



EVOLUCIÓN DE PROCESOS DE VALIDACIÓN: UN ESTUDIO CON FUTUROS PROFESORES

Sara Scaglia y Melina Zampar

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

scaglia@fhuc.unl.edu.ar

Nivel universitario

Palabras clave: demostración, procesos de validación, futuros profesores.

Resumen

Esta comunicación tiene como objetivo analizar la evolución de los procesos de validación puestos en juego por futuros docentes de matemática para fundamentar resultados geométricos. Los sujetos de estudio son estudiantes que cursan Geometría Euclídea Plana, una asignatura del segundo año del Profesorado de Matemática.

En este estudio, en general, se confirman los resultados bien documentados en la bibliografía, referidos a que la actividad de demostrar resultados genera muchas dificultades en los estudiantes.

Se puede desatacar que en la actividad en la que los alumnos deben justificar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° , se observa un progreso considerable, que radica en una disminución de los errores en general, y de los errores de razonamiento en particular. En la segunda actividad, cuando deben desarrollar una justificación de que la suma de los ángulos interiores del rectángulo es igual a 360° , se observa también una disminución de los errores de razonamiento. Este progreso es importante, dado que los alumnos superan, en general, una dificultad bastante común, que es la utilización de hipótesis no dadas.

1. Introducción⁹

La demostración es considerada una característica fundamental de la esencia de las matemáticas. Esta cuestión no puede desatenderse en la enseñanza, dado que “la formación matemática de un individuo incluye no sólo el desarrollo de competencias específicas, sino también la consolidación de una concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se validan sus construcciones, concepción que se logra mediante la experiencia del quehacer matemático” (Camargo, Perry y Samper, 2005; p. 54).

En las orientaciones curriculares de diversos países se hace hincapié en la necesidad de justificar o validar las afirmaciones y resultados (NCTM, 1990; NAP, 2006). Sin embargo, “varios estudios han reportado que la deducción formal entre los estudiantes que han estudiado geometría escolar secundaria está prácticamente ausente” (Battista y Clements, 1995; p. 48). Estos autores reportan diversas investigaciones en las que se ponen de manifiesto las dificultades que tienen los sujetos para justificar los resultados a los que arriban, y más aún para desarrollar demostraciones formales.

Con la finalidad de profundizar en las particularidades de las demostraciones que realizan los alumnos, se ha diseñado un estudio que tiene por objeto indagar la evolución de la habilidad para demostrar resultados geométricos de estudiantes del profesorado de matemática. Se propone para ello realizar un estudio longitudinal de un grupo de estudiantes que cursan una asignatura del segundo año de la carrera, considerando tres momentos específicos: el inicio del año académico, la finalización del primer cuatrimestre y la finalización del año

⁹ Esta indagación se enmarca en el proyecto de investigación C.A.I.+D. P.E. 12/F603 “La problemática de la demostración en el aprendizaje de la geometría”.



académico. En esta comunicación presentamos los resultados obtenidos en el primer momento y en el segundo momento, es decir, en el inicio y en la finalización del primer cuatrimestre.

La asignatura Geometría Euclídea Plana se dicta durante el primer cuatrimestre del segundo año de la carrera Profesorado de Matemática. El estudio de conceptos y propiedades geométricas se propone a partir de una construcción axiomática, siguiendo el texto de Puig Adam (1980). Se espera analizar la repercusión que podría tener una formación sistemática en geometría y en sus métodos de demostración en la evolución del pensamiento geométrico de los sujetos, en particular en lo que refiere a las habilidades para demostrar resultados.

2. Marco teórico

Siguiendo a Balacheff (Balacheff, 2000; p. 12) la *explicación* “establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad”. Esto es, cuando la explicación se lleva a cabo tiene como objetivo hacer evidente la verdad de las proposiciones. Cuando una explicación es reconocida y aceptada se le asigna el término *prueba*. Cuando la explicación expresada en un discurso asegura la validez de una proposición y esta es aceptada por una comunidad, se habla del paso de la explicación a la prueba. La *demostración* es un tipo de prueba dominante en las matemáticas, consiste en una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto de reglas (Balacheff, 2000).

El término *razonamiento* hace referencia a la actividad intelectual que consiste en la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. La expresión *proceso de validación* es asignada a esta misma actividad, cuando tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y producir una explicación.

En lo que respecta a categorizaciones de errores en geometría, Franchi y Rincón (2003) proponen una tipología errores en el área de la Geometría Plana que permita identificar y clasificar los errores de los alumnos. Las categorías en las cuales se ubican los errores son las siguientes:

Errores de pre-requisitos:

“Los errores de pre-requisitos se deben a un aprendizaje deficiente de hechos, habilidades y destrezas que el alumno debió adquirir antes de iniciar el estudio de la geometría” (Franchi y Rincón, 2003; p. 197). Se incluyen en este tipo los errores observados en operaciones, en la manipulación de expresiones algebraicas o cuando se utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.

Errores propios del lenguaje geométrico

“Estos errores se hacen evidentes cuando el estudiante utiliza inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos, demuestra o intenta demostrar una proposición geométrica que no se le pide, da una respuesta distinta o adicional a la que se le pide en un problema geométrico, cuando plantea una ecuación o proposición en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado y cuando utiliza inadecuadamente la terminología geométrica o describe defectuosamente la construcción de figuras geométricas” (Franchi y Rincón, 2003; p. 198).



Errores gráficos

“Se entenderá que un estudiante incurre en este tipo de errores cuando dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto, no dibuja una figura geométrica a propósito de un problema geométrico propuesto, cuando toma mal un dato de una figura geométrica o lo ignora en la solución o demostración de un problema geométrico” (Franchi y Rincón, 2003; p. 198).

Errores de razonamiento

Se incluyen aquí los errores derivados del mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas. “Se manifiestan cuando el alumno añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico, intenta demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado, usa un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación o lo usa en un contexto que no le corresponde, interpreta y usa inadecuadamente una definición, usa el recíproco de una implicación como verdadera, cuando construye y usa una implicación que no es verdadera” (Franchi y Rincón, 2003; p. 199).

Errores de transferencia

“Se presentan, cuando el estudiante transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico, o cuando aplica defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas o disciplinas en un problema geométrico planteado” (Franchi y Rincón, 2003; p. 200).

Errores de técnica

Se incluyen aquí los errores que surgen por la aplicación inadecuada de procedimientos o algoritmos en la solución de problemas geométricos o en la demostración de proposiciones geométricas. “Se puede identificar este tipo de errores cuando el estudiante utiliza un algoritmo correcto en la solución de un problema geométrico pero lo aplica en forma defectuosa, enuncia proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas o cuando utiliza un algoritmo adecuado para la solución o demostración de un problema geométrico pero no llega a su solución” (Franchi y Rincón, 2003; p. 201).

Errores de tecnología

“Se consideran errores de tecnología, aquellos que se producen cuando el alumno selecciona un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico o usa una estrategia inadecuada para realizar una demostración geométrica” (p. 201).

Errores azarosos

Se incluyen en este grupo los errores ocurridos por un descuido. “Se pueden detectar cuando el alumno transcribe mal una cantidad o símbolo o sustituye mal un dato en una ecuación dada, manipula inadecuadamente los signos algebraicos o cuando ejecuta mal operaciones aritméticas” (Franchi y Rincón, 2003; p. 203).

A partir de las consideraciones anteriores, en este trabajo se estudian los procesos de validación que los sujetos ponen en juego para fundamentar dos resultados geométricos. La clasificación de Franchi y Rincón (2003) será utilizada para analizar los errores observados.



3. Encuadre metodológico

Esta indagación se sitúa en el paradigma interpretativo (Cohen y Manion, 1990). Se trata de un estudio descriptivo en pequeña escala, cuya finalidad es la interpretación de las respuestas y producciones de sujetos de modo de comprender sus acciones, sin perseguir la generalización de los resultados. Desde el punto de vista metodológico, se trata de una investigación cualitativa donde los datos son frases y palabras, antes que datos numéricos. Además, el análisis de datos no descansa en métodos estadísticos.

Para el procesamiento de la información se elabora una categorización inicial que da cuenta de las diferentes instancias de respuestas, de modo de volcar en una tabla las afirmaciones dadas por todos los sujetos. Posteriormente se retoman las categorías que resultan de mayor interés en función del objetivo del trabajo, esto es, analizar los procesos de validación puestos en juego por los estudiantes.

Como se ha expresado, los sujetos de estudio son estudiantes que cursan Geometría Euclídea Plana, una asignatura del segundo año del Profesorado de Matemática. Se administró el cuestionario a 19 sujetos en la primera aplicación (inicio del cuatrimestre) y a 14 sujetos en la segunda (fin del cuatrimestre). De estos últimos, sólo 9 habían realizado en cuestionario en la primera aplicación. Por lo tanto, en la presente comunicación se estudia la evolución de los procesos de validación de estos 9 estudiantes.

Para elaborar el cuestionario en primer lugar se adopta el criterio de seleccionar propiedades elementales conocidas por los estudiantes (aunque difícilmente hayan sido trabajadas a partir de una demostración formal). Se desea que los alumnos puedan disponer mínimamente de ideas previas que les permitan abordar la resolución del cuestionario.

Un segundo criterio es presentar propiedades que puedan relacionarse en una cadena deductiva. Así, la justificación de que la suma de los ángulos interiores del rectángulo es 360° podría basarse en la obtención de dos triángulos al trazar su diagonal. De este modo, se utilizaría la propiedad de la actividad 1 para justificar la respuesta a la actividad 3. Este segundo criterio justifica también la inclusión de definiciones de rectángulo.

Cuestionario

1) ¿Por qué la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a 180° ?

2) Elige de las siguientes definiciones de rectángulo la que te resulte más conocida:

"Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los cuatro ángulos iguales".

"Un rectángulo es un paralelogramo que tiene un ángulo recto".

3) A partir de la definición de rectángulo que elegiste, ¿a qué es igual la suma de los ángulos interiores de un rectángulo? Justifica tu respuesta.

Los sujetos a los que se administró el cuestionario abordan por primera vez en la carrera un estudio formal de la geometría euclídea en la asignatura Geometría Euclídea Plana (que como se dijo, corresponde al segundo año del



plan de estudios). Durante el primer año realizan demostraciones en otras materias (Matemática Básica, Cálculo I, Álgebra Lineal I) razón por la que tienen experiencias en la práctica de argumentar a partir de las reglas y criterios propios de la matemática. En lo que respecta a las propiedades abordadas en el cuestionario, tratándose de ideas elementales, los alumnos las conocen desde su paso por la escuela primaria (en la que es probable que hayan desarrollado una prueba empírica de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, mediante la construcción y recorte en papel para ‘comprobar’ que una vez colocados sus ángulos en forma consecutiva conforman un ángulo llano). También conocen sobradamente que el rectángulo posee los ángulos rectos. En primer o segundo año de la escuela media es probable que hayan demostrado la primera propiedad mediante el trazado de una recta paralela a un lado por el vértice opuesto (dado que se aplican las relaciones entre ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal, que se estudian en esta etapa de la escolaridad). Sin embargo, no puede desconocerse que en estos niveles, “si algo ‘se cae’ del programa por falta de tiempo es la geometría. Al punto de que nadie dudaría en promover a un alumno de quinto año de EGB a sexto por no conocer la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo” (Itzcovich, 2005; p. 109).

A partir de estas consideraciones, es de esperar que si bien es posible que en la primera administración del cuestionario a inicios del primer cuatrimestre algunos alumnos tengan dificultades en desarrollar demostraciones adecuadas (añadiendo a la ausencia de un estudio formal de la geometría los resultados reportados en investigaciones respecto de las dificultades de los alumnos para desarrollar demostraciones formales), se espera que en la segunda administración del cuestionario (al final del cuatrimestre) los sujetos dispongan de las competencias requeridas para demostrar las propiedades planteadas.

4. Estudio de respuestas

4.1. Actividad 1

1) ¿Por qué la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a 180° ?

4.1.1. Categorías de respuestas

En la tabla 1 se incluyen las categorías en que se clasificaron los procesos de validación de los estudiantes.

CATEGORÍAS	1º APLICACIÓN	2º APLICACIÓN
1. Utilización de recta paralela a un lado por vértice opuesto	5, 3, 9	1, 2, 3, 7, 9
2. Utilización de un rectángulo (en un solo caso un paralelogramo) dividido por una diagonal	5, 6, 7, 8	8
3. Utilización de propiedad de los ángulos exteriores del triángulo	4	4, 5, 6
4. Sin explicación	1, 2	

Tabla 1. Categoría de respuestas para la pregunta 1



En la primera tabla se observa una mejora en los procesos de validación relacionada con las categorías de respuesta. Por un lado, disminuye de 4 alumnos (1° aplicación) a 1 solo alumno el uso de la categoría 2. Los alumnos que utilizaron esta categoría, en su mayoría demuestran la propiedad (o intentan hacerlo) para un caso particular de triángulo: el rectángulo. Por tanto, no se demuestra el caso general. Por otro lado, en la segunda aplicación todos los alumnos intentan una justificación del resultado, en tanto que en la primera dos alumnos no habían presentado demostración.

Además, aumenta el número de alumnos que utiliza la demostración clásica (el trazado de una recta paralela a un lado por el vértice opuesto, utilizando posteriormente propiedades de los ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal). Esta demostración es la que se encuentra en el texto seguido en la asignatura (Puig Adam, 1980). La propiedad de los ángulos exteriores de los triángulos también figura en este libro de texto, y se presenta como una consecuencia de la propiedad cuya demostración se pide en la primera actividad. Por tanto, se puede observar en estos casos una mejora en el proceso de validación que se produciría como consecuencia de un aumento del conocimiento de los alumnos en torno a las propiedades geométricas.

4.1.2. Errores observados

En la tabla 2 resumimos los errores observados según la clasificación de Franchi y Rincón (2003), incluyendo una descripción de los errores y los sujetos en los que se manifiesta.

TIPO DE ERROR	IDENTIFICACIÓN DEL ERROR	1° APLICACIÓN	2° APLICACIÓN
ERROR DE RAZONAMIENTO (E.R.)	a) Hipótesis no dada: el triángulo posee un ángulo recto.	5, 6, 7, 8	8
	b) Hipótesis no dada: la suma de los ángulos interiores es la misma para todos los triángulos.	6	
	c) Uso de una propiedad sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación: la diagonal es bisectriz en el cuadrado y en el rombo, pero no en un rectángulo cualquiera.	5, 7, 8	
ERROR DE TÉCNICA (E.T.)	a) Utilización defectuosa de un algoritmo correcto: comparación errónea de ángulos.	3	
	b) Utilización de un algoritmo adecuado para la demostración pero no justifican todos los pasos (incompleto).	6, 9	6, 9
	c) Enunciado de proposiciones ciertas sin justificación.	4	
ERROR DE LENGUAJE (E.L.)	Confusión de términos.	-	2, 9

Tabla 2. Clasificación de errores en la actividad 1, 1° y 2° aplicación

En este caso, se observa que en la 2° aplicación disminuyen notablemente los errores de razonamiento (de 8 en la 1° aplicación a uno solo en la 2°). Disminuyen también los errores de técnica (de 4 a 2). En cambio, mientras que en la primera aplicación no hubo errores de lenguaje, en la segunda se observan 2.



En la tabla 3 se resume la producción de cada alumno, con el objeto de estudiar la evolución del proceso de validación.

ALUMNO	RESULTADO 1º APLICACIÓN	RESULTADO 2º APLICACIÓN
1	Cat. 4. (Sin explicación)	Cat. 1; Sin Error
2	Cat. 4. (Sin explicación)	Cat. 1; EL
3	Cat. 1; ET (a)	Cat. 1; Sin Error
4	Cat. 3; ET (c)	Cat. 3; Sin Error
5	Cat. 1. Sin justificar	Cat. 3; Sin Error
	Cat. 2; ER (a y c)	
6	Cat. 2; (con rectángulo). ER (a y b)	Cat. 3; ET (b)
	Cat. 2; (con paralelogramo) ET (b)	
7	Cat. 2; ER (a y c)	Cat. 1; Sin Error
8	Cat. 2; ER (a y c)	Cat. 2; ER (a)
9	Cat. 1; ET (b)	Cat. 1; ET (b) y EL

Tabla 3. Evolución de los procesos de validación en la actividad 1

En general, en la tabla 3 se puede observar que en todos los alumnos (salvo el sujeto 9) se observa un progreso en la justificación de la propiedad. En algunos casos, se pasa de una ausencia de justificación o justificación con errores a una demostración (en el sentido de Balacheff, 2000). Es el caso de los sujetos 1, 3, 4, 5 y 7. En otros casos, se pasa de ausencia de justificación o justificación con errores, a una justificación con menor presencia de errores (sujetos 4, 6 y 8).

4.2. Actividad 2

3) A partir de la definición de rectángulo que elegiste, ¿a que es igual la suma de los ángulos interiores de un rectángulo? Justifica tu respuesta.

4.2.1. Categorías de respuesta

En la tabla 5 se incluyen las categorías en que se clasificaron los procesos de validación de los estudiantes.

CATEGORÍAS	1º APLICACIÓN	2º APLICACIÓN
1. Consideración del rectángulo formado por dos triángulos.	1, 2, 7	2, 3, 5, 6
2. Utilización de dato adicional relacionado con la amplitud de los ángulos.	3, 4, 5	1, 5
3. Utilización de conceptos de paralelismo y perpendicularidad de lados en el rectángulo.	6, 8, 9	9
4. Utilización de propiedades del rectángulo.	-	4, 7, 8

Tabla 5. Categoría de respuestas para la pregunta 3

En general, la única categoría que está suponiendo un error es la segunda, dado que se estaría utilizando un dato no conocido relacionado con la presencia de ángulos rectos en la figura (se trata de sujetos que no han



seleccionado la definición 1, que afirma que los cuatro ángulos del rectángulo son iguales, pero no que posee algún ángulo recto).

Las restantes categorías contienen ideas adecuadas que, desarrolladas satisfactoriamente, deberían conducir a demostraciones en el sentido de Balacheff (2000). Como veremos en la tabla 6, en general no es el caso, porque se observan diversos errores en las justificaciones de los alumnos.

4.2.2. Errores observados

TIPO DE ERROR	IDENTIFICACIÓN DEL ERROR		
ERROR DE RAZONAMIENTO	a) Hipótesis no dada: el rectángulo posee un ángulo recto.	3	1
	b) Hipótesis no dada: los ángulos interiores del rectángulo son rectos.	2, 4, 5	5
	c) Construye y usa una implicación errónea (que involucra una relación entre área y suma de ángulos interiores).	7	
ERROR DE TÉCNICA	a) Enunciado de proposiciones ciertas sin justificación.	6, 8	1, 2, 3, 5, 8
ERROR DE LENGUAJE	a) Utilización inadecuada de términos geométricos.	1, 7	8 (2)
ERROR GRÁFICO	a) Toma mal un dato de una figura geométrica.	-	9

Tabla 5. Clasificación de errores

Tal como ocurre en la primera actividad, se observa una disminución de los errores de razonamiento (de 5 errores en la primera aplicación se pasa a 2 en la 2ª). Sin embargo, se observa un aumento de los errores de técnica, fundamentalmente debido a que las explicaciones son incompletas. Las justificaciones incompletas se presentan, por ejemplo, cuando se utiliza la categoría 1 y no se justifica en ningún momento que la suma de los ángulos del rectángulo se completa con la suma de los ángulos de los dos triángulos en que queda dividido el mismo al trazar una diagonal cualquiera (sujetos 1, 2, 3, 5 en la segunda aplicación). El otro caso en que se presentan justificaciones incompletas se debe a que se afirma que si un ángulo es recto, los restantes también lo son, faltando la justificación de este último hecho (sujeto 6, 1ª aplicación y sujeto 8, 1ª y 2ª aplicación).

En la 2ª aplicación se observa un error de gráfico, porque el sujeto 9 cuando debe tomar dos lados opuestos del rectángulo, considera erróneamente dos lados consecutivos. Quizá este error sea un descuido, porque la justificación es correcta salvo ese pequeño desliz.

A partir de estos resultados, no es posible afirmar que ha mejorado en general el proceso de validación de los estudiantes al finalizar el cursado de la asignatura Geometría Euclídea Plana, aunque sí es importante remarcar que han disminuido los errores de razonamiento.

Finalmente, y tal como se hizo en la actividad 1, se muestra en el cuadro 6 un resumen de la evolución de las producciones de los estudiantes.

ALUMNO	RESULTADO 1ª APLICACIÓN	RESULTADO 2ª APLICACIÓN
1	Cat. 1. EL (a)	Cat. 2; ER (a) y ET (a)
2	Cat. 1. ER (b)	Cat. 1; ET (b)



3	Cat. 1; Sin error	Cat. 1; ET (a)
	Cat. 2; ER (a)	
4	Cat. 2; ER (b)	Cat. 4; Sin Error
5	Cat. 2; ER (b)	Cat. 1; ET (a)
		Cat. 2; ER (b)
6	Cat. 3; ET (a)	Cat. 1; Sin Error
7	Cat. 1; ER (c) y EL (a)	Cat. 4; Sin Error
8	Cat. 3; ET (a)	Cat. 4; ET (a) y EL (2)
9	Cat. 3; Sin error	Cat. 3; EG

Tabla 6. Evolución de los procesos de validación en la actividad 2

Se ha observado un progreso en los procesos de validación de algunos alumnos que pasan de una justificación con errores en la 1ª aplicación a una justificación sin errores en la 2ª (sujetos 4, 6 y 7 respectivamente). El alumno 2 ha pasado de un error de razonamiento a un error de técnica (que tiene que ver con una justificación incompleta), lo que también podría considerarse un progreso.

Se observa, en cambio, un retroceso en los sujetos 1, 5, 3, 8 y 9. En algunos casos, se ha pasado de una justificación sin error a una con error (sujetos 3 y 9); en los restantes casos, ha aumentado el número de errores.

5. Reflexiones finales

En este estudio, en general, se confirman los resultados bien documentados en la bibliografía (Battista y Clements, 1995), referidos a que la actividad de demostrar resultados genera muchas dificultades en los estudiantes. En este caso, se trata de estudiantes de Profesorado de Matemática que han estado durante un cuatrimestre estudiando una asignatura (de 6 hs semanales) que supone un abordaje axiomático de la geometría euclídea plana.

Si se miran con optimismo los resultados, se puede destacar que en la actividad en la que los alumnos deben justificar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° se observa un progreso considerable, basado en una disminución de los errores en general, y de los errores de razonamiento en particular. En la segunda actividad, cuando deben desarrollar una justificación de que la suma de los ángulos interiores del rectángulo es igual a 360° , se observa también una disminución de los errores de razonamiento. Este progreso es importante, dado que los alumnos superan, en general, una dificultad bastante común, que es la utilización de hipótesis no dadas.

Sin embargo, en la segunda actividad se produce en general un retroceso en los procesos de validación. Aumentan los errores de técnica, de lenguaje y de gráfico. Los errores de estos dos últimos tipos, posiblemente, se deban a descuidos. No obstante, en los errores de técnica se observa en general un desconocimiento de que las afirmaciones deben justificarse. Quizá debido a que se trabaja con un concepto muy común para ellos (el rectángulo) se suponen como datos conocidos algunos hechos que no están dados por la definición seleccionada (aunque se podrían obtener de esta definición siguiendo un razonamiento adecuado).

En general, el estudio ha puesto de manifiesto que el desarrollo de la habilidad para realizar demostraciones requiere de una atención especial por parte de los formadores de docentes de matemática, y que el estudio con un



enfoque sistemático de la geometría euclídea durante un cuatrimestre puede ser insuficiente para superar algunas dificultades de los estudiantes.

6. Bibliografía

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.
- Battista, T. y Clements, D. (1995). *Geometry and Proof*. *The Mathematics Teacher*, 88(1), 48-53.
- Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). *La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un lugar protagónico?* *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Franchi L. y Rincón A. (2003). *Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II*. *Educere*, 8(25), 196-204. Extraído el 20 de Abril de 2006 desde <http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/educere/vol8num25/articulo8.pdf>.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: libros del Zorzal.
- Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Euler, G. Puig Ediciones.