica)…… y a lo último volví a arriesgar número y llegué a la conclusión que el vasito vale $8 y el cucurucho vale $14”*
- *“yo hice la tabla y fui probando hasta que me dio un resultado que coincidió con las dos chicas.”*

Interpretan que la diferencia entre lo que pagan Bibi y Ana, es decir los $42, corresponde a 4 cucuruchos. Para obtener el precio de cada cucurucho algunos tantean los valores y otros muestran a través de diferentes expresiones un buen razonamiento. Acorde al rigor de la edad, encontramos registros del tipo:

- *….“4 cucu en oferta = 3 cucu precio original 42:3=14 = 1 cucurucho precio original”*
- *…. 42:6=7, 7x2= 14…. 14 el precio del cucurucho”*
- *…yo hice 75-33=42, 4 cucuruchos con la oferta me tenía que dar 42, 14+14=28+7+7=42...”*
- *…”Ana = 2c=21 (14+7)…. Cucurucho: $14…”*
- *“ “Pensé que si la diferencia entre 75 y 33=42 sería el precio de 4 cucuruchos con la oferta, es 21=3x7=14+7 porque uno es la mitad (según la promoción)” Y para sacar el precio de…*
- *Yo pensé que si calculaba la diferencia entre las dos compras me da 42 y eso equivale a 4 cucuruchos y lo dividí por 4 y me dio el precio de 1 cucurucho con la oferta, Pero pensé si sale eso con la oferta tiene que salir más sin. Fui buscando números hasta que un número multiplicado por 2 y después …. Rta 1v=$8 sin promoción y con promoción $6. 1c,= $14 sin promoción y con promoción $10,50.”*

✓ *¿Qué hacen los que responden erróneamente?*

Interpretan que los vasitos y los cucuruchos cuestan lo mismo:

- *“Bibi= 8 helados= $75, 75:8 = 9………”*
- *….”75x2=150 que es lo que gastarían sin la oferta, 150 :8= 18,75 es el precio original sin la oferta de cada vaso y cada cucurucho”.*
- *“Yo pensé dividir el monto total de Ana por 2 porque son dos objetos que compra y luego lo dividí por dos porque son productos de cada uno. Luego al resultado lo dividí por dos sacando el monto que te permite la oferta y luego ese resultado lo sumo con el anterior y así se el precio de cada uno. 33:2= 16,5, 16,5:2= 8,25, 8,25+4,12=12,37→precio de cada vasito o cucurucho”*

Responden con el precio de un cucurucho/vasito según la oferta:

- *"….75-33=42, 42:4 = 10,5, 12:2 = 6. Rta. Cucuruchos=$10,5, vasitos=$6."*
- *"……Bibi (6X2)+ (10,5x6) = 12+63 = $75 Ana=(6x2)+ (10,5x2) = 12+21 = $33 "*

"Hacen cuentas", porque "hay que hacer cuentas", se observa en muchos niños de los que no participan en olimpíadas:

- *"No me pudo salir, trate un montón pero no pude. Hice un montón de cuentas"*
- *" 33:2=16, 33-16= 17, cada cucurucho cuesta $17."*
- *"33:2=16, 23-17=16, 16+16=32. Rta. El precio de un cucurucho es de $16,50."*
- *"75:3=25, 25:2=12,5. Cada cucurucho cuesta $12,50 "*
- *"no me sale porque no entiendo cómo dividir para que me dé el resultado".*
- *"no me sale porque hago las cuentas y me sale el primero pero no el segundo, que me da 37"*

Grupos de Escuela Secundaria

En los *Cursos de 1er año*, sólo 4, de los 61 alumnos pudieron resolver bien el problema; en los de 4º. *año* de las 51 resoluciones, solo hay 8 correctas y corresponden a 4 alumnos de cada modalidad; y en los de 6º *año* sobre las 28 resoluciones, 5 son correctas.

✓ *¿Qué estrategias utilizan los que lo hacen bien?* En el caso de *1er año* uno expresa la compra en términos del precio de 1 cucurucho y 1 vasito sin la oferta e interpreta que la diferencia de dinero entre lo que pagan Ana y Bibi es el precio de 3 cucuruchos y continúa correctamente la resolución:

- *"Bibi paga $1\frac{1}{2}$vasitos y $1\frac{1}{2}$cucuruchos por $33, … 75-33=42 y 42:3=14, 3 cucuruchos 42, 1 …"*

Los otros tres, con distintos registros o formas de representación, tantean precios y verifican que cumplan con las 2 compras:

- *"$\left\{\begin{array}{l}\text{vasito} \to \$8\\ 2°\text{vasito} \to \$4\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{cucurucho} \to \$14\\ 2°\text{cucurucho} \to \$7\end{array}\right\}$ BIBI , 12+21=33……….ANA ……..63+12=75"*
- *1 cucurucho =$14, 2 cucuruchos$21….6 cucuruchos $63. BIBI 33-21=12, 2v-$12, 2c-$21, 21+12=33. ANA 2v-$12, 6c-$63. $12+$63= $ 75. Un cucurucho cuesta $14 y un vasito $8.*

En *4º año*, que deberían haber trabajado sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en 3ero ES, sola una solución se hace con ecuaciones. El resto, o interpreta que 4 cucuruchos con la oferta cuestan $42 y continúa con razonamientos correctos, o tantea y verifica las condiciones:

- *"75-33=42, 2 cucuruchos 21, cada cucurucho sale 14 porque la mitad de 14 es 7 y 7+14 es 21…."*
- *"…14x3=42, 7x3=21, 42+21=63, 75-63=12, 12:3=4. Los vasitos 8 y los cucuruchos 14. 14+7+8+4=33"*
- *"Me fijé el enunciado y tiré un precio de vasitos que fue $7,00 y la mitad $3,50 y los cucuruchos $15,00 y la mitad $7,50, este resultado me da 33,00 pero cuando hice el otro me pasaba por $2, entonces trate de sumarle más dinero a los vasitos y restarle a .. y me dieron los resultados…"*

Las 5 soluciones correctas de *6º año* son similares a la de los niños de olimpíadas, ninguno utiliza lenguaje algebraico.

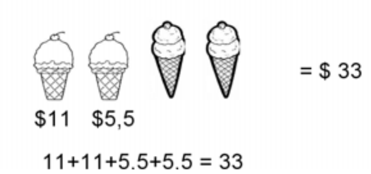
✓ *En cuanto a los que resuelven mal encontramos que:*

Proponen valores de vasitos y cucuruchos que verifiquen una sola de las compras:

- *Bibi: 12+6=18, 10+5=15, 18+15 = 33 cucurucho $ 12 y vasito $10*
- *" 75:6= 12, 12 los cucuruchos y $3 dos vasitos*

Con variantes de errores, piensan que vasitos y cucuruchos cuestan lo mismo:

- *"Ana 33:2=16,5:2=8,25. Rta. Cuestan $8,25 c/u"*
- *"75+33 = 108, 108:12= 9. Cada uno cuesta $9"*
- *"6x=75, x=12,5 Ana paga 12,5 por los cucuruchos y 37,5 por los vasito………..2x=33, x=16,5 Bibi paga $16,5 por los cucuruchos y los vasitos"*
-



El precio del cucurucho es de $11

Plantean correctamente un sistema de ecuaciones y cometen errores en los cálculos o plantean un sistema que no traduce la situación planteada:

- *"1,5 vasitos +1,5 cucuruchos = 33; 1,5x2 =33…."*
- *"4y+2y=75-33, 4y+2y=42-4-2, y+y = 34……y=17."*
- *"Ana, 2c=$75, x=75:2, x=37,5….1 vasito $18,75; 6x=75, x=75:6=12,5"*
- $\begin{cases}\frac{1}{2}(2x+6y)=75\\ \frac{1}{2}(2x*2y)=33\end{cases}$ ó $\begin{array}{l}\frac{3}{2}x+10y=75\\ \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y=75\end{array}$

Responden, con o sin el planteo de ecuaciones, lo que se paga por cucurucho/vasito según la oferta:

- *4c=75-33=42, 4c=42, 1c=10,5. El cucurucho vale $10,50… luego 2v=75-63 = 12……"*

Expresan los intentos o la imposibilidad de resolverlo:

- *"No lo entendí para nada, no sé ni cómo empezar " - "me salió el de Ana pero el de Bibi no.."*
- *"faltan datos" - "no lo entendí", - "es muy difícil"…*

Una alumna supone las compras en diferentes heladerías:

-*Ana compra en "heladería San Carlos" 14+7+6+12+6+12+6+12+6 = 75, paga $14 el vasito y $12 el cucurucho. Bibi compra en" Las Rosas" 12+10+6+5 = 33, paga $12 el vasito y $ 10 el cucurucho.*

Grupos con escolaridad obligatoria finalizada:

Analizamos las resoluciones de 21 alumnos *ingresantes a Matemática de* las cuales 11 son correctas y *159* de alumnos *aspirantes,* con 47 correctas.

✓ *¿Cómo lo hacen los que responden correctamente?* En todos los casos y como era de esperar las resoluciones se realizan, con diferentes matices, en un plano algebraico.

✓ *En cuanto a lo que resuelven mal encontramos :*

Errores que corresponden a una mala traducción al lenguaje algebraico.

Errores de cálculo

La respuesta $10,5 y $6 como precio de un cucurucho y un vasito respectivamente

No registran solución 1 alumno *ingresante* y 30 *aspirantes.*

<u>Consideraciones finales:</u>

A partir del análisis de los datos obtenidos, aparecen dos aspectos que merecen ser señalados: el primero de ellos es que *las dificultades de los niños de la escuela primaria en la resolución de este problema no son, en general, superadas al concluir la educación secundaria* ya que se siguen haciendo evidentes hasta en los grupos de alumnos aspirantes a ingresar a una facultad de ciencias; el segundo tiene que ver con *el tipo de errores cometido*: si bien hay errores que se repiten en más de uno de los grupos, hay uno que se ha dado en todos: responder que el precio un cucurucho/vasito es el que surge de la oferta.

Más complejo es analizar las causas de estas cuestiones. Desde el punto de vista del doble enfoque deberíamos analizarlas desde distintas dimensiones. En este trabajo nos centraremos en dos: la ***cognitiva,*** *relacionada con los recursos y estrategias matemáticas de los participantes,* y la ***personal***, vinculada a las propias sujeciones de los alumnos.

Con respecto a la dimensión ***cognitiva*** de análisis, es posible que la percepción del problema y los errores cometidos tengan su origen en representaciones rígidas de los contenidos escolares, desconectadas de las redes de significados que deberían haber sido construidas por los alumnos. Esto los lleva a realizar esfuerzos para recordar y repetir conjuntos de procedimientos relacionados con conceptos matemáticos, en general aislados entre sí y vacíos de significado. Desde la dimensión ***personal***, las causas de los errores pueden estar vinculadas a creencias comunes sobre la matemática escolar, que funcionan como ataduras o sujeciones: la matemática tiene poco o nada que ver con el mundo real, la respuesta a un problema es el resultado de cálculos que normalmente propone el enunciado, etc.

Sin embargo, las respuestas de estos alumnos de distintos niveles son fundamentalmente el resultado de la enseñanza de la matemática en la escuela. Como señala Chevallard (1999), "los saberes no existen sino como emergentes de prácticas situadas institucionalmente, que crean sistemas de valores y normas en relación a los saberes". Robert (2005) y Rogalsky (2002, 2003) también mostraron que gran parte del aprendizaje de los alumnos depende de las actividades que realizan en clase, que a su vez están condicionadas por lo que el docente organiza y propone, limitado por distintas sujeciones sociales, personales e institucionales. De esta manera, no podemos excluir del análisis la comprensión de las prácticas docentes, particularmente desde el punto de vista del aprendizaje que pueden promover en sus alumnos, que es la etapa siguiente de esta investigación.

Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas*, http://cmapspublic.ihmc.us/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1HNNDHQKN-1ZK8RDK-14R7 (consultado 12/02/2011)
- Chevallard, I. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactique des Mathematics, 19(2), pp 221-266
- Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Bs. As. http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/ (consultado 20/03/2012)
- NCTM (2000).*Principles and Standards for School Mathematics*, Reston VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Robert, A. ; Rogalski, M .(2004). *Problemes d'introduction et autres problemas de recherce au lycee* REPERES-IREM Nº 54 –Janvier 2004 pp 77-103
- Robert, A.; Pouyanne, N. (2005). *Formar formadores de maestros en matemáticas de educación media: ¿por qué y cómo?* Educ. Matemática, vol.17, pp. 35-38

- Robert, A. y Rogalsky, J. (2002). Le systeme complexe et coherent des pratiques des enseignants de mathematiques: une double approche. *Revue Canadienne de l´Enseignement des Sciences, des Mathematiques et des Technologies*. 2(4) pp 505-528
- Rogalsky, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe. *Recherche en Didactique des Mathematiques* 23(3), pp 343-388
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.