DIFERENTES PERSPECTIVAS EN EL ABORDAJE DEL CÁLCULO INFINITESIMAL ESCOLAR

Verónica Molfino – Yacir Testa
Departamento de Matemática de Formación Docente,
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay
veromolfino@gmail.com, milefede2@adinet.com.uy

Nivel educativo: Medio Superior – Formación docente

Resumen

El minicurso busca plantear una discusión entre con los asistentes acerca de los diferentes abordajes del Cálculo infinitesimal. Se explicitan características de lo que hemos denominado “modelo tradicional en la enseñanza del cálculo” y se proponen actividades que invitan a la reflexión sobre otro tipo de abordajes, específicamente en lo que hace a la construcción del concepto de derivada. A partir de ellas se presentan los modelos teóricos que sustentan tales abordajes, así como algunas propuestas concretas para ser llevadas al aula.

Evolución en la Didáctica de la Matemática

“Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte, y como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pág 71). Esta concepción clásica de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática viene de la mano de una didáctica que considera sólo dos focos, el alumno y el profesor, los saberes matemáticos utilizados no forman parte de su estudio, son transparentes, no se cuestionan a la luz de los hechos didácticos; así como también son nociones transparentes “aprender matemática” y “enseñar matemática”. La matemática se ve como “un paquete de conocimientos”, ya elaborado, que debe ser transmitido a los estudiantes.

A pesar de las numerosas evidencias sobre el fracaso de esta concepción en la búsqueda de soluciones al problema de la Enseñanza de la Matemática, ésta aún sigue presente en muchas aulas “hay que reconocer sin embargo que el enfoque pedagógico conserva aún gran parte de su crédito y paraliza el progreso hacia enfoque más eficaces” (Gascón, 2003).

La didáctica fundamental, que nace en la década ‘70 con Brousseau, amplía la problemática anterior al incluir como tercer foco de estudio al “saber matemático”, las nociones como aprender y enseñar matemáticas, los conceptos matemáticos, dejan de ser nociones “transparentes” para convertirse en otro de los objetos de estudio de esta didáctica, se produce una ruptura con los modelos epistemológicos ingenuos. Se adopta un enfoque sistémico, ya que estudia las relaciones que se dan entre los tres focos: el que enseña, el que aprende y el saber a enseñar.

Este enfoque viene de la mano de la problematización de cuestiones como qué es la matemática, qué es enseñar matemática, qué es aprender matemática. El objetivo no es sólo conocer y profundizar en distintas teorías sobre este tema, sino también hacer surgir y explicitar las concepciones que quienes enseñan matemática tienen sobre estos conceptos. Poder hacer explícitas nuestras concepciones permitiría considerar la incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, como muestran los estudios de Gascón (2001), y analizarlas críticamente para poder tomar una postura conciente y fundamentada.

La didáctica fundamental da cabida a los resultados de un proceso de cambio en el área, al enfoque sistémico, al estudio de las relaciones que allí se producen, entre otros. El siguiente esquema realizado por (Ruiz, 2000) representa el sistema didáctico (Chevallard, 1991).

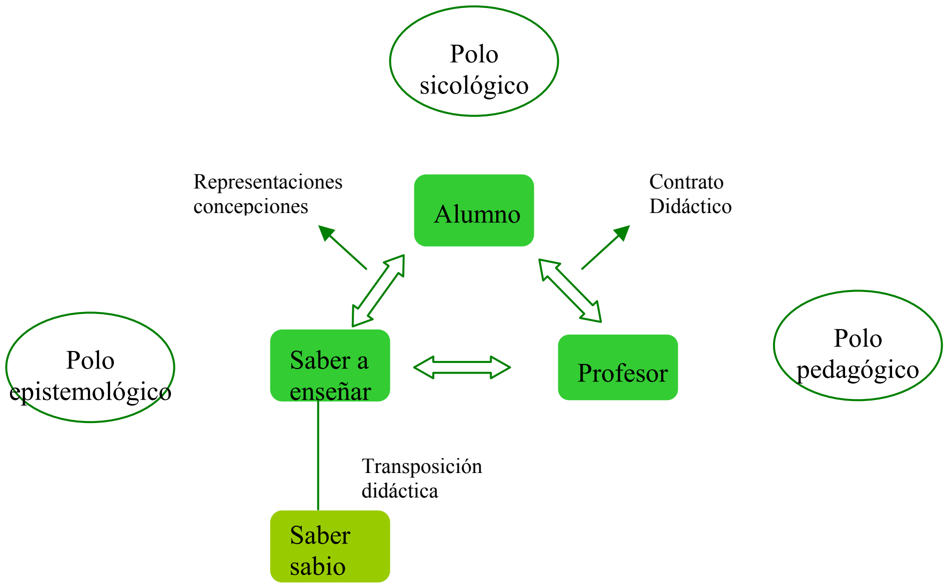

Figura 1: Sistema didáctico. (Ruiz, 2000, p. 2)

Al incorporar el saber matemático como foco de estudio se produce una confrontación entre las obras matemáticas y las matemáticas escolares (Chevallard, 1991), lo cual se ha representado en el esquema anterior. La Didáctica de la Matemática permitirá analizar las diferencias y relaciones entre ambas obras, ya que en general los futuros docentes no son concientes de ellas y creen que solamente secuenciando adecuadamente los contenidos de los currículos el conocimiento puede ser "llevado" al aula. "Se ignora la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación a las instituciones didácticas, suponiendo implícitamente que dicha adaptación solo puede consistir en una imitación más o menos fiel de las obras matemáticas tal y como fueron producidas" (Chevallard, et al., 1997).

Podemos considerar dos etapas en este proceso que transforma un objeto de saber a enseñar[5] en un objeto de enseñanza, que Chevallard (1991) llama "transposición didáctica". Primero cuando el matemático quiere comunicar, compartir, el conocimiento que ha producido a la comunidad científica, debe despersonalizarlo, descontextualizarlos, linealizarlo para transformarlo en un saber comunicable al que Chevallard llama saber sabio o erudito. La segunda etapa es cuando este conocimiento es llevado al aula, se carga de intencionalidad, sufre un proceso de personalización, contextualización, temporalización, "el profesor debe "rehacer" las matemáticas conocidas buscando los tipos de problemas que le permiten resolver, qué tipo de cuestiones conducen a plantearse, cómo se puede mejorar su eficacia y su presentación" (Brousseau, 1989). Luego cada estudiante debe nuevamente despersonalizar el saber para poder usarlo en otras circunstancias pasando a ser un saber cultural.

Una aproximación sistémica

La aproximación socioepistemológica del aprendizaje enriquece esta visión, no cree que aprender matemáticas sea una mera copia del exterior, sino que "... los procesos mentales humanos poseen una

[5] Que proviene de un saber erudito validado por la noosfera (Chavallard, 1997).

relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. De modo que se presenta un marco según el cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos” (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza y Rodríguez, 2000). Esto lleva a considerar la aproximación sistémica inserta en un medio que influye, y es influido, por los tres polos. Los fenómenos didácticos, en la aproximación sistémica de la sociepistemología, se estudian desde los tres polos, todos considerados en un medio determinado.

Es desde esta perspectiva que se reconoce la diferencia entre el Cálculo como saber construido en ámbitos científicos y el Cálculo escolar, con una intencionalidad didáctica específica pero no siempre explícita, y que surge el interés por analizar el estatus del cálculo en las instituciones educativas. Esta perspectiva permite entender la coexistencia en el sistema escolar de por lo menos dos concepciones subyacentes al Cálculo escolar: por un lado, aquélla más cercana a lo que es el Cálculo como saber, con conceptos y definiciones explícitas y centrada básicamente en los conceptos de continuidad, derivada e integral en base al de límite. Y por otro lado aquella que enfatiza el carácter intencional didáctico, en la cual subyacen categorías implícitas y que se centra en los significados situacionales de los conceptos del anterior: predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006).

Los análisis socioepistemológicos han demostrado que el abordaje algorítmico formal que responde a la primera de las concepciones señaladas y que es tradicional en el ámbito escolar, ha fracasado. Desde otras líneas de investigación se ha reportado el mismo fracaso, la diferencia de la perspectiva socioepistemológica radica en las alternativas que propone: en lugar de buscar abordajes diferentes del concepto, busca concepciones alternativas del Cálculo en su conjunto (Cordero, 2006).

El modelo tradicional en la enseñanza del Cálculo

Alanís (1996) distingue entre dos tipos tradicionales de enseñanza del cálculo: una centrada en los conceptos, que asume que el aprendizaje se produce si se presentan los contenidos formal y rigurosamente, y otra que se centra en la práctica algorítmica y algebraica. Ambos abordajes componen lo que Salinas y Alanís identifican como “modelo tradicional de enseñanza del cálculo” (2009, p. 357).

En este modelo el contenido matemático se presenta estructurado de manera formal –atendiendo a las formas, sin significados reales asociados con las nociones y procedimientos del cálculo- y rigurosa –organizados según la secuencia definición-teorema-demostración. A continuación de esta presentación se estudian aplicaciones del contenido matemático expuesto. Esta presentación es muy parecida a lo que se puede ver en los libros de texto tradicionales. La estrategia de enseñanza se limita a una exhibición de la estructura por parte del profesor. Se cuida el orden lógico de la presentación: “…para enseñar la derivada habrá que enseñar antes límites (porque la derivada es un límite) y para enseñar límites habrá que enseñar antes funciones (porque los límites son de funciones) y para enseñar funciones habrá que enseñar antes los números reales (porque son funciones de variable real).” (Salinas y Alanís, 2009, p. 362).

El estudiante ocupa un rol pasivo, y su aprendizaje es evaluado a través del dominio de técnicas: cálculo de límites y derivadas, aplicaciones rutinarias de la derivada, todas actividades que priorizan aspectos algorítmicos.

Abordajes alternativos

Alanís (1996) presenta como alternativa una idea promovida por el grupo de trabajo del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), y que en estos años se ha visto robustecida por un sinnúmero de investigaciones. Las premisas que guían al mismo son, en primer lugar, la consideración del estudiante como un usuario de la temática, lo que implica no sólo la consideración del contexto en el que está inmerso sino también la del contexto en el que surge el conocimiento y cómo ello puede favorecer para el diseño del discurso matemático escolar. En segundo lugar, se remarca la necesidad de una adecuada integración a la vida escolar de la historia de la matemática. También enfatiza la necesidad de analizar la historia de la *enseñanza* del cálculo y por último se hace hincapié en lo inapropiado de las aproximaciones teóricas formales, que sólo alejan al cálculo de su carácter instrumental que aparece como objetivo principal en los currículos.

Este movimiento fue el que dio pie para la conformación de lo que más recientemente se plantea como un abordaje alternativo del Cálculo en su conjunto, o la consideración de "otros" Cálculos, con referencia a la estructuración del Cálculo en torno a los mencionados significados situacionales de predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006). El trabajo de Alanís (1996) es un ejemplo de cómo estructurar un curso en torno a la predicción, tomando en particular como hilo conductor la predicción de la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta y trabajando en base a problemas extramatemáticos.

Atendiendo a esta última concepción es que se han venido desarrollando diversas aproximaciones dentro de la línea de investigación socioepistemológica del Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Seleccionamos tres aportes que creemos representativos de tal línea de investigación, y que presentan propuestas educativas concretas. Dos de ellos (Cantoral y Montiel, 2001 y Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2003) se presentan como libros de texto para estudiantes, con explícitas recomendaciones para el docente. El tercero (Dolores, 2007) presenta toda una investigación cuyo objetivo es aportar los elementos fundamentales que puedan constituirse en una alternativa didáctica para el tratamiento del Cálculo Diferencial en el bachillerato (Dolores, 2007, p. 5). En el quinto capítulo del libro se presentan elementos para esa propuesta alternativa y en el sexto y último se analiza una experiencia escolar concreta.

En Contoral y Montiel (2001) se presenta una forma de tratamiento escolar de las funciones con base en resultados de estudios de su grupo de investigación. Se ubica a la visualización de las funciones reales de variable real como una herramienta para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y ayudar a los profesores en el diseño y análisis de actividades de aprendizaje. Así, la graficación no se presenta como un fin en sí mismo sino como una forma particular de visualización de procedimientos y conceptos matemáticos. Se entiende a la visualización como un proceso del pensamiento matemático.

Los conceptos que tradicionalmente estructuran un curso de Cálculo –límites, continuidad, derivabilidad, integrabilidad– no son tratados como tales en este libro, sino que se analizan sus consecuencias gráficas en función de los parámetros de las familias de funciones estudiadas: "inclinación", "abertura", "desplazamiento", "alargamiento", etc.

Salinas et al. (2003) proponen una reconstrucción en el sentido de incluir ideas y nociones ausentes del discurso tradicional del Cálculo, originadas en investigaciones epistemológicas que los condujeron a indagar sobre el ambiente problemático en el que se desarrollaron tales ideas y nociones. Así, su propuesta para el aprendizaje del Cálculo parte de la presentación de situaciones problemáticas, en ocasiones las mismas que se encuentran en la génesis de cada concepto. Su idea es que la reflexión, análisis y discusión de las ideas generadas en la búsqueda de soluciones permitan la construcción de un conocimiento relevante del Cálculo.

Proponen una secuencia de seis unidades que, recorridas en forma de espiral, permitan iniciar y terminar en un mismo lugar: la solución de problemas.

En el siguiente esquema sintetizan el desarrollo del libro:

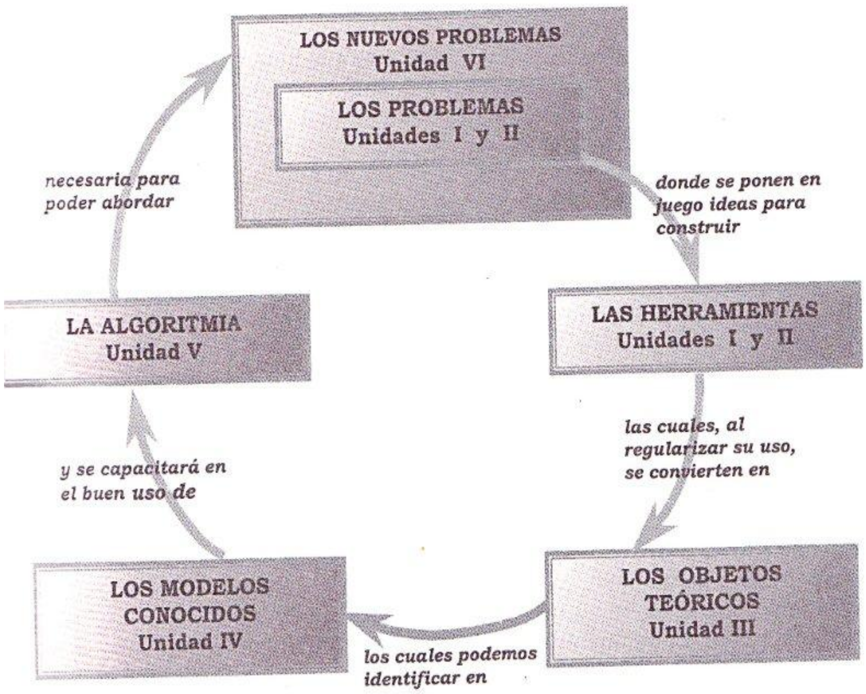

Figura 2: Desarrollo temático del libro *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* (Salinas et al., 2003, p. 7)

Por su parte, Dolores (2007) propone un abordaje alternativo que tiene como uno de sus puntos de partida a las investigaciones sobre historia de la Matemática. Se propone rescatar así, por un lado, el uso de los infinitesimales, "acercamiento geométrico a la derivada [que] incorpora las nociones básicas de la línea de trabajo iniciada por los griegos de la antigüedad, continuada por Descartes, Fermat, Barrow (entre otros) y culminada por Leibniz, considerado uno de los creadores del cálculo." (Dolores, 2007, p. 5). Por otro lado, se utiliza como insumo para la construcción de conocimiento los aportes del campo de la mecánica, a través de sus estudios sobre los fenómenos de variación. En esta línea de trabajo el autor ubica a los trabajos de Galileo, Torricelli, Roverbal y finalmente Newton.

Específicamente Dolores (2007) propone:

> “elaborar introducciones intuitivas e informales al CD que no necesariamente se sujeten a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, que desarrollen ideas variacionales que posibiliten la comprensión de sus conceptos fundamentales; ubicar como *eje rector* de todo el curso de CD al estudio de la variación de modo que la derivada no venga siendo un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.” (p. 54).

El autor busca con este planteo que el conocimiento se genere en contextos prácticos o de aplicación, en lugar de construir conocimiento en forma abstracta para después buscarle su aplicación.

Propuesta del minicurso

En el mini curso se trabajarán actividades que permitirán vivenciar otros acercamientos al Cálculo, en especial al concepto de derivada, para luego reflexionar sobre los procesos y aprendizajes que conllevan. Luego se presentará el marco teórico general que subyace en este nuevo enfoque, las aproximaciones realizadas por distintos investigadores en Matemática Educativa y resultados de distintos estudios e investigaciones realizadas en Uruguay sobre concepciones de los estudiantes respecto a distintos conceptos del Cálculo.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R.-M., Garza, A., Rodríguez, R. (2000). Desarrollo del pensamiento matemático. Editorial Trillas. México.

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. (Primera parte), *Suma*, 4, 5-12.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Chevallard*, Y. (1991). La transposición didáctica: del* saber sabio *al* saber *enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica. En Cantoral R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Dolores Flores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2003). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16 (1)*, 11-25.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza – aprendizaje. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14, pp 122-130.

Salinas, P. Alanís, J. Pulido, R. Santos, F. Escobedo, J. y Garza, J. (2003). *Elementos del cáluclo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas.