


REVISTA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Volumen 33, N°1 (2018), páginas 27 – 42 
Unión Matemática Argentina - FAMAF (UNC)

USO DIDÁCTICO DEL ERROR: UNA EXPERIENCIA DE AULA

V. Messina, S. Seminara, S. del Puerto, T. Gil, C. Pano.

§1. Introducción

Uno de los obstáculos con los que se encuentra un estudiante para comprender un asunto matemático tiene que ver con la aparición de los que comúnmente se denominan errores. Éstos pueden ser desde la falta de una tilde necesaria sobre la letra de una palabra hasta afirmaciones sin sustento lógico, pasando por cálculos incorrectos y razonamientos inesperados. Los alumnos comenten errores en los exámenes, en los escritos que producen o presentan, y en las respuestas a las preguntas que, como docentes, les hacemos.

Pero no sólo los estudiantes cometen errores: los profesores no estamos exentos de hacerlo y también los libros de texto los contienen.

Desde el año 2013 llevamos a cabo un proyecto sobre alfabetización académica con alumnos de Álgebra y Geometría Analítica, asignatura del primer año de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires. Para realizar una actividad en el marco de ese trabajo, elegimos el capítulo sobre secciones cónicas de un libro de texto (Kozak, Pastorelli, y Vardanega, 2007), con la intención de que los estudiantes lo leyeran, para luego realizar algunas tareas de escritura. Al revisarlo nosotros para preparar la actividad, descubrimos errores en una cantidad que nos llamó la atención; muchos de esos errores eran de tipeo, pero también encontramos algunos errores de cálculo, omisiones, etiquetas equivocadas en algunos gráficos, etc. Nos preguntamos qué hacer con esos errores, y cómo podrían incidir en la lectura comprensiva que debían hacer nuestros alumnos. Comenzamos entonces a indagar sobre los errores en libros de texto y nos encontramos con que son más frecuentes de lo que pensamos.

El tema tiene, incluso, trascendencia en los medios de comunicación. Por ejemplo, Excélsior, el portal de noticias líder en México, publicó el 9 de agosto de 2013:

Los libros de texto que el próximo 19 de agosto recibirán los 26 millones de alumnos de preescolar, primaria y secundaria del país tienen imprecisiones que van desde errores ortográficos y dedazos, hasta instrucciones incorrectas.

Tal como lo señaló el pasado 30 de julio la subsecretaria de Educación Básica, Alba Martínez Olivé, los textos que son la base académica para las clases diarias de los niños y en los que se basan los maestros "tienen defectos", porque no sólo hay palabras mal escritas, sino que también presentan errores de diversos tipos (Hernández, 2013).

La edición en línea de La República, un conocido diario peruano, publicó el 12 de mayo del mismo año:

Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país.

Según Panorama, libros elaborados por el Grupo Editorial Córdova tienen cuantiosos y groseros errores en sus textos escolares. Un reportaje de Panorama **denunció la calidad** de la serie de libros "Mentemati", del **Grupo Editorial Córdova**, para alumnos de todos los niveles de educación primaria. En estos libros se ha encontrado gran cantidad de **errores matemáticos y ortográficos** en casi **todas las páginas**. (Redacción LR, 2013; las negritas son del original).

También en el ámbito académico se ha estudiado e investigado el tema. En un artículo de Fernández Palop, Caballero García, Fernández Bravo y Cela (2013) se puede leer:

Analizando libros de texto de Matemáticas de 6º de Educación Primaria de las cuatro editoriales más utilizadas en la Comunidad de Madrid, encontramos lo siguiente:

En la exposición de contenidos, vemos errores de concepto, descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos en los que se han omitido condiciones de restricción y aparecen como generales...

En los ejercicios resueltos, encontramos respuestas en las que el razonamiento que se lleva a cabo es contrario al razonamiento lógico, o bien que se pretende aplicar un concepto erróneo...

Por último, en los ejercicios propuestos, vemos problemas mal definidos (Noda Herrera, 2000; Simon, 1973), que pueden ser interpretados de varios modos con distintas soluciones y en la guía didáctica aparece una única solución; o que carecen de los datos necesarios para ser resueltos y en la guía didáctica se utilizan dichos datos; o bien en los que aparecen símbolos matemáticos utilizados con un significado distinto del que la matemática dicta, o cuyo enunciado es absurdo o sin solución y en la guía didáctica aparece una solución... (p. 133).

Estos últimos autores exponen ejemplos de errores encontrados, justifican en cada caso su condición de error y los ordenan según una serie de características.

Beyer (2014), en un extenso artículo acerca de los errores, malentendidos y obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, escribió:

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, alguno de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas venezolanas (p. 15).

Este autor muestra una serie de casos donde exhibe los errores y explica en qué consiste la equivocación. También presenta varias clasificaciones de los errores y expone algunas estrategias para enfrentarlos con los alumnos.

El error es intrínseco a toda producción humana y no puede soslayarse su presencia. En los procesos de enseñanza y aprendizaje, docentes y alumnos convivimos con el error.

En una práctica educativa tradicional, que pretende dirigir sus acciones fundamentalmente hacia la obtención de resultados exitosos, el error es considerado como algo punible, que debe erradicarse; es un estorbo para alcanzar la meta cuando lo que importa es el resultado. De la Torre (2013) propone, sin embargo, una visión diferente:

Otra cosa es que veamos el aprendizaje, la formación, como un proceso en el que la característica principal sea la indeterminación. En este sentido, el error acompaña al proceso. Las intervenciones del profesor no pretenden allanar el camino de dificultades, ni evitar los errores, ni provocarlos, **sino utilizarlos cuando surgen** (p. 32; las negritas son nuestras).

Visto de este modo, y en lo que respecta a las producciones de los alumnos, el error adquiere las características de un "signo", un "llamado de atención" que amerita una consideración más positiva, como revelador de dificultades y orientador a la hora de tomar decisiones sobre la introducción de cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La utilización didáctica del error como situación de aprendizaje está en sintonía con esta orientación, y son numerosos los trabajos de investigación sobre el uso positivo de estos errores. En particular, miembros de nuestro grupo de trabajo han realizado varias experiencias en este sentido (del Puerto et al., 2004, 2005, 2006).

Pero como hemos señalado, los errores no son patrimonio exclusivo de los estudiantes, los errores en los libros de texto parecen ser inevitables. Errores de todo tipo escapan a los correctores, en la vertiginosa carrera por publicar las obras que demanda un sistema educativo en permanente expansión. Los imperativos de productividad y competitividad han alcanzado también a la industria editorial. Este negocio no evadió la lógica ecuación "deducción de costos y aumento de la producción = mayores ganancias" y, como consecuencia, se debilitaron los controles de calidad editorial (Senz Bueno, 2005).

Ante esta realidad, varios autores (Whiting, 1991; Slisko, 1995; Campanario, 2001, 2003) han sugerido sacar provecho de estos errores utilizándolos como elementos de trabajo en el aula, para estimular el desarrollo de capacidades metacognitivas de control y autoevaluación de la comprensión. Macías et al. (2007) pasan revista a algunos de estos trabajos. En términos más generales, Briceño (2009), al referirse al uso didáctico del error, realiza una interesante síntesis:

Desde la perspectiva constructivista y cognitivista, el error es una importante fuente de aprendizaje en tanto sirva como catalizador de la duda, la autocrítica, la reflexión, el desequilibrio cognitivo y la toma de conciencia acerca de las contradicciones. Tanto el error como el fracaso son elementos concomitantes en el aprendizaje y la adquisición de nuevos conocimientos, puesto que un error visto más como un gestor de conocimiento u organizador didáctico reflexivo que como un elemento negativo sinónimo del fracaso, es un elemento positivo generador de nuevos aprendizajes (p. 22).

Detectar errores en un texto, e intentar remediarlos, puede resultar una tarea enriquecedora para el alumno ya que pone a prueba hasta qué punto ha comprendido los nuevos contenidos.

§2. Nuestra experiencia

Atendiendo a este hecho, y en virtud de los errores detectados en el texto seleccionado sobre secciones cónicas, decidimos diseñar una tarea para que los alumnos trabajaran tratando de detectarlos y corregirlos, luego de haber recibido clases tradicionales (expositivas) sobre los contenidos involucrados. Seleccionamos dos párrafos del capítulo, divididos cada uno en dos secciones, con la consigna de que descubrieran y marcaran errores y reescribieran el texto correctamente. La experiencia se llevó a cabo con un grupo de 36 alumnos de primer año de Ingeniería Química, agrupados por parejas, durante dos clases de Álgebra y Geometría Analítica, en el primer cuatrimestre de 2015.

En las Figuras 1 y 2 mostramos las dos consignas dadas a los alumnos (una por clase) y en las Figuras 3 y 4, algunas de las respuestas obtenidas.

La docente presente en el aula pudo observar cómo los alumnos discutían con entusiasmo para marcar los posibles errores, y revisaban en detalle los apuntes de clase, para corroborar si sus correcciones eran atinadas. La mayor parte de los errores fueron detectados por un alto porcentaje de las parejas; los estudiantes manifestaban muchas dudas antes de marcar cada error y les costaba menos rehacer correctamente los desarrollos. Ante la duda, varias parejas marcaron como errores cosas que eran correctas. No contamos con datos que den cuenta de las causas de este tipo de decisiones; hubiera sido interesante indagar y profundizar sobre este aspecto.

En el ejercicio incluido en la Figura 1 hay un error de intercalación de un "0" en un lugar que no corresponde y algunos errores tipográficos por ausencia del signo menos. Presumimos que serían detectados por todos los alumnos a partir de una lectura atenta, sin embargo, un 25 % de las parejas de alumnos no los advirtió, según creemos, porque la interpretación global del texto es posible aún con estos errores. Luego hay un error de cálculo, que es arrastrado a lo largo de todo el desarrollo posterior. Esto conduce a una errónea determinación de la posición del foco de la parábola y de la ecuación de la recta directriz, y que se vuelca en el gráfico correspondiente; en este caso un 83 % de las parejas descubrió los errores en el desarrollo y un 67 % advirtió y corrigió el error en el gráfico.

Trabajo práctico: Ecuación de la parábola.

El siguiente desarrollo, extraído de un libro de texto de Álgebra y Geometría Analítica, contiene varios errores. Algunos son simples errores de tipeo, pero otros son errores de cálculo, que conducen a conclusiones equivocadas.

Les pedimos que lo revisen con detalle, descubran los errores, y reescriban el desarrollo de manera correcta, subrayando o resaltando en color las correcciones.

No olviden revisar también el gráfico.

Pueden consultar los apuntes de clase o un libro de texto si lo desean.

Ejemplo 18

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución

Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x-h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ o a $y-k = \frac{(x-h)^2}{4c}$

Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = 8x - 13 \Rightarrow$

$$4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4 \Rightarrow$$

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x-h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda

Figura 3-57

ecuación es un caso particular de la primera, donde

$$h = -\frac{1}{2}; \quad k = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 4c = \frac{-1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{8}$$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco

$F = (h+c; k) = \left(-\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = -\frac{3}{8}$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

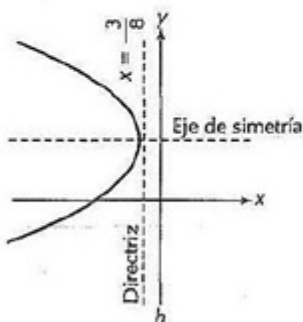


FIGURA 1. La primera tarea de corrección propuesta a los alumnos.

Trabajo Práctico: Ecuaciones de parábola e hipérbola.

Como vimos la clase pasada, en los libros a veces encontramos errores...

¿Puedes analizar las siguientes resoluciones, tomadas de un texto de la materia, para ver si son correctas o contienen equivocaciones? En caso de encontrarlas, te pedimos que las resaltes en color y las reescribas correctamente.

Puedes consultar tus apuntes de clase, o la bibliografía, si lo necesitas.

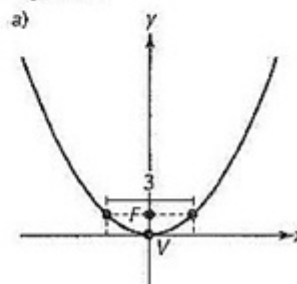
Ejemplo 21 a) Determinar una ecuación para la parábola del primer gráfico de la figura 3-61, dar su foco y su directriz.

Solución

a) La parábola tiene vértice en el origen y su eje focal es coincidente con el eje y. Luego la ecuación ordinaria es $y = \frac{x^2}{4c}$. A partir de la figura, su lado recto es 3 (o dos puntos de la parábola son $(\pm \frac{3}{2}; c)$) y $c > 0$ (la parábola abre hacia arriba).

Al utilizar estos datos resulta que $4c = 3$; $c = \frac{3}{4}$. Luego, una ecuación de la parábola es $y = \frac{x^2}{3}$ (o bien $3y = x^2$). Su foco es $F = (c; 0) = (\frac{3}{4}; 0)$, y su directriz $y = -c$; $y = -\frac{3}{4}$

Figura 3-61



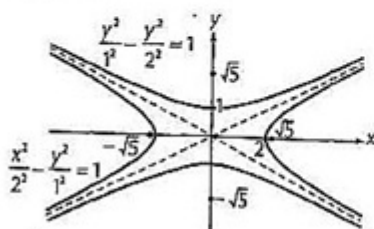
Ejemplo 26 Graficar las hipérbolas $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ y $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y sus asíntotas. Determinar la hipérbola de mayor excentricidad.

Solución

Escritas en su forma canónica son $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ y $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$. Tienen asíntotas; $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, $y = \pm 0.5x$ (son hipérbolas conjugadas).

La distancia del centro al foco (para ambas) es $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Figura 3-75



La hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$

La hipérbola $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$

Es la de mayor excentricidad.

En el caso de la elipse, la excentricidad será mayor cuanto más se acerque el foco al vértice homólogo. En las hipérbolas, cuanto más se aleje.

FIGURA 2. La segunda tarea de corrección propuesta a los alumnos.

Por mostrar sólo algunos ejemplos concretos, en la Figura 3 observamos la respuesta de la pareja n° 15, que no advirtió, en la línea 5 del Ejemplo 18 que aparece

en la Figura 1, la intercalación de un cero que no corresponde ni la ausencia de un signo menos, pero consideró como erróneo el valor de h , que es correcto.

Ejemplo 18 Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución
Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ o a $y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}$

Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13 \Rightarrow$

$$4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4$$

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{-2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{-2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda ecuación es un caso particular de la primera, donde

$$h = \frac{-1}{2}; k = \frac{3}{2} \text{ y } 4c = \frac{-1}{2} \Rightarrow c = \frac{-1}{8}$$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco $F = (h + c; k) = \left(\frac{-5}{8}; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = \frac{-3}{8}$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

Figura 3-57

FIGURA 3. El trabajo de la pareja n° 15.

En el primer ejercicio de la Figura 2 se ubica erróneamente el foco de la parábola en el eje de abscisas (cuando lo correcto es en el eje de ordenadas); un 94% de las parejas de alumnos lo detectó. En el segundo ejercicio hay un error tipográfico en la ecuación de una de las hipérbolas del gráfico, que fue detectado por casi un 75% de los pares de alumnos, pero sólo un 17% advirtió que se afirma que $\frac{\sqrt{5}}{1} = 2,24$, en lugar de $\frac{\sqrt{5}}{1} \cong 2,24$. En este ejercicio, sin embargo, y con referencia a la última afirmación que aparece a la derecha de la Figura 3-75 de nuestra Figura 2, es llamativo que casi un tercio de las parejas corrigió errores inexistentes, como escribir "menor" en lugar de "mayor", y "acerque" en lugar de "aleje".

En la Figura 4 observamos el trabajo de la pareja n° 5, que marca bien dos errores, pero omite corregir donde dice que el número irracional "raíz cuadrada de 5" es "igual" al número racional 2,24.

Ejemplo 26 Graficar las hipérbolas $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ y $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y sus asíntotas. Determinar la hipérbola de mayor excentricidad.

Solución

Escritas en su forma canónica son $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ y $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$. Tienen asíntotas; $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, $y = \pm 0.5x$ (son hipérbolas conjugadas).

La distancia del centro al foco (para ambas) es $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Figura 3-75

La hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1.12$

La hipérbola $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$

Es la de mayor excentricidad.

En el caso de la elipse, la excentricidad será mayor cuanto más se acerque el foco al vértice homólogo. En las hipérbolas, cuanto más se aleje.

FIGURA 4. El trabajo de la pareja nº 5.

§3. Reflexión sobre la experiencia

Los cambios vertiginosos que sufren los conocimientos técnicos, así como el enorme volumen de información disponible y su diversificación, exigen que el futuro ingeniero sea capaz de aprender por sí mismo, sea capaz de orientar y dirigir su auto-instrucción (ver, por ejemplo, Kindelán y Martín, 2008).

El aprendizaje autónomo, en el sentido que le otorga Hans Aebli, requiere de capacidades metacognitivas (Aebli, 2001). Los alumnos tienen escasa oportunidad de ejercitar estas capacidades durante el cursado de sus asignaturas de grado, en las que el acento está puesto principalmente en los contenidos específicos. Por otra parte, es deseable que desarrollen esas capacidades mientras avanzan en su formación profesional; se trata de habilidades que tienen relación con el control de los propios procesos cognitivos, pero que también repercuten en las concepciones epistemológicas que los estudiantes tienen sobre el conocimiento científico.

En efecto, que el alumno detecte errores o imprecisiones en un libro (que es considerado, en general, como una referencia incuestionable) repercutirá necesariamente en las concepciones que tiene sobre la validez de sus conocimientos y el rigor de las fuentes que se los proveen. Ejercitar esta habilidad de detección y análisis de errores en clase, a nuestro entender y el de otros autores ya citados, contribuye a desarrollar estrategias útiles. Campanario (2003) va más allá y asegura que es posible observar en los alumnos "una sensación (...) de mayor confianza

en los propios conocimientos y una actitud más crítica hacia las deficiencias detectadas en los manuales universitarios" (p. 163). No hemos podido constatar aún esta actitud superadora que describe Campanario, pero sí podemos decir que los alumnos se abocaron con entusiasmo a una actividad que requirió poner en juego habilidades metacognitivas, tal como las de control y autoevaluación ya mencionadas, que por lo general, tienen pocas oportunidades de ejercitar en el aula de matemática.

§4. Los errores en el Capítulo

Como el eje de nuestro trabajo es la alfabetización académica, nos interesa puntualizar algunos aspectos relativos a este campo.

Señalamos anteriormente que descubrimos los errores en el texto seleccionado cuando lo *leímos* para preparar la actividad para nuestros alumnos, y aquí destacamos la palabra "leímos" por la necesidad de situarnos en el concepto de lectura que guiara la nuestra, de manera que nos sirviera para el desarrollo de la actividad con los alumnos y nos ayudara a explicar la cantidad de errores encontrada.

Distinguimos dos puntos de vista sobre la lectura, su comprensión y el sentido de lo que se lee. Por un lado, puede definirse la lectura como decodificación; desde aquí el sentido está en el texto y en las partes que lo componen, en sus palabras, oraciones o párrafos y la comprensión consiste en la extracción de ese sentido por parte del lector. Si éste no puede decodificar alguna de las partes no comprende el texto. Dos buenos decodificadores entenderán lo mismo si leen el mismo texto.

Por otro lado, encontramos un enfoque constructivo de la lectura. Solé (2002) sostiene que "leer es un proceso de interacción entre el lector y el texto, proceso mediante el cual el primero intenta satisfacer (obtener una información pertinente para) los objetivos que guían su lectura" (p. 19). Dentro de este mismo enfoque Dubois (2007) señala que "el sentido lo aporta el propio lector de acuerdo con los conocimientos y experiencias archivados en su memoria" (p. 25). El lector es un sujeto activo que procesa y examina el texto con objetivos que lo guían y con conocimientos previos que pone en relación con lo que lee. Dos lectores con objetivos y saberes diferentes, pueden discrepar en el sentido que le otorguen al texto leído. Esto nos lleva a pensar que en realidad el sentido dado a un texto no es una réplica que el lector hace del significado que el autor quiso imprimirle, sino que es una construcción. En el caso de la lectura individual la construcción es propia del lector.

La expresión latina *errare humanum est* significa literalmente *errar es humano*. El uso habitual de ella en latín parece que la pinta con el color de la verdad. Nosotros entendemos que como seres humanos podemos equivocarnos, está en nuestra naturaleza. Escribir es un acto humano, los textos que escribimos no están exentos

de errores. Para descubrir los errores de un escrito debemos leerlo atenta y reflexivamente. Esto hicimos con el capítulo en cuestión.

La lectura académica es atenta y minuciosa, pone el foco en las palabras, símbolos y gráficos que contienen las páginas, y en sus relaciones para formar unidades superiores en significado de la disciplina. En un principio no busca la relación con otros temas o no se interesa por las aplicaciones. Importa cómo los elementos textuales operan entre sí para determinar el sentido del texto que permita su comprensión. Comprensión que a su vez resignifica a los primeros términos y facilita la comunicación.

Para la comprensión de un texto como el siguiente es condición necesaria (aunque puede no ser suficiente) el conocimiento del significado de los términos que contiene y de la notación utilizada:

Si x_1 y x_2 son dos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \Rightarrow kx_1$ y kx_2 son vectores linealmente independientes.

Radford (2006) señala que "...ha habido una toma de conciencia colectiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica" (p. 7) y toma a ésta como una razón del interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática.

La comprensión de la proposición anterior referida a independencia lineal requiere del conocimiento del lenguaje matemático en sus distintos registros de representación semiótica. Es ésta una lectura cercana a la que se entiende como de decodificación. Pero también la lectura académica es reflexiva. "Reflexionar sobre el texto quiere decir dialogar con uno mismo sobre la comunicación escrita, hacerse preguntas, plantearse dudas con respecto a la información que nos brinda el autor" (Dubois, 2007, p. 29). Incluye la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y aplicaciones. Busca relacionar un concepto o procedimiento con otros conocidos. Trata de comparar el texto con lo leído en otro lugar o lo escuchado, si el lector es un alumno, en la clase. El lector rehace la demostración o los cálculos habidos e intenta formas alternativas. Es una lectura cercana al enfoque constructivo.

Leímos el capítulo que nos permitió llevar adelante nuestra experiencia, no con el profesionalismo de los correctores especializados porque no lo somos, pero sí hicimos una lectura académica como la descrita y encontramos los errores que figuran en el Anexo 1. Agrupamos los errores en cinco categorías:

1. Errores por omisión o falta de una condición o expresión simbólica necesaria para completar el sentido de una expresión, imponer una restricción o no distorsionar una definición. Por ejemplo, el error N° 8 del Anexo 1.

2. Errores tipográficos, que consisten en las sustituciones de algunos caracteres por otros y también en su ausencia donde debieran estar o en su presencia donde no debieran estar. Por ejemplo, el error N° 11 del Anexo 1.
3. Errores de cálculo numérico o algebraico como, por ejemplo, el error N° 31 del Anexo 1.
4. Errores por intercalación de palabras o expresiones matemáticas que no se corresponden con el desarrollo temático en curso. Por ejemplo, el error N° 58 del Anexo 1.
5. Errores por incorrecta correspondencia entre la representación gráfica y su enunciación textual. Por ejemplo, el error N° 63.

El 82 % de los errores encontrados en el capítulo fue tipográfico, el 12 % del tipo 1; se hallaron además 2 del tipo 3 y sólo 1 del tipo 4 y del tipo 5.

§5. De cómo se evitan los errores en los libros de texto

El autor de un texto, por más experimentado que sea, puede incurrir en errores u omisiones en el escrito que entrega a la editorial. Cometer errores es, sin duda alguna, una de las acciones más habituales del ser humano. El editor es el responsable de someter el escrito a corrección. Para eso suele apoyarse en correctores especializados que trabajan bajo su coordinación. "La corrección del texto que remite el autor es tarea fundamental, dado que toda editorial debe aspirar a la perfección de sus libros. Y perfección significa fallo cero. Jamás podemos resignarnos a convivir con las malditas erratas" (Pimentel, 2007, p. 90). Según este mismo autor, existen dos tipos de correcciones:

- La ortotipográfica, con la que se trata de enmendar las faltas de ortografía y el uso inadecuado de los signos tipográficos. El corrector detecta y elimina las faltas de ortografía; resuelve las fallas de acentuación y puntuación; revisa las posibles transposiciones u omisiones de caracteres, así como el uso apropiado y coherente de comillas, mayúsculas, cursivas, abreviaturas y, en el caso de textos matemáticos, de la notación típica.
- La de estilo, que es una corrección literaria que actúa sobre los planos sintáctico, gramatical y expresivo con el fin de pulir el texto y optimizar sus recursos. El corrector suprime los errores y las imprecisiones de vocabulario, elimina muletillas y vicios léxicos, combina correctamente las palabras y los grupos que estas forman para expresar significados, adapta el texto a la lengua propia de la comunidad de sus usuarios, cuidando siempre de proteger el estilo propio del autor.

Para el caso de los libros de texto de matemática, se debe agregar la corrección de contenidos: un especialista en la materia, revisa y corrige la rigurosidad en la presentación de los asuntos de la disciplina.

El texto es del autor, él tiene la libertad para aceptar o no las correcciones. Por eso es importante el trabajo coordinado entre autor y correctores para aclarar las dudas y resolver los desacuerdos.

§6. Para finalizar

Nuestra actividad se desarrolla en la universidad. Nos atrevemos a recomendar a nuestros colegas profesores que revisen los libros que recomiendan. Los lean académicamente, aprovechen los errores si los hay, creen con ellos situaciones de aprendizaje. Por ejemplo, proponer ejercicios con consignas como: "En la página x donde dice xxx debe decir... (complete lo que corresponde)", "El desarrollo del ejemplo x tiene un error que conduce a un resultado incorrecto. Rehágalo para obtener el resultado correcto", "En la página x hay dos errores, encuéntrelos y dé razones de su aparición", "Señale los errores, si los hubiere, en el trabajo de un compañero y corríjalos". Pongan atención y concentración en sus clases y escritos para evitar los errores. El trabajo sobre el error no sólo es para remediarlo: es un constructor de conocimientos y su aprovechamiento constituye una innovación didáctica.

A aquellos que con mucho esfuerzo asumen la tarea de escribir un libro, les proponemos que elijan un editor responsable, que someta sus originales a revisión por correctores especializados. A los que gustan escribir apuntes para subirlos a un sitio virtual o para que sean fotocopiados por sus alumnos, les sugerimos que los hagan revisar por una persona conocedora del tema. No estamos exentos de cometer errores. Somos humanos. Y si, aún con todos los recaudos, los errores aparecieran, es posible hacer un uso didáctico de ellos, proponiendo a los alumnos tareas de detección, análisis y corrección que pueden contribuir al desarrollo de su capacidad de auto-instrucción.

Recordemos que el gran desafío que tenemos como profesores universitarios es, aunque no esté explicitado, formar profesionales autónomos, competentes, críticos, creativos, con aptitud para rectificarse cuando se equivocan, capaces de interpretar y producir cambios no sólo en los ámbitos de sus desempeños sino más allá, en un mundo que deseamos sea siempre mejor.

§7. ANEXO 1.

Errores encontrados en el Capítulo 3 de Kozak et al. (2007)

- N° 8 Página 168, Ejemplo 4, línea 9.
Donde dice " $(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0)$ ", debe decir " $(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0, \forall y \neq 0)$ ".
- N° 11 Página 170, sección 3,3,1, línea 8.
Donde dice " $y = y - h$ " debe decir " $y = y - k$ ".

- Nº 31 Página 196, ejemplo 18 (11 errores). En el Ejemplo 18 que muestra la Figura 1 se puede apreciar la versión original. Se transcribe la resolución correcta del mismo, ya que presenta varios errores.

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución. Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a

$$x - h = \frac{(y - k)^2}{4c} \quad \text{ó} \quad y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}$$

Reescribiendo,

$$4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13$$

$$\Rightarrow 4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4$$

$$\Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x - h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda ecuación es un caso particular de la primera, donde $h = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{3}{2}$ y $4c = -2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$. Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco $F = (h + c; k) = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = 0$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$. \square

Se deja como ejercicio verificar, utilizando la definición de parábola con foco en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ y directriz $x = 0$ que la ecuación es $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ (o una equivalente).

- Nº 58 Página 217, ejemplo 25, línea 5.
Donde dice "semieje mayor $\sqrt{200} \cdot 10$ " debe decir "semieje mayor: $\sqrt{200}$ ".
- Nº 58 Página 217, ejemplo 25, línea 7.
Donde dice "semieje mayor" debe decir "semieje mayor: $\sqrt{169}$ ".
- Nº 63 Página 196, sección 3,7,2, ejemplo 18 figura 3 – 57:
Donde dice " $x = \frac{3}{8}$ " debe decir " $x = -\frac{3}{8}$ ".

Nota: El lector interesado puede solicitar la lista completa de los errores del capítulo a cualquiera de los autores del artículo.

Referencias

- [1] AEBLI, H. (2001). *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo*. Madrid: Narcea Ediciones.
- [2] BEYER K., W. O. (2014). *Los textos escolares y el error en matemáticas*. Matua: Revista del Programa de Matemáticas I, 1 (1), 1 – 25.
- [3] BRICEÑO E., MILAGROS T. (2009). *El uso del error en los ambientes de aprendizaje: una visión transdisciplinaria*. Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales, 14, 9 – 28.

- [4] CAMPANARIO, J. M. (2001). *¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales*. Enseñanza de las Ciencias, 19(3), 351 – 364.
- [5] CAMPANARIO, J. M. (2003). *De la necesidad, virtud: cómo aprovechar los errores y las imprecisiones de los libros de texto para enseñar física*. Enseñanza de las Ciencias, (21)1, 161 – 172.
- [6] DE LA TORRE, S. (2013). *Aprender de los errores: el tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.
- [7] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2004). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas*. 1º Parte. Elementos de Matemática, 19(74), 5 – 18.
- [8] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2005). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas*. 2º Parte. Elementos de Matemática, 19(74), 5 – 18.
- [9] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación, N° 38/4. Recuperado de www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf
- [10] DUBOIS, M.E. (2006). *Sobre lectura, escritura y algo más*. P.(Ed.) Textos en Contexto 7. Buenos Aires: Lectura y Vida/ Asociación Internacional de Lectura.
- [11] FERNÁNDEZ PALOP, P., CABALLERO GARCÍA, P., FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. y CELA, C. J. (2013). *¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?*. Números, 83, 131 – 158.
- [12] HERNÁNDEZ, L. (2013, 9 de agosto). *Errores en libros de texto: abundan dazos, confunden colores y escriben "ocaciona"*. . Excelsior. Recuperado de <http://www.excelsior.com.mx/nacional/2013/08/09/912863>
- [13] KINDELÁN, M., y MARTÍN, A.(2008). *Ingenieros del Siglo XXI: importancia de la comunicación y de la formación estratégica en la doble esfera educativa y profesional del ingeniero*. ARBOR Ciencia, Pensamientos y Cultura, 184(732), 731 – 742.
- [14] KOZAK, A.M., PASTORELLI, S., y VARDANEGA, P. (2007). *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. Buenos Aires: McGraw-Hill Interamericana.
- [15] MACÍAS, A., MAZZITELLI, C., y MATURANO, C. (2007). *Las estrategias metacognitivas y su relación con el contexto educativo*. Revista del Instituto de Investigaciones en Educación en las Ciencias Experimentales (IIECE). Recuperado de <http://www.feeye.uncu.edu.ar/web/posjornadasinve/area2/Aprendizaje%20-%20eleccion%20de%20carrera/009%20-%20Mazzitelli%20y%20Maturano%20-%20UN%20San%20Juan.pdf>
- [16] PIMENTEL, M. (2007). Manual del Editor. *Cómo funciona la moderna industria editorial*. Córdoba: Berenice.
- [17] RADFORD, L. (2006). *Semiótica y educación matemática: introducción*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Extra - 1), 7 – 22.
- [18] REDACCIÓN LR (2013, 12 de mayo). *Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país*. La República. Recuperado de <http://larepublica.pe/12-05-2013/denuncian-errores-en-libros-de-matematica-en-colegios-privados-de-nuestro-pais>
- [19] SENZ BUENO, S. (2005). *En un lugar de la «Mancha»... Procesos de control de calidad del texto, libros de estilo y políticas editoriales*. Panace@, 6(21 – 22), 355 – 370.
- [20] SLISKO, J. (1995). *The limitless world of textbook mistakes*. The Physics Teacher, 33, 381.
- [21] SOLÉ, I. (2002). *Estrategias de lectura*. Barcelona: Editorial Graó - ICE.
- [22] WHITING, W. B.(1991). *Errors: A Rich Source of Problems and Examples*. Chemical Engineering Education, 25(3), 140 – 144.

MESSINA, VICENTE.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) vrnessi@gmail.com

SEMINARA, SILVIA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) seminarasilvia@gmail.com

DEL PUERTO, SILVIA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) spuerto29@gmail.com

GIL, TERESA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) tgil@fibertel.com.ar

PANO, CARLOS

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) cpano@doc.frba.utn.edu.ar

Recibido: 10 de abril de 2017.

Aceptado: 21 de marzo de 2018.

Publicado en línea: 11 de mayo 2018.
