UN NUEVO UNIVERSO, BREVE INVESTIGACIÓN SOBRE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Mariela Blanco, Patricia Echenique, Rosario Mariani.
Consejo de Educación Secundaria. Montevideo, Uruguay.
mblanco08@gmail.com, patricia.gev@gmail.com; rosariomariani09@gmail.com

Este trabajo pretende ser una introducción a la geometría hiperbólica. Se trata de comprender algunos aspectos de esta rama de la matemática a partir de su historia y de sus principales actores. La realización de esta investigación significó el estudio de una parte de la geometría de la cual hasta ahora conocíamos apenas su nombre. Para ello primero fue necesario hacer el esfuerzo en cambiar las imágenes que estaban en nuestras mentes e imaginar un universo con parámetros diferentes a los que habíamos utilizado hasta ahora. Fue un trabajo de estudio e investigación importante, no sólo por el fruto final, sino por el camino que debimos seguir para poder concretarlo.
Está compuesto, por una pequeña descripción de la investigación del proceso histórico que llevó a las distintas geometrías no euclidianas, un estudio particular de la geometría hiperbólica viendo sus principales características, algunos modelos de ésta, y un estudio más detallado del modelo semiplanar de Poincaré.

La geometría de Euclides, fue desarrollada alrededor del 300 a. c., en 13 libros (*elementos*) que contienen 23 definiciones al comienzo, (pero en el desarrollo de su obra se llega a 118 definiciones) y 465 teoremas. Estos teoremas, a su vez, son derivados de sólo cinco postulados, los cuales son presentados como verdades evidentes por sí mismas, y por tal motivo son enunciados sin demostración. Dichos postulados son:

1. *Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta.*
2. *Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.*
3. *Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
5. *Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado, ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos*

Hasta aproximadamente el 1800 todos los matemáticos estaban convencidos de que la geometría euclidiana era la idealización correcta de las propiedades y figuras del mundo físico. A pesar de que la confianza en la geometría euclidiana permaneció durante 2000 años, una preocupación ocupó a los matemáticos durante casi todo ese período, la complicada formulación del quinto postulado de Euclides, tanto es así que el mismo Euclides evitaba su utilización. En el quinto postulado está implícito el concepto de *infinito,* y por ello desde tiempos muy remotos se buscó expresarlo de manera diferente para, eliminarlo como postulado y deducirlo de otros axiomas, para demostrar su independencia, o para reemplazarlo por otras afirmaciones que luego buscaban demostrar.
A partir de esto existen variados intentos de demostrar el quinto postulado con los cuatro anteriores, se conocen versiones de estos intentos en tiempos de Aristóteles, como también otras por: Posidonio (S.I A.C) , Clavius (1537-1612), Proclo, Playfair (Inglaterra siglo XVIII), J. Walis (1616 -1703). También hubo intentos de demostrar el 5° postulado por reducción al absurdo, en este sentido están investigaciones de Saccheri(1667-1733) , Lambert(1728-1777), Legendre(1752-1833). No es de extrañar que no se haya llegado a ninguna contradicción en la hipótesis del ángulo agudo, ya que, como se demostró posteriormente, la geometría desarrollada con esta hipótesis es tan compatible como la euclidiana, es decir, el postulado de las paralelas es independiente del resto de los postulados y no es posible deducirlos de ellos.

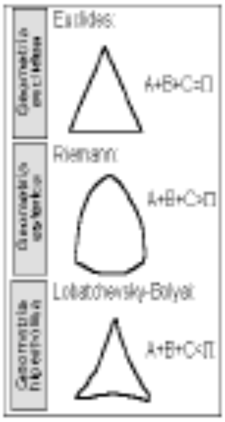
La historia de la geometría no euclidiana se inicia con los esfuerzos para eliminar dudas acerca del axioma de las paralelas de Euclides. Los primeros en sospechar este hecho fueron Karl Friedrich Gauss (1777-1855) de Alemania, János Bolyai (1802-1860) de Hungría y Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) de Rusia.
Tres geometrías surgen a partir de todas estas investigaciones y tienen en común los primeros cuatro postulados de Euclides, pero varían a partir del 5º postulado y sus consecuencias.

En la **geometría euclidiana**, el quinto postulado afirma: "Dados en un plano una recta r y un punto P que no está en r, entonces existe una única recta paralela a r que pase por P"

En la **geometría elíptica**, el quinto postulado toma la forma: "Dados en un plano una recta r y un punto P que no está en r, entonces no existe recta paralela a r que pase por P".

En la **geometría hiperbólica**, el quinto postulado toma esta otra forma: "Dados en un plano una recta r y un punto P que no está en r, existen al menos dos rectas paralelas a r que pasan por P".

Geometría	*Desarrollada por*	*Paralelas desde un punto exterior*	*Suma de ángulos de un triángulo*
Euclídea	*Euclides*	*Una*	*dos rectos*
Hiperbólica	*Gauss, Bolyai y Lobachevsky*	*Más de una*	*Menor que dos rectos*
Elíptica	*Riemann*	*Ninguna*	*Mayor que dos rectos*

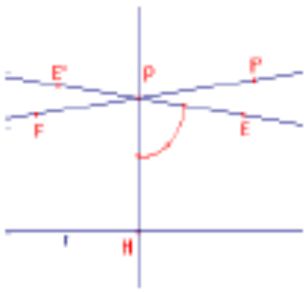


GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

En esta geometría puede haber rectas que no se corten pero que la distancia entre ambas sea variable volviéndose tan pequeña como se quiera. Se puede decir que las dos paralelas a una recta r por un punto exterior son rectas asintóticas a r ya que se acercan infinitamente a r sin llegar a cortarla.

El ángulo del paralelismo.

- Sean EE' y FF' las paralelas a r por el punto P.
- El ángulo HPE igual al FPH se llama ángulo de paralelismo y depende de la distancia $d(H,P)$
- En la geometría euclidiana dicho ángulo es recto, en la no euclidiana varía desde cero cuando la distancia $d(H,P)$ es infinita, hasta 90º cuando la distancia $d(H,P)$ tiende a cero.



El ángulo de paralelismo α queda totalmente determinado por la distancia del punto P a la recta r. Es decir, el ángulo α es función de la distancia x, $\alpha = \prod(x)$. Esta función tiene una importancia fundamental en la geometría de Lobachevsy.

Sus propiedades fundamentales son:

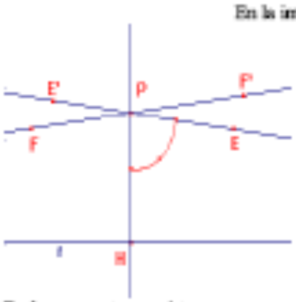
a) esta definida para todo x positivo;

b) es monótona decreciente y continua;

c) $\prod(x)$ tiende a $\pi/2$ cuando x tiende a 0 y $\prod(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito.

De aquí se desprende que en regiones pequeñas del espacio la geometría de Lobachevsky difiere muy poco de la euclidiana, ya que para valores de x muy pequeños el ángulo de paralelismo se aproxima a un ángulo recto.

Paralelas, hiperparalelas, secantes.



En la imagen:

- La recta HP es perpendicular a r, siendo H el pie de la perpendicular.
- Las rectas EE' y FF' son paralelas a r, en el concepto hiperbólico del paralelismo.
- Las rectas que pasan por P y tienen puntos interiores al ángulo FPE son secantes a r
- Las rectas que pasan por P y no tienen puntos interiores al ángulo FPE son hiperparalelas o no secantes a r.

Dada una recta r, existen por un punto P exterior a r, infinitas secantes, infinitas hiperparalelas y dos paralelas que separan las secantes de las hiperparalelas.

Los **modelos** son los que dan consistencia a las geometrías. El modelo para la geometría euclidiana es el mundo real, pero ¿tenía la geometría de Lobachevsky un modelo que la muestre como teoría consistente? Sí, de hecho hay varios.

El primer modelo de geometría hiperbólica se debe a **E. Beltrami**, quien lo obtuvo en 1868.El ejemplo más simple de estas superficies es la **pseudo esfera**, que es la superficie obtenida por revolución, alrededor del eje y de la curva llamada tractriz cuya ecuación es:

$$y = \pm\left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \log\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right]$$

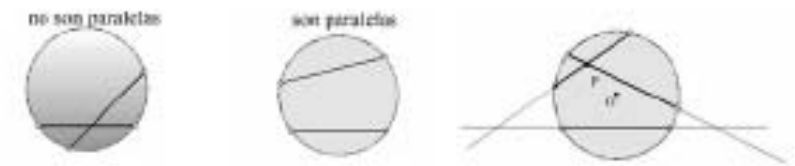
El modelo de **Beltrami-Cayley-Klein** o también conocido como el **modelo proyectivo del disco**. Usa el interior de un círculo como plano hiperbólico, y las cuerdas como rectas. Este modelo tiene como ventaja su simplicidad.

Los puntos del interior del círculo representan los puntos del nuevo plano hiperbólico. No así los puntos de la circunferencia que no pertenecen a este plano hiperbólico.

Este segmento sin los puntos terminales se llama *cuerda abierta*.

Una *recta* en este modelo es una *cuerda abierta*. Consideremos el punto P y la recta r Podemos trazar dos rectas paralelas r_1 y r_2 que pasen por P y ambas son paralelas a la cuerda abierta *l*. En este modelo se consideran paralelas las rectas *no secantes*.

Dos cuerdas abiertas son paralelas si no posean puntos en común.

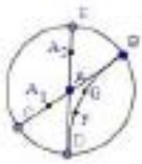


Circular de Poincaré

Consideramos una circunferencia cualquiera *C* en el plano euclidiano.

Designamos el interior de este circulo como el plano hiperbólico.

Llamaremos "*puntos hiperbólicos*" a los puntos del plano que pertenecen al círculo limitado por dicha circunferencia, o sea a todos los puntos que pertenecen al círculo y no pertenecen a la circunferencia.



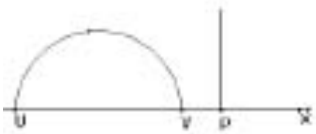
Llamaremos "*rectas hiperbólicas*" a:

- Diámetros de *C*
- Los arcos de circunferencias ortogonales a *C* incluidos en el círculo limitado por *C*.

Las rectas paralelas a una tercera no tienen por qué ser paralelas entre sí.

AA_1 // FG, AA_2 // FG y $AA_1 \cap AA_2 = \{A\}$

MODELO SEMIPLANAR DE POINCARÉ

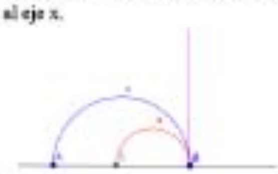


¿Qué figuras euclidianas son las rectas hiperbólicas?

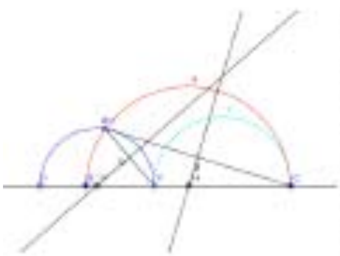
Las rectas hiperbólicas en este modelo son semicircunferencias abiertas con centro en el eje x, o semirrectas euclidianas abiertas con extremo en el eje x, que además son perpendiculares al eje x.

Rectas paralelas

Son aquellas rectas que tienen en común únicamente un punto del eje.



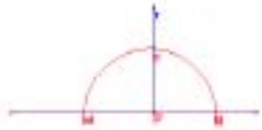
Rectas paralelas a una dada por un punto dado



Se quiere trazar la recta paralela a la recta c por el punto D, para lo cual se determinan los puntos límites de dicha circunferencia (B y C) dichos puntos no pertenecen al plano hiperbólico.

Se traza la mediatriz del segmento DB, el punto de corte de la mediatriz con el eje es el centro de la semicircunferencia que pasa por B, o sea la recta hiperbólica d. De la misma manera se procede para encontrar la otra recta e que pasa por C.

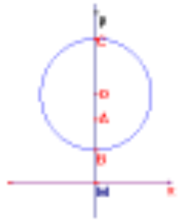
Una semicircunferencia con centro en el eje x y una semirrecta abierta perpendicular al eje x en el centro de la circunferencia son también rectas hiperbólicas perpendiculares entre sí.



Circunferencia

La circunferencia hiperbólica es una circunferencia euclidiana en el plano hiperbólico que no tiene puntos en común con el eje x y su centro A no coincide con su centro euclidiano O.

Se cumple la relación $\dfrac{CM}{AM}=\dfrac{AM}{MB}$



Distancia hiperbólica

a) Los puntos A y B pertenecen a una recta euclidiana: $d_h(A,B)=\ln\left(\dfrac{d(M,B)}{d(M,A)}\right)$

b) Los puntos A y B pertenecen a una semicircunferencia euclidiana: $d_h(A,B)=\left|\ln\left[\tan\left(\dfrac{\hat{VCB}}{2}\right):\tan\left(\dfrac{\hat{VCA}}{2}\right)\right]\right|$

Siendo en ambos casos d_h la distancia hiperbólica y d la distancia euclidiana.

Propiedades del modelo

A partir de las condiciones impuestas al modelo se pueden determinar ciertas propiedades que se desprenden de este.

i) "Una recta queda determinada por dos puntos." Esto se debe a que en este modelo las rectas son semicircunferencias de centro perteneciente al eje x o semirrectas perpendiculares a dicho eje.

ii) Como el eje x no pertenece al plano hiperbólico las rectas son ilimitadas.

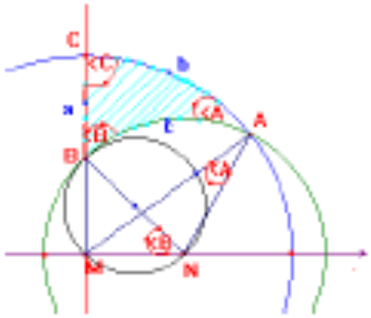
No tienen extremos pertenecientes al plano hiperbólico.

Los puntos U, V y P no pertenecen al plano hiperbólico.

iii) Dada una recta r y un punto P exterior a r, existen infinitas rectas secantes a r, infinitas no secantes y solo dos paralelas a r por el punto P. t y s paralelas a r, q secante a r, v no secante a r

iv) La suma de los ángulos de un triángulo es menor a dos rectos.

Observemos el triángulo ABC. Sus lados son segmentos de rectas hiperbólicas.



El ángulo A es igual al MAN que forman los radios y por lo tanto las tangentes de las circunferencias euclidianas b y c.

El ángulo B es igual al BNM (que forman el eje x y el radio NB).

El radio BN de la circunferencia c será diámetro de la circunferencia q.

El ángulo NBM inscripto en q es mayor que el ángulo A exterior a q.

NBM+B=un recto.

A es menor que NBM.

Entonces A +B < un recto.

C+A+B < dos rectos.

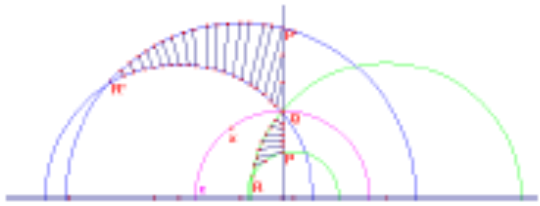
Isometrías en el plano hiperbólico

Una isometría en el plano hiperbólico es una función biyectiva del plano hiperbólico en sí mismo que conserva las distancias entre puntos. Esto significa: d_h (A, B) = d_h (A', B') es decir que la distancia hiperbólica entre dos puntos es igual a la distancia hiperbólica entre sus imágenes.

La inversión en geometría euclidiana corresponde a la simetría axial hiperbólica cuando la recta hiperbólica es una semicircunferencia.

Una isometría queda totalmente determinada cuando se determinan las imágenes de tres puntos no alineados.

Imagen de tres puntos no alineados en la simetría axial.



La figura muestra el triángulo PQR y su correspondiente P'QR' en una simetría axial hiperbólica de eje c.

Bibliografía

- EVES. Howard; Geometría No Euclidiana. Tomo I de **Estudio de las Geometrías** por UTEHA. México. 1963
- SANTALÓ Luis; **Geometrías no Euclidianas**, EUDEBA. Buenos Aires. 1961.
- SANTALÓ, Luis; **La Geometría en la Formación de Profesores.** Red Olímpica. Buenos Aires. 1993.
- S. SMOGORZHEVSKI; **Acerca de la Geometría de Lobachevsky**. Editorial MIR. Moscú. 1984
- COXETER, H. S. M.; **Fundamentos de Geometría.** Editorial Limusa - Wiley, S.A. México. 1971
- MOISE, Edwin. **Elementos de Geometría Superior.** Compañía Editorial Continental S.A. México; 1968
- LAGES LIMA, Elon; **Espacios Métricos**. Editorial IMPA, Brasilia, 1977.

Páginas de Internet consultadas

- http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/papiroflexia/paraboloide.asp
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/PaseoFitxategiak/PG97-98-llombart.pdf
- http://www.fpolar.org.ve/matematica3/fasciculo18.pdf
- www.STADTAUS.com_S13-gupta.pdf
- http://www.euclides.org/menu/articles/historiadelageometria.htm
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/06-07/PG-06-07-eventos.pdf