Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N°1 (2017), páginas 9 – 21
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA RACIONALIZACIÓN

G. Bidart Gauna, G. Cabral, A. Cafure, V. Cambriglia, C. Fuentes

§1. Introducción

El proceso de racionalización de denominadores suele consistir en la transformación de una expresión con radicales en el denominador en una expresión equivalente que no los tiene. Es una técnica muy popular y extendida tanto en la enseñanza media como en instancias superiores. El ejemplo clásico

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

nos ilustra al respecto.

Como se desprende de los libros de texto (y de nuestra propia experiencia docente) los ejemplos tratados involucran expresiones con raíces cuadradas y el problema de racionalizar se lleva a cabo introduciendo el concepto de conjugado. Llegados a esta instancia ya hemos trabajado en forma profusa con todo tipo de radicales y así, un alumno podría preguntarnos si tiene sentido racionalizar la expresión

$$\frac{1}{3\sqrt[5]{2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} - 5}.$$

Surgen, a la vez, algunas preguntas: ¿por qué es necesario racionalizar?; ¿por qué motivo hemos aprendido que no es conveniente que haya radicales en el denominador?; ¿es posible racionalizar una expresión que involucre radicales de orden arbitrario?; ¿por qué incluimos la noción de conjugado en el proceso de racionalización?

El objetivo de este trabajo es dar algunas respuestas (muy parciales, para nada definitivas) mostrando ciertos errores que se deslizan en la enseñanza de estas nociones, promovidos desde los textos escolares. Entendemos que los libros de textos utilizados en la escuela media son, en cierto modo, los responsables de difundir estas malas interpretaciones. Esto nos lleva también a discutir sobre la formación de profesores: en qué medida los ámbitos de formación contribuyen a formar ideas erróneas en este contexto.

Investigación parcialmente financiada por el proyecto *"Irreducibilidad de polinomios y formación de profesores. Algunas ideas para hacer matemática"*, UNGS 30/3158, Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento.

En este artículo comenzamos recopilando diferentes abordajes de la racionalización y, en algunos casos, definiciones de la noción de conjugado, presentes en diferentes libros de texto. Nuestro recorrido por los textos se remonta a un texto de 1941 culminando con uno de 2012. Esencialmente, todos tratan los mismos problemas y, aquellos que lo hacen, proporcionan la misma definición de conjugado. Por este motivo es que la denominaremos definición escolar. A partir de ejemplos sencillos, quedarán expuestas las ambigüedades y los malos entendidos que la definición escolar acarrea. La intención de nuestro recorrido es mostrar cómo estas deficiencias pueden transformarse en obstáculos tanto didácticos como epistemológicos. Por ejemplo, la definición escolar obliga a realizar un recorte tal que es muy acotado el campo de problemas que pueden abordarse.

Posteriormente, tratamos un problema que no suele (ni puede) ser abordado en los libros estudiados. La idea es mostrar que el problema se puede traducir naturalmente al lenguaje del álgebra lineal: en concreto, resolver un sistema de ecuaciones lineales. La propuesta implícita, propone un recorte y un posible acercamiento a la resolución de estos problemas con la idea de que tengamos más herramientas para intervenir en nuestra clase, para plantear estrategias didácticas que permitan encarar este problema con una mayor comprensión y rigor.

Ante tanta uniformidad y ante la persistencia de ciertos errores nos interesa poner en cuestión los modos en que estas nociones son problematizadas durante la formación de profesores de matemática. Aquellos que escriben los textos, al igual que nosotros, son profesores de matemática egresados tantos de universidades como de ISFDs.

Finalmente, proporcionamos la definición correcta de conjugado y mostramos los contrastes evidentes con la definición escolar.

§2. Un recorrido por algunos textos escolares

Presentamos a continuación extractos de diferentes textos escolares que encaran la racionalización y la noción de conjugado. Solo indicaremos la editorial y el año en que ha sido publicado el texto, sin dar precisiones concretas sobre el título ni sobre los autores del libro.

1. Editorial Martin Industria Gráfica, 1941. Páginas 82 – 83.
El cálculo de una fracción cuyo denominador contiene raíces cuadradas es más fácil y exacto cuando éstas pasan al numerador. Esto se consigue multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la que figura en este último, es decir, por la suma de raíces si en él hay una diferencia, o por la diferencia si en él hay una suma. Así:

$$\frac{n}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{n(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}\,; \qquad \frac{n}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{n(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\,.$$

2. Editorial Labor S.A., 1949. Páginas 134 – 135.

Sabiendo que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$*, y, por lo tanto,*

$$(\sqrt{17}+3)(\sqrt{17}-3) = 17 - 9 = 8\,.$$

Hallaremos:

$$\frac{16}{\sqrt{17}+3} = \frac{16(\sqrt{17}-3)}{(\sqrt{17}+3)(\sqrt{17}-3)} = 2(\sqrt{17}-3)$$

$$\frac{5}{\sqrt{22}-\sqrt{17}} = \frac{5(\sqrt{22}-\sqrt{17})}{(\sqrt{22}-\sqrt{17})(\sqrt{22}+\sqrt{17})} = \sqrt{22}+\sqrt{17}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)}{1+x^2-x^2} = x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)\,.$$

3. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1977. Página 55 – 56**.**

Este tema no posee mayor importancia teórica, y su importancia práctica se reduce a algunos casos muy sencillos. [. . .] En general, el proceso de racionalización de denominadores tiene por objeto eliminar la presencia de radicales en los denominadores, admitiendo que puedan aparecer en los correspondientes numeradores. Se supone, en efecto, que dividir un número irracional por un número racional es prácticamente más sencillo que dividir un racional por un irracional." [. . .] Llamaremos expresión conjugada de una expresión de dos términos, a la que se obtiene de ésta cambiando el signo del segundo término. Por ejemplo, la expresión conjugada de $a+b$ *es* $a-b$*; la conjugada de* $-a-b$ *es* $-a+b$*, etc. [. . .] hemos supuesto que las letras designan números reales positivos. [. . .] se ha supuesto, además, que la expresión conjugada del denominador (por la cual se han multiplicado numerador y denominador) es distinta de cero. Esta precaución es importante, pues es posible que una expresión de dos términos sea distinta de cero, y que su conjugada sea igual a cero. Por ejemplo,* $5+5\neq 0$*, pero* $5-5=0$*.*

4. Editorial Estrada, 1986. Página 87.

Ejemplo 5. $\frac{X}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ *expresión algebraica irracional. ¿Cuál es ahora la expresión por la cual conviene multiplicar? Debemos multiplicar por una expresión tal que, en el resultado aparezcan ambos radicales elevados al cuadrado para poder simplificar. Nos apoyamos en la siguiente propiedad:* $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$*. El producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de sus cuadrados. En consecuencia, conviene multiplicar dividendo y divisor por la diferencia* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$*, pues en el divisor figura la suma* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$*.*

5. Editorial AZ, 1993. Páginas 17 – 18.

En aquellos casos en que el divisor de un cociente es un número o una expresión irracional, resulta a veces conveniente transformar a este cociente en otro equivalente de manera tal, que el divisor sea racional. Se demuestra que esta racionalización del divisor es siempre posible. $1/(\sqrt{2}-\sqrt{3})$*. [. . .] Teniendo en cuenta que* $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$ *resulta ser* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *el factor conveniente para racionalizar.*

6. Ediciones Santillana, 1999, reedición 2005. Página 36.
[...] trabajamos con fracciones, resulta conveniente que no tengan radicales en el denominador. En caso de que los contengan, a veces podemos transformarlas en otras equivalentes, que tengan denominador racional. [...] el denominador tiene dos términos y en él figura alguna raíz cuadrada. Recordemos que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$*. A las expresiones* $a+b$ *y* $a-b$ *las llamamos* **conjugadas***.*

7. Editorial Longseller, 2003. Páginas 41 – 42.
Necesitamos hacer la siguiente división: $(1+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5})$*. Para lograr simplificar esta expresión y que no aparezca el radical en el denominador, utilizamos la siguiente propiedad: [...]* $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$*. Llamamos conjugado de la expresión* $a+b$ *a la expresión* $a-b$*. [...] Para dividir dos radicales, si el denominador es de la forma* $a+b\sqrt{c}$ *ó* $a\sqrt{d}+b\sqrt{c}$*, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y utilizamos la propiedad distributiva para obtener el cociente.*

8. Tinta Fresca Ediciones, 2006. Página 20.
En una expresión algebraica o en un número que tenga por divisor a un radical puede multiplicarse dividendo y divisor por otro radical conveniente, de modo de obtener una expresión equivalente que tenga por divisor un número racional. Esta transformación se llama racionalización.

9. Ediciones Santillana, 2007. Página 41.
Si el denominador tiene dos términos y al menos uno es un radical, se multiplican numerador y denominador por la expresión llamada conjugada (el conjugado de $a+b$ *es* $a-b$*)...*

10. Editorial Estrada, 2012. Página 45.
[...] por ejemplo para hallar una expresión equivalente a $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ *podemos proceder así: multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$*.*

Varias discusiones interesantes pueden generarse a partir de lo que presentan los diferentes textos. Nos concentraremos solamente en lo que a racionalización y conjugados concierne. La motivación del problema de racionalizar es eliminar las raíces del denominador y los ejemplos que se presentan involucran raíces cuadradas. Algunos plantean la duda sobre si siempre es posible racionalizar pero no dan un ejemplo al respecto; otros afirman que es posible, multiplicando por un radical conveniente aunque sin explicitar cómo encontrarlo. Varias discusiones interesantes pueden generarse a partir de lo que presentan los diferentes textos. Nos concentraremos solamente en lo que a racionalización y conjugados concierne. La motivación del problema de racionalizar es eliminar las raíces del denominador y los ejemplos que se presentan involucran raíces cuadradas. Algunos plantean la duda sobre si siempre es posible racionalizar pero no dan un ejemplo al respecto; otros afirman que es posible, multiplicando por un radical conveniente aunque sin explicitar cómo encontrarlo.

Es razonable considerar que la noción de conjugado, o de expresión conjugada, utilizada en la escuela media y en niveles superiores de formación es consecuencia de la identidad polinomial $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$; la conocida diferencia de cuadrados. En función de estas similitudes introducimos la que denominamos *definición escolar*:

(2.1) El **conjugado** de la expresión $a+b$ es $a-b$.

Algunos comentarios con respecto a la definición escolar. La misma no está dada en términos de números sino en términos de indeterminadas («letras»), es decir, es simbólica. Aunque no se explicita, debemos asumir que es simétrica: $a-b$ debería ser el **conjugado** de $a+b$. En consecuencia, solo puede aplicarse en el caso de binomios.

Resolvamos algunos problemas como para comenzar a desentrañar los supuestos de estas definiciones.

Ejemplo 1. Vamos a racionalizar la expresión $\frac{3}{7-\sqrt{5}}$. Siguiendo los textos multiplicamos y dividimos por $7+\sqrt{5}$, la expresión conjugada de $7-\sqrt{5}$:

$$\frac{3}{7-\sqrt{5}} = \frac{3}{7-\sqrt{5}} \cdot \frac{7+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}$$

De esta manera, haciendo las cuentas correspondientes, llegamos a que

$$\frac{3}{7-\sqrt{5}} = \frac{21+3\sqrt{5}}{44} = \frac{21}{44} + \frac{3}{44}\sqrt{5}.$$

Hemos encontrado una expresión equivalente sin radicales en el denominador. ✦

En el ejemplo previo, si en lugar de multiplicar y dividir por $7+\sqrt{5}$, lo hacemos por $-7-\sqrt{5}$, también racionalizamos la expresión de partida:

$$\frac{3}{7-\sqrt{5}} = \frac{3}{7-\sqrt{5}} \cdot \frac{-7-\sqrt{5}}{-7-\sqrt{5}} = \frac{21}{44} + \frac{3}{44}\sqrt{5}.$$

Lo que hicimos corresponde a multiplicar y dividir por la expresión conjugada de $-\sqrt{5}+7$ que, según (2.1), es igual a $-\sqrt{5}-7$. Aquí nos encontramos entonces con una característica no explicitada de la definición: depende del orden de los números involucrados. Una única cantidad $7-\sqrt{5} = -\sqrt{5}+7$ posee dos expresiones conjugadas diferentes. Bien podría ser el caso, con lo cual la definición dependería del orden en que se expresa la cantidad en consideración: los textos omiten toda referencia a este hecho.

En realidad, si r representa un racional arbitrario distinto de 0 y de 1, multiplicar y dividir por $r\cdot(7+\sqrt{5})$ o por $r\cdot(-\sqrt{5}-7)$ resuelve el problema. Estos números **no** son conjugados (de acuerdo a la definición escolar) de $7-\sqrt{5}$ ni de $-\sqrt{5}-7$, respectivamente. O sea, es posible racionalizar sin apelar a la noción de conjugado. Que quede claro: si seguimos lo que indican los textos, apelando a la definición de conjugado, resolvemos el problema, pero al menos en este ejemplo no es necesario.

El ejemplo venidero plantea algunas dificultades con la definición escolar de conjugado y pone a prueba los alcances de la misma.

Ejemplo 2. Racionalizar la expresión

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}}.$$

El texto (9) nos dice que el problema se resuelve multiplicando y dividiendo por $1-2\sqrt[3]{3}$. Haciendo los cálculos correspondientes llegamos a

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{1-2\sqrt[3]{3}}{1-2\sqrt[3]{3}}=\frac{3\sqrt[3]{3}\left(1-2\sqrt[3]{3}\right)}{1-4\sqrt[3]{9}}.$$

Persisten radicales en el denominador, es decir, el método no resultó efectivo. ¿Qué ocurre entonces con la validez de la afirmación proporcionada por el texto? ¿Por qué afirman un hecho que no es cierto? Ningún texto proporcionan una definición de expresión conjugada que involucre raíces cúbicas. ✦

La definición escolar no es relevante para resolver el problema. ¿Quiénes pueden ser a y b para que el problema pueda resolverse? Las limitaciones están en su propia genésis: ha sido concebida a partir de la diferencia de cuadrados y, por lo tanto, solo es útil para eliminar raíces de índice 2^n.

Esto nos enfrenta a otro problema con la definición escolar. ¿Sólo se racionalizan binomios que contengan alguna raíz cuadrada? En lo que a la definición dada concierne, la respuesta es afirmativa. La misma tiene un campo de validez tan acotado que son muy pocos los ejemplos que se pueden tratar. Todavía no respondimos qué ocurre con el Ejemplo 2. La solución viene, nuevamente, de la mano de una identidad polinomial que suele enseñarse en la escuela media. En efecto, como un caso particular de lo que se suele denominar *sexto caso de factoreo*, aprendemos que $a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot(a^2\mp ab+b^2)$. Reemplazando a por 1 y b por $2\sqrt[3]{3}$, resulta que

$$\left(1+2\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(1^2-1\cdot 2\sqrt[3]{3}+\left(2\sqrt[3]{3}\right)^2\right)=1^3+\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3=25.$$

Esto indica el camino a seguir: multiplicar y dividir por $1-2\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}$:

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\left(1-2\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}\right)}{\left(1-2\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{36}{25}+\frac{3}{25}\sqrt[3]{3}-\frac{6}{25}\sqrt[3]{9}.$$

En este nuevo contexto, ¿la expresión conjugada de $a+b$ será a^2-ab+b^2? Si así lo fuera, entonces es evidente que ya no corresponde la idea difundida (la definición escolar ha contribuido bastante a esta difusión) de que el conjugado se obtiene cambiando algún signo $+$ ó $-$. Esta potencial definición depende del orden de los términos. ¿Deberíamos decir también que la expresión conjugada de a^2-ab+b^2 es $a+b$? Tendríamos entonces que extender la definición a expresiones que no son binomios.

En vistas de los ejemplos que se presentan en los textos -si bien está instaurado que la noción de conjugado esté vinculada a la de racionalización- la racionalización es solo consecuencia de identidades polinomiales. En vistas de nuestro ejemplo previo, se suscita otro interrogante: si la posibilidad de racionalizar depende de la posibilidad de hallar identidades polinomiales adecuadas, ¿cómo encontrarlas? Los libros de texto son fundamentales en la enseñanza, contribuyen a dar forma al relato que se narra dentro de un aula; moldean las ideas que nos hacemos los profesores sobre los conceptos matemáticos. En ocasiones, distorsionan la naturaleza de estos. Si carecemos de la posibilidad de acudir a otras fuentes que nos permitan poner en jaque ciertas usanzas muy arraigadas, nos vemos en la situación de aceptar lo que ellos afirman con los consiguientes perjuicios para la educación matemática.

Concluimos esta sección ilustrando el completo sinsentido de la definición escolar. Entendemos que estamos aportando un aspecto esencial a la discusión, pocas veces tenido en cuenta. En la definición escolar de expresión conjugada, o de conjugado, a y b funcionan como indeterminadas en un registro de carácter simbólico. Desde esta perspectiva podría admitirse la definición. (Con todo, cabe preguntarse por qué $a-b$ y no a^2-ab+b^2 es la expresión conjugada de $a+b$.) Lo que ocurre es que luego, en la práctica, a y b toman valores concretos, es decir, **dejan de ser indeterminadas para convertirse en variables**. Los ejemplos son contundentes en cuanto a lo incorrecto de este pasaje, exhibiendo las enormes debilidades de dicha definición. El pasaje tendría algún sentido si se estudiara en detalle el dominio de validez del mismo, es decir, qué tipo de valores pueden tomar a y b. Claro, esta no es una tarea que deba llevarse a cabo en la escuela media pero sí debería tener lugar en alguna instancia de la formación docente.

Al no distinguir entre **indeterminada y variable**, la definición escolar permite mostrar que **un número dado es conjugado de cualquier otro**. En efecto, sean x e y números arbitrarios (racionales, reales, complejos). Si encontramos a y b tales que $x = a+b$ e $y = a-b$, entonces x e y serán conjugados. La respuesta es

$$a = \frac{1}{2}(x+y), \qquad b = \frac{1}{2}(x-y)$$

Así, $6 = 8-2$ sería conjugado de $10 = 8+2$, también $10 = 5+5$ sería conjugado de $0 = 5-5$ y $\sqrt{2}$ conjugado de $\sqrt{3}$ tomando

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}), \qquad b = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

§3. ¿Cómo resolver el siguiente problema?

Imaginemos un problema que bien podría plantearse en una clase concreta de una escuela, el de racionalizar la siguiente expresión:

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}} \tag{3.1}$$

En la bibliografía consultada esta posibilidad no es considerada. Y no exageramos si afirmamos que nunca nos hemos topado con tal ejemplo.

Como señalamos en la sección previa, si la posibilidad de racionalizar depende de la posibilidad de hallar identidades polinomiales adecuadas, ¿cómo las encontramos? La meta debería ser el desarrollo de ideas, de métodos que propicien una ampliación del campo de problemas factibles.

Proponemos un posible camino. Con el fin de simplificar la notación escribimos $\alpha = \sqrt[3]{3}$:

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}} = \frac{3\alpha}{1+2\alpha-3\alpha^2}.$$

Sabemos que α no es racional pues es una raíz del polinomio t^3-3, que no tiene raíces racionales. Más que una identidad polinomial concreta lo que nos va a interesar es considerar α en tanto raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Esta situación será finalmente decisiva para llevar adelante un trabajo riguroso y profundo sobre la noción de conjugado.

De este simple hecho, que $\alpha^3 = 3$, se desprende que:

$$\alpha^4 = \alpha^3\alpha = 3\alpha, \qquad \alpha^5 = \alpha^3\alpha^2 = 3\alpha^2, \qquad \alpha^6 = \alpha^3\alpha^3 = 9. \tag{3.2}$$

Esto nos da a entender, nos sugiere, que cualquier operación racional (sumas y productos) de las potencias de α se puede generar como una combinación lineal racional de los elementos $1, \alpha, \alpha^2$. Lo que es necesario remarcar es que a esta altura seguir pensando el problema en términos de conjugados carece de sentido, nos vemos completamente limitados en nuestro accionar ya que no sabemos qué significa la noción en este contexto. Entonces ¿por quién debemos multiplicar el denominador para *eliminar* α? Proponemos hacerlo por una expresión de la forma $a+b\alpha+c\alpha^2$, considerando que a, b y c **deben** ser números racionales y, claro, la tarea consiste entonces en calcularlos explícitamente. Como la intención es eliminar α del denominador, nuestra esperanza es que el producto entre $1+2\alpha-3\alpha^2$ y la expresión propuesta sea un número racional: esto es lo que entendemos por eliminar α. Nuestro trabajo es determinar si existen valores racionales de a, b y c tales que

$$(1+2\alpha-3\alpha^2)\cdot(a+b\alpha+c\alpha^2) \tag{3.3}$$

sea igual a un número racional distinto de 0. Haciendo algunas cuentas y reagrupando los términos en función de las potencias de α, llegamos a que el producto (3.3) es igual a

$$(a-9b+6c)+(2a+b-9c)\alpha+(-3a+2b+c)\alpha^2. \tag{3.4}$$

Queremos que (3.3), luego (3.4), no dependa de α, es decir, que sea un número racional. Imponemos entonces que, por ejemplo, las expresiones racionales en a, b y c que multiplican a α y a α^2 sean 0 y que el término "puramente racional" $a-9b+6c$ sea igual a 1.

Estas condiciones se traducen en términos del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-9b+6c & = & 1 \\ 2a+b-9c & = & 0 \\ -3a+2b+c & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.5}$$

¡Hemos reducido el problema a resolver un sistema de ecuaciones lineales! La posibilidad de racionalizar el denominador, o sea, de eliminar α, está sujeta a que el sistema de ecuaciones posea alguna solución (racional). No está demás recordar que, usualmente, al momento de presentar los problemas de racionalización, nuestros alumnos ya han aprendido a resolver sistemas de ecuaciones lineales. Y qué mejor oportunidad para utilizar lo aprendido, en un nuevo contexto. ¿Acaso no es esta una de las situaciones en las que se pueden vincular diferentes conocimientos? Las soluciones del sistema son

$$a=-\frac{19}{164}, \qquad b=-\frac{25}{164}, \qquad c=-\frac{7}{164}$$

y, retomando (3.3), concluimos que

$$(1+2\alpha-3\alpha^2)\cdot\Big(-\frac{19}{164}-\frac{25}{164}\alpha-\frac{7}{164}\alpha^2\Big)=1.$$

Retornamos ahora al problema inicial (3.1), al que motivó la discusión de esta sección: multiplicar y dividir por $-\frac{19}{164}-\frac{25}{164}\alpha-\frac{7}{164}\alpha^2$ es una forma de obtener la solución. Resulta entonces que

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt[3]{3}}{1+2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}} &= \frac{3\alpha}{1+2\alpha-3\alpha^2}\cdot\frac{\big(-\frac{19}{164}-\frac{25}{164}\alpha-\frac{7}{164}\alpha^2\big)}{\big(-\frac{19}{164}-\frac{25}{164}\alpha-\frac{7}{164}\alpha^2\big)} \\ &= -\frac{63}{164}-\frac{27}{164}\alpha-\frac{75}{164}\alpha^2.\end{aligned}$$

Observación 3. Es de suma relevancia aclarar que las elecciones realizadas que dieron lugar al sistema (3.5), son esencialmente únicas, exceptuando que $a-9b+6c$ tome otros valores racionales. Es equivalente a mostrar que no existen a, b y c en $\mathbb{Q}$ de modo que $(2a+b-9c)\alpha+(-3a+2b+c)\alpha^2$ sea un número racional no nulo. La explicación es que no existe un polinomio de grado 2 con coeficientes racionales que tenga a α como raíz. Justamente, el polinomio de menor grado con coeficientes racionales que anula a α es t^3-3. En particular, t^3-3 es un elemento irreducible de $\mathbb{Q}[t]$.

Dejamos como un ejercicio interesante mostrar que si $d\in\mathbb{Q}$ no es un cubo perfecto en $\mathbb{Q}$ entonces no existe un polinomio de grado 2 con coeficientes racionales que tenga como raíz a $\sqrt[3]{d}$. ✧

Tenemos que advertir la profunda importancia que adquiere el tipo de coeficientes de los polinomios en consideración. Esto constituye una de las ideas fundamentales de cualquier trabajo serio que se desee emprender con los problemas presentados.

De todo lo realizado podemos concluir, sin necesidad de apelar a cálculos aproximados, que $1+2\alpha-3\alpha^2$ es distinto de 0, pues mostramos que es un número real que posee inverso multiplicativo. En última instancia, el problema de racionalizar puede enmarcarse en la búsqueda de inversos multiplicativos. Tiene completo sentido ya que como una instancia previa al tratamiento de la racionalización, tal como lo hacen los textos, se afirma que el conjunto de números reales posee una estructura de cuerpo. Más interesante aún, es que el inverso multiplicativo de $1 + 2\alpha - 3\alpha^2$ se expresa también en términos de α y α^2.

Con este ejemplo seguimos aportando evidencia acerca de la debilidad de la definición escolar de conjugado como la herramienta que sirve para racionalizar. También nos permite abandonar lentamente la idea de que racionalizar implica la utilización de identidades polinomiales y, por ende, la idea de que para obtener el conjugado de alguna expresión hay que acudir a las mismas.

Acaso lo de mayor relevancia en este contexto, es que los problemas de racionalización pueden interpretarse en términos de álgebra lineal. Existe un vínculo íntimo (es tarea fundamental desentrañarlo si estamos pensando en la formación de profesores) entre la manipulación de radicales, la irreducibilidad de polinomios con coeficientes racionales, las herramientas del álgebra lineal y noción de cuerpo de números.

En definitiva, lo desarrollado en esta sección muestra que es plausible resolver un problema arbitrario de racionalización. No estamos diciendo que sea sencillo; lo que sí esperamos haber sugerido es que el abordaje puede realizarse a través del álgebra lineal, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Entendemos que algunas de estas ideas podrían utilizarse para producir secuencias para el aula.

§4. Hacia una definición de conjugado

A fin de completar la tarea es que vamos a proporcionar la definición correcta de conjugado. Las definiciones que daremos pueden encontrarse en cualquier texto que se aboque a estudiar teoría de cuerpos, por ejemplo, el texto [2]. Un texto más abarcativo por la cantidad de tópicos que se tratan es [1]. Dado que un tratamiento profundo del tema excede el espacio de este artículo es que damos las definiciones necesarias y tratamos un par de ejemplos como para ilustrar el verdadero sentido de la noción de conjugado. Más aún, nuestras definiciones son parciales, están restringidas al caso de $\mathbb{Q}$.

Definición 4. Sea α un complejo arbitrario y $p \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Decimos que p es el *polinomio minimal* de α sobre $\mathbb{Q}$ si es mónico y de grado mínimo.

El polinomio minimal de cualquier número racional r es $p(t) = t - r$. El polinomio $p(t) = t^2 - 4t + 1$ no tiene raíces racionales, con lo cual sus raíces $\sqrt{3} + 2$ y $-\sqrt{3} + 2$ no son racionales. Por este motivo, el minimal de estos elementos sobre $\mathbb{Q}$ no puede tener grado 1. Entonces p resulta ser el polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{3} + 2$ y de $-\sqrt{3} + 2$.

Es claro que $\sqrt[3]{5}$ es raíz de $p(t) = t^3 - 5$ y que este no tiene raíces racionales. Por lo tanto, $\sqrt[3]{5}$ no es racional y su minimal sobre $\mathbb{Q}$ no puede tener grado 1. Como tampoco puede tener grado 2, consecuencia de la Observación 3, $t^3 - 5$ es el minimal de $\sqrt[3]{5}$ sobre $\mathbb{Q}$. Denotando por ω una raíz cúbica de la unidad distinta de 1, las raíces de $t^3 - 5$ son:

$$\sqrt[3]{5}, \qquad \sqrt[3]{5}\omega, \qquad \sqrt[3]{5}\omega^2.$$

Encontramos que $t^3 - 5$ también es el minimal sobre $\mathbb{Q}$ de $\sqrt[3]{5}\omega$ y de $\sqrt[3]{5}\omega^2$. Finalmente, la definición que estábamos buscando.

Definición 5. Dos complejos α y β se dicen *conjugados* sobre $\mathbb{Q}$ si tienen el mismo polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$.

Retomando los ejemplos de arriba, $\sqrt{3} + 2$ es conjugado de sí mismo y de $-\sqrt{3} + 2$. De modo similar los conjugados sobre $\mathbb{Q}$ de $\sqrt[3]{5}$ son $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}\omega$, $\sqrt[3]{5}\omega^2$. En otras palabras, un número α tiene tantos conjugados sobre $\mathbb{Q}$ como el grado del polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$. Esto ya marca una diferencia sustancial con la definición escolar. Notemos, al mismo tiempo, que con esta definición el complejo i es conjugado (sobre $\mathbb{Q}$) de $-i$ pues el polinomio $t^2 + 1$ es el minimal sobre $\mathbb{Q}$ de ambos. Es decir, aparentemente esta definición extiende la noción de conjugado de números complejos.

Aún queda pendiente estudiar cómo se calcularían los conjugados sobre $\mathbb{Q}$ de $1 + 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9}$, el denominador de (3.1). Nos encontramos entonces con el problema de calcular su polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$. En este caso no es claro cómo encontrarlo; es más, no es claro que exista algún polinomio con coeficientes racionales que lo tenga como raíz (más en general, esto nos introduce en un ámbito donde habría que determinar qué numeros reales tienen minimales sobre $\mathbb{Q}$). Las cosas empiezan a ponerse un poco más complicadas y, por ese motivo, el lector deberá confiar en lo que afirmamos. Escribiendo $\alpha = \sqrt[3]{3}$ resulta que los conjugados de $1 + 2\alpha - 3\alpha^2$ son

$$1 + 2\alpha - 3\alpha^2, \qquad 1 + 2\alpha\omega - 3\alpha^2\omega^2, \qquad 1 + 2\alpha\omega^2 - 3\alpha^2\omega^2.$$

Por supuesto, no es nada obvio que estos sean los conjugados. Asumiendo que estos los sean, de acuerdo a la Definición 5, sí podemos afirmar que bajo estas condiciones el minimal de $1 + 2\alpha - 3\alpha^2$ sobre $\mathbb{Q}$ es el polinomio

$$(t - (1 + 2\alpha - 3\alpha^2)) \cdot (t - (1 + 2\alpha\omega - 3\alpha^2\omega^2)) \cdot (t - (1 + 2\alpha\omega^2 - 3\alpha^2\omega^2)).$$

El lector puede verificar que este polinomio es igual a $t^3 - 3t^2 + 57t + 164$.

Asistimos entonces a un escenario en el cual comienzan a aparecer interrogantes sobre los alcances de las definiciones. Para poder avanzar y dar cuenta de ellos es necesario avanzar en nuestro conocimiento matemático, debemos forjar nuevas herramientas teóricas para el abordaje los mismos. En este camino deben surgir nuevas nociones matemáticas: nos adentramos en el terreno de la Teoría de Cuerpos.

§5. Conclusiones

La situación brevemente descrita a lo largo de este artículo nos lleva a la encrucijada de estar frente a un obstáculo tanto didáctico como epistemológico muy evidente. Siendo que estamos frente a él, ¿no vale la pena corregirlo? Sin dudas, nos arriesgamos a pensar que sí. Observemos que la concepción errónea del concepto de conjugado no nos brinda ninguna ventaja. Y si bien nuestra descripción es incompleta, los ejemplos muestran que no es necesaria la inclusión de dicho concepto al momento de racionalizar. Por tal motivo, las reflexiones esbozadas en este trabajo y la propuesta implícita, se basan en la convicción de que sería conveniente focalizar la idea de racionalización en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, luego, en la búsqueda de inversos multiplicativos. La definición de conjugado puede ser tratada posteriormente de manera más conveniente.

Entendemos que la mayor confusión en torno a la noción de conjugado -dejando de lado el hecho de no ser correcta y generar ambigüedades- es, como ya señalamos, el pasaje del registro simbólico en el cual a y b se desempeñan como indeterminadas al registro numérico en el cual a y b se transforman en variables.

La idea de corregir este concepto, más allá de que debemos hacerlo, se basa en el hecho de que instalarlo de manera errónea nos provoca, no sólo a nosotros, los docentes, sino también a los alumnos, un doble trabajo, innecesario por cierto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que los errores instalados son resistentes y difíciles de superar porque esto requiere una reorganización de los conocimientos que el alumno y los docentes poseemos.

Debemos comenzar a discutir entonces qué acontece en los espacios de formación, qué tipo de trabajo se despliega en torno a lo matemático que lleva a que ciertas ideas erróneas perduren a lo largo de los años. Unas palabras de Patricia Sadovsky quizás puedan ayudarnos a reflexionar al respecto. En en su libro *Enseñar Matemática hoy* [3] -en el mismo describe el estado de cosas escolar medido en términos de bimestres y trimestres, aunque sus afirmaciones pueden hacer extensivas a la formación de profesores- escribe: "…se impone un modo de trabajo según el cual los saberes solo pueden durar un cierto tiempo en la vida de la clase, ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento …pues los tiempos del aprendizaje no se rigen por la lógica de los cuatrimestres o semestres".

Agradecimientos. Los autores agradecen las observaciones realizadas por el revisor.

Referencias

[1] D. Dummit y R. Foote. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Third Edition, 2004.

[2] C. Hadlock. *Field theory and its classical problems*. The Mathematical Association of America, 1978.

[3] P. Sadovsky. *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

Gastón Bidart Gauna
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento.
J. M. Gutiérrez 1150 (1613), Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.
(✉) gbidartgauna@hotmail.com

Gastón Cabral
Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento.
J. M. Gutiérrez 1150 (1613), Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.
(✉) ga_cabral@yahoo.com.ar

Antonio Cafure
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento.
J. M. Gutiérrez 1150 (1613), Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.
Departamento de Matemática, Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires.
Ciudad Universitaria, Pabellón III (1428), Buenos Aires, Argentina.
CONICET.
(✉) acafure@ungs.edu.ar

Verónica Cambriglia
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento.
J. M. Gutiérrez 1150 (1613), Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.
CCPEMS*, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires*
Ciudad Universitaria, Pabellón II (1428), Buenos Aires, Argentina.
(✉) vcambrig@ungs.edu.ar

Carlos Fuentes
Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento.
J. M. Gutiérrez 1150 (1613), Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.
Departamento de Matemática, Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires.
Ciudad Universitaria, Pabellón III (1428) Buenos Aires, Argentina.
(✉) cfuentes22@yahoo.com

Recibido: *4 de abril de 2017*.
Aceptado: *29 de abril de 2017*.
Publicado en línea: *12 de junio de 2017*.

¿Siempre conviene racionalizar?

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

El álgebra, que dio sus primeros pasos en la Babilonia antigua constituye hoy un lenguaje que se usa en todas las ramas de la matemática y regula la formación de patrones en el mundo natural.

Fueron los árabes los que sistematizaron esta rama troncal de la matemática, tomando parte de la herencia de la antigüedad al rescatar el saber griego y el saber de Oriente. El matemático persa Al-Khowarizmi (780 – ca. 850), de cuyo nombre provienen las palabras *algoritmo* (que ahora quiere decir "receta" o "método" de resolución) y *guarismo* ("número", "cifra"), fue el que a través de su libro *Hisāb al-jabr wa'l muqābala* (más conocido simplemente por *Al-jabr*, de donde deriva la palabra *álgebra*) sistematizó, fiel a lo que su nombre significó luego, las recetas, fórmulas, reglas y procedimientos para resolver ecuaciones. Este libro fue con el que Europa aprendió el álgebra y es por él que se inmortalizó su nombre. En su prólogo en árabe nos dice que el califa, rey de los creyentes, lo animó a

> *"...componer una obra breve,... limitándose a lo que es a la vez más fácil y más útil... y lo que los hombres necesitan en los casos de herencias, legados, particiones, pleitos, así como en el comercio... o donde se necesitan mediciones de tierras, excavaciones de canales, cálculos geométricos y otros asuntos..."*

Tal vez la motivación de racionalizar denominadores, es muy posterior a estos comienzos y surgió ante la necesidad de poder estimar numéricamente el valor de expresiones tales como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,4142}{2} = 0,7071 \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2 \approx 4,2360.$$

Estas expresiones, cuando los calculistas se ayudaban con tablas, se estimaban mejor con sus expresiones equivalentes después de haber sido racionalizadas. La aparición de nuevas herramientas de cálculo pone en cuestión la necesidad práctica de racionalizar denominadores.

Sin embargo hay expresiones que merecen verse en su forma equivalente para poder ser tratadas, incluso en el sentido inverso al de racionalizar. Por ejemplo, si se desea calcular el límite en el infinito de la función

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - x},$$

la indeterminación que se presenta en su tratamiento directo se salva escribiendo su equivalente no racionalizado:

$$f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

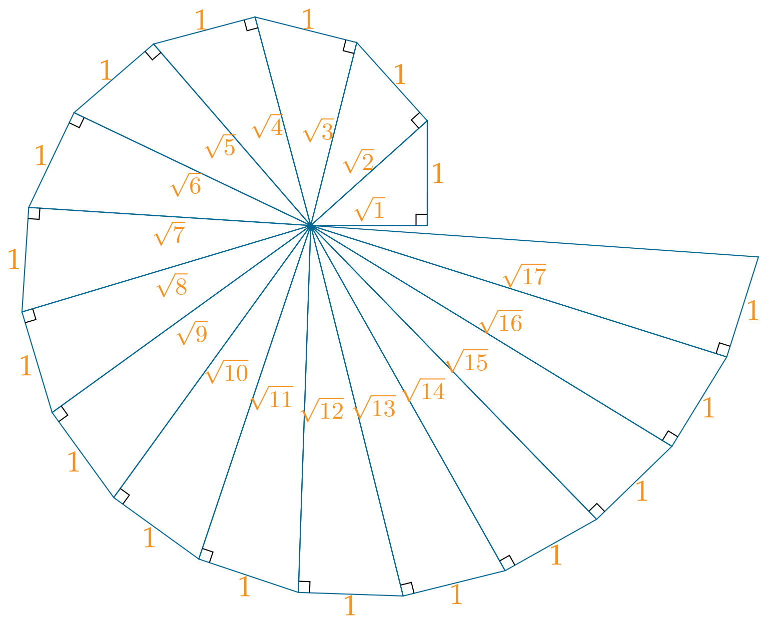
Pero entonces, ¿conviene o no racionalizar? Como hemos visto, esto no siempre resulta conveniente. Cuándo y para qué racionalizar dependerá del tipo de problema que estemos tratando de resolver.

¿Sabías que...?

por Ricardo Podestá

¡Se puede construir con regla y compás cualquier raíz cuadrada a partir del segmento unidad usando el Teorema de Pitágoras!

En efecto, lo hacemos por iteración. Comenzamos con el triángulo rectángulo de catetos de largo 1 y tenemos la hipotenusa de largo $\sqrt{2}$. Tomando a ésta como base de un nuevo triángulo rectángulo con cateto menor de largo 1 obtenemos la hipotenusa de longitud $\sqrt{3}$. Y seguimos así. Por ejemplo, si queremos dibujar con regla y compás el número $\sqrt{17}$ hacemos lo siguiente



A esta famosa espiral se la conoce como la *espiral de Teodoro*, en honor a Teodoro de Cirene (465 ac – 398 ac) quien la introdujo para estudiar la irracionalidad de los números $\sqrt{n}$ con n no cuadrado.