Uso de objetos de aprendizaje como facilitadores de la comprensión de los métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial

Ing. Marta Caligaris
UTN. Facultad Regional San Nicolás. Argentina
mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Lic. Georgina Rodríguez
UTN. Facultad Regional San Nicolás. Argentina
grodríguez@frsn.utn.edu.ar

Mg. Adriana Favieri
UTN. Facultad Regional Haedo. Argentina
adriana.favieri@gmail.com

Lic. Lorena Laugero
UTN. Facultad Regional San Nicolás. Argentina
llaugero@frsn.utn.edu.ar

Resumen: Los estudiantes de carreras de ingeniería deben adquirir habilidades y destrezas para resolver, en forma exacta o aproximada, problemas que involucran ecuaciones diferenciales, dado que éstas usualmente modelizan problemas ingenieriles. En los cursos de Análisis Numérico de la Facultad Regional San Nicolás se han detectado inconvenientes en el aprendizaje de métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial. Para superar estas dificultades, se han elaborado aplicaciones que implementan los métodos numéricos estudiados para ser utilizadas durante el desarrollo de las clases. En este trabajo se muestran las aplicaciones diseñadas en Mathematica, en formato CDF, junto con algunas de las actividades que se les presentó a los estudiantes durante el aprendizaje del tema. Para medir el impacto de estas herramientas en el proceso de comprensión de los alumnos, se aplicó una encuesta donde debían determinar en qué grado los CDFs utilizados los ayudó a comprender los distintos conceptos matemáticos involucrados.

Palabras clave: Enseñanza para la comprensión, Objetos de aprendizaje, Problemas de valor inicial

Abstract: Students of engineering careers should acquire abilities and skills to obtain the solution, exact or approximated, of problems involving differential equations, as they commonly appear in engineering problems. In Numerical Analysis Courses of Facultad Regional San Nicolás, some problems were detected on the learning of numerical methods for solving initial value problems. To overcome these difficulties, tailor made apps implementing the studied numerical methods were developed, to be used in class. In this papers, the tools developed with Mathematica, in CDF format, are shown, together with some of the activities presented to the students while the issue was being taught. So as to measure the impact of this tolos on the students´learning a pool was conducted between them, where they had to specify to what extent the CDF files given helped them to understand the mathematical concepts involved.

Keywords: Teaching for understanding, Learning objects, Initial value problems.

1. Introducción

La necesidad de obtener la solución de una ecuación diferencial, en forma numérica o analítica, se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. De allí la importancia de que los estudiantes de dichas carreras adquieran habilidades y destrezas para resolver ecuaciones de este tipo y analizar las soluciones obtenidas (Caligaris y Rodríguez, 2008).

En general, la enseñanza de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, es decir, problemas de valor inicial (PVI) suele caracterizarse por poner énfasis a procedimientos mecánicos y a la memorización de conceptos, definiciones y técnicas. Esto hace que los estudiantes tengan inconvenientes para comprender la esencia de tales métodos, o tengan dificultades para entender conceptos fundamentales como estabilidad, convergencia, orden de precisión de un método, entre otros.

El uso de programas computacionales simbólicos durante el proceso de aprendizaje puede ser un poderoso recurso debido a que éstos permiten desarrollar en los alumnos habilidades que contribuyen a la comprensión del objeto matemático en estudio.

A partir de la versión 8, Mathematica® ofrece la posibilidad de generar archivos CDF (Computable Document Format) que pueden ser ejecutados sin necesidad de tener el programa instalado. Estos archivos son aplicaciones donde se deben introducir valores o seleccionar parámetros de listas desplegables, reglas o botones, para obtener resultados en forma gráfica o de texto en la misma interfaz.

Empleando el software mencionado anteriormente, se diseñaron dos archivos CDF para ser utilizados en la enseñanza de los métodos que permiten resolver PVI en forma aproximada, teniendo en cuenta las dificultades que usualmente se detectan en el aprendizaje de los mismos, y en función de las expectativas de aprendizaje que se desea que el alumno logre.

El objetivo de este trabajo es mostrar los CDF diseñados junto con algunas de las actividades que se les propuso a los estudiantes durante el aprendizaje del tema. También se presentan los resultados obtenidos en la encuesta que se aplicó para medir el impacto que tuvieron los CDF en los estudiantes en el proceso de comprensión de los distintos conceptos matemáticos involucrados.

2. Enseñanza para la comprensión

La enseñanza para la Comprensión (EpC) constituye un enfoque de enseñanza y aprendizaje basado en competencias y desempeños, asociado con las teorías constructivistas, y desarrollado desde la década de los noventa en el Proyecto Zero, de la Universidad de Harvard. Si bien existen actualmente múltiples experiencias en la educación básica y secundaria, su aplicación en educación superior es relativamente nueva, y mucho más como modelo pedagógico institucional.

Para Perkins (1999), "comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe". A partir de esta definición, se infiere que comprender significa algo más que adquirir información y desarrollar habilidades básicas. Según Blythe (1999), "incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías, volver a presentar el tópico de una nueva forma".

2.1. Componentes del modelo de Enseñanza para la comprensión

El modelo EpC consta de cinco componentes fundamentales (Pogré, 2011):

- **Hilos conductores**: describen las comprensiones más importantes que deberían desarrollar los estudiantes durante el curso y resumen la esencia de la materia.
- **Tópicos generativos**: hacen referencia a los temas, conceptos, teorías, ideas, asociados al hilo conductor.
- **Metas de comprensión:** enuncian explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender, es decir, son los objetivos que el docente desea que sus alumnos alcancen.
- **Desempeños de comprensión:** son las actividades que diseña el docente para ayudar al alumno a explorar y establecer conexiones entre los nuevos conceptos y sus saberes previos.
- **Evaluación continua:** son las oportunidades que los estudiantes precisan para reflexionar sobre sus desempeños durante el aprendizaje de los nuevos conceptos o habilidades. Constituye una herramienta importante para mejorar la enseñanza a través del análisis continuo del progreso de los alumnos en pos de las metas de comprensión.

3. Los recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática

Las nuevas tecnologías se han convertido en una herramienta insustituible y de indiscutible valor y efectividad en el manejo de la información con propósitos didácticos (Canós y Mauri, 2005). Algunas de las ventajas más importantes que tiene el uso de las nuevas tecnologías en la formación universitaria son: obtención rápida de resultados, gran flexibilidad en los tiempos y espacios dedicados al aprendizaje, adopción de métodos pedagógicos más interactivos y adaptados para diferentes tipos de estudiantes (Canós, Ramón y Albaladejo, 2008).

3.1. Objetos de aprendizaje

Si bien existen muchas definiciones acerca del concepto de objeto de aprendizaje (OA), la más difundida es la dada por Wiley (2000), quien considera que un OA es cualquier recurso digital que puede ser utilizado como soporte para el aprendizaje.

Con el fin de asegurar la calidad en la creación de los OA, se han establecido una serie de características que éstos deben cumplir (Naharro, Bonet, Cáceres, Fargueta y García, 2007):

- **Propósito educativo:** el objetivo de los OA es asegurar un proceso de aprendizaje satisfactorio.
- **Formato digital:** tienen la capacidad de actualización y/o modificación constante. Son utilizables desde Internet y accesibles a muchas personas simultáneamente y desde distintos lugares.
- **Contenido interactivo:** implican la participación interactiva de cada individuo, docente o alumno en el intercambio de información.
- **Indivisible e independiente:** deben tener sentido en sí mismos y ser autocontenidos. Además, no pueden descomponerse en partes más pequeñas.
- **Reutilizable:** deben poder ser utilizados en contextos educativos distintos a aquel para el que fueron creados.

3.2. Los CDF de diseño propio

Los archivos CDF generados desde Mathematica®, pueden ser considerados como objetos de aprendizaje. Estos archivos, que requieren de una licencia del software de Wolfram para crearse, no necesitan de este programa para ser ejecutados. Para trabajar con ellos, se debe instalar el reproductor de este tipo de archivos, CDF Player, disponible en forma libre en http://www.wolfram.com/cdf/.

La principal característica de los archivos CDF es que permiten a los alumnos interactuar en forma dinámica mediante la manipulación de parámetros de sistemas o modelos permitiendo analizar el efecto que esto provoca en el fenómeno observado.

Teniendo en cuenta las dificultades que usualmente presentan los estudiantes en el aprendizaje de los métodos numéricos para resolver PVI y en función de las expectativas de aprendizaje establecidas, se diseñaron dos archivos CDF. Las Figuras 1 y 2 muestran sus respectivas interfaces.

Ambas aplicaciones permiten resolver problemas de valor inicial de primer orden utilizando los siguientes métodos: Euler explícito, Taylor de orden dos, Taylor de orden cuatro, Runge-Kutta de orden dos (RK2) y Runge-Kutta de orden cuatro (RK4).

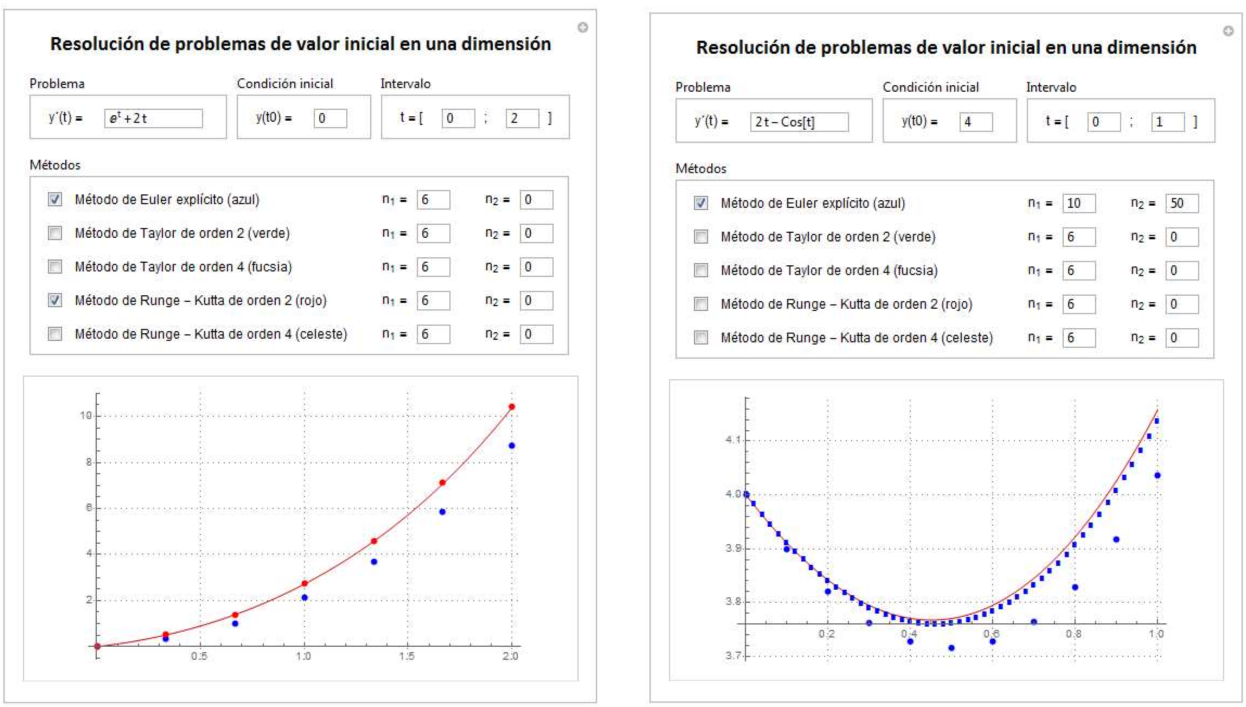
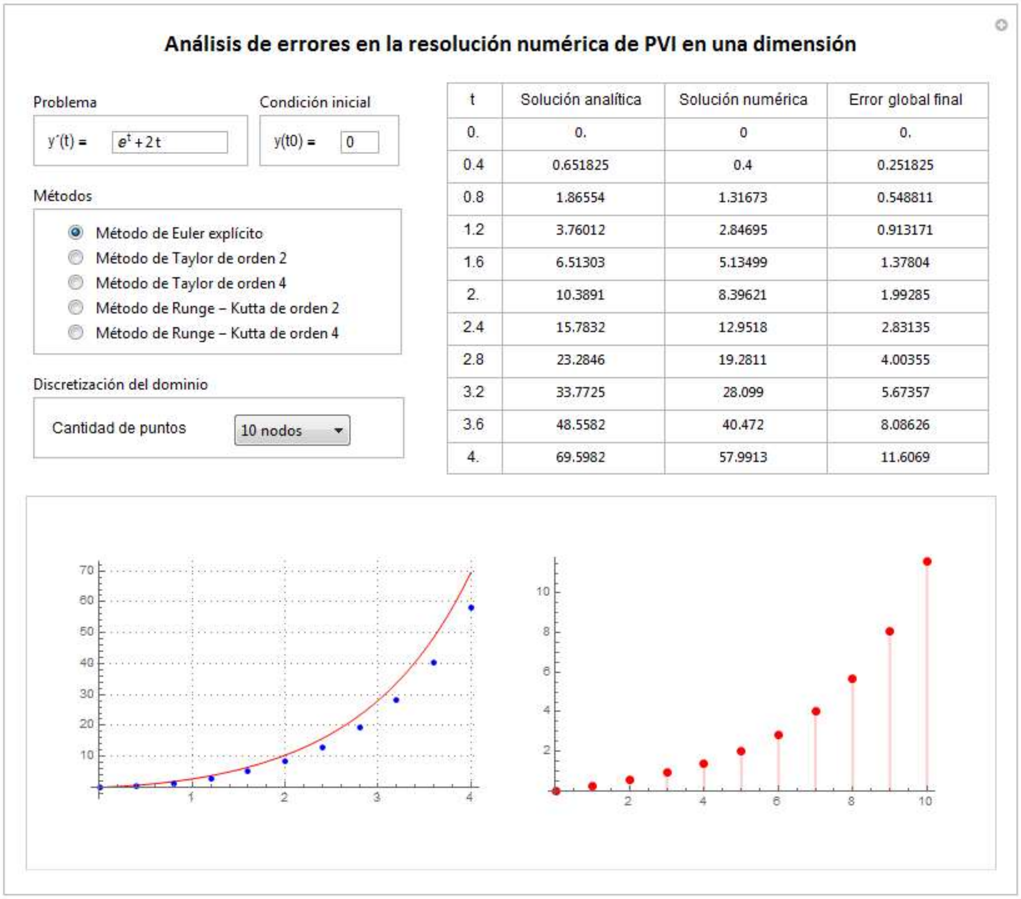


Figura 1. Interfaz del CDF “Resolución de problemas de valor inicial en una dimensión”.



t	Solución analítica	Solución numérica	Error global final
0.	0.	0	0.
0.4	0.651825	0.4	0.251825
0.8	1.86554	1.31673	0.548811
1.2	3.76012	2.84695	0.913171
1.6	6.51303	5.13499	1.37804
2.	10.3891	8.39621	1.99285
2.4	15.7832	12.9518	2.83135
2.8	23.2846	19.2811	4.00355
3.2	33.7725	28.099	5.67357
3.6	48.5582	40.472	8.08626
4.	69.5982	57.9913	11.6069

Figura 2. Interfaz del CDF “Análisis de errores en la resolución numérica de PVI en una dimensión”

Para usar el CDF mostrado en la Figura 1, el alumno debe ingresar la ecuación que desea resolver, junto con la condición inicial que establece el PVI y el intervalo donde quiere obtener la solución. Una vez hecho esto, se deben tildar las casillas de verificación para seleccionar el o los métodos que se desean emplear e indicar, para cada método seleccionado, la cantidad de puntos en donde se va a calcular la solución. En la parte inferior de la ventana, se grafican las soluciones correspondientes con la selección establecida.

Con este OA, es posible aplicar el mismo método con distintos pasos, o diferentes métodos con pasos iguales o con pasos distintos. Además, brinda la posibilidad de hacer comparaciones y analizar la solución numérica obtenida, debido a que permite obtener la representación gráfica de la solución discreta en un sistema de ejes coordenados en el que se visualizan, en distintos colores, los puntos asociados a cada aproximación junto con la gráfica de la función que es solución exacta del PVI ingresado.

A diferencia del CDF recién descripto, el otro recurso mostrado en la Figura 2 permite resolver problemas de valor inicial de primer orden únicamente en el intervalo [0; 4]. Para hacer uso del mismo, el alumno debe ingresar también la ecuación que desea resolver, junto con la condición inicial que establece el PVI, indicar el método que quiere utilizar y seleccionar de una lista desplegable, la cantidad de puntos en donde se va a calcular la solución numérica.

En la parte inferior del CDF, se presentan dos gráficas, la de la derecha corresponde a la solución numérica obtenida junto con la gráfica de la solución exacta del PVI, mientras que la de la izquierda muestra el error global final en cada uno de los puntos del dominio discreto.

Para un mejor análisis del error que se está cometiendo, se presenta también el error global final en forma tabular. Cabe aclarar que, aunque la discretización del dominio esté constituida por más puntos, siempre se muestra en la tabla la solución en los puntos que se indica en la primera columna.

4. Propuesta para la enseñanza de los métodos numéricos para resolver PVI

A continuación, se muestra la propuesta que se confeccionó para la enseñanza de los métodos numéricos para resolver PVI basada en los lineamientos establecidos por la enseñanza para la comprensión.

Hilo conductor: Aplicar métodos numéricos a problemas ingenieriles.

Tópicos generativos: Resolución numérica de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (PVI).

Metas de comprensión: Al finalizar la enseñanza del tema el alumno deberá:

- Identificar los problemas que pueden ser resueltos por medio de los métodos que permiten resolver PVI.
- Aplicar los métodos de Euler explícito, Taylor de orden dos, Taylor de orden cuatro, Runge-Kutta de orden dos y Runge-Kutta de orden cuatro a problemas concretos.
- Comprender los conceptos de consistencia, convergencia, estabilidad, error global final y orden de precisión de un método numérico.
- Analizar la precisión de una solución numérica teniendo en cuenta los distintos factores que influyen en su obtención.

Desempeños de comprensión: Para el desarrollo del tema, se planteó una cartilla de actividades que para su resolución, los estudiantes debían hacer uso de los CDF anteriormente presentados. A modo de ejemplo, se muestran algunas de las actividades que se les presentó a los alumnos durante su proceso de aprendizaje.

Ejercicio A

Resolver, utilizando el CDF disponible, el problema de valor inicial que se muestra a continuación utilizando el método de Taylor de segundo orden y tomando 4, 8 y 16 puntos respectivamente.

$$0{,}25 \cdot y' = -y \qquad 0 \le x \le 6 \qquad y(0) = 2$$

¿Qué ocurre con las soluciones numéricas obtenidas en cada caso? ¿Son adecuadas? ¿Por qué? Justificar la respuesta teóricamente.

Ejercicio B

Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$y' + 0{,}5 \cdot x^2 = 5 \qquad 0 \le x \le 5 \qquad y(0) = 0$$

Resolver, utilizando el CDF disponible, el problema propuesto utilizando los métodos de Euler, Taylor de segundo orden y Runge Kutta de orden cuatro. Tomar $h = 1$. ¿Qué sucede con las soluciones numéricas obtenidas? ¿Por qué?

Evaluación continua: Con el objetivo de ayudar a los estudiantes a reflexionar sobre su progreso en el aprendizaje y, al mismo tiempo, brindarle al docente la información para planear las acciones remediales necesarias, se les propuso a los alumnos la realización de dos trabajos prácticos.

Los errores detectados en cada uno de los ejercicios fueron aclarados y trabajados en clase con la finalidad de que los alumnos pudieran aplicar los métodos y conceptos involucrados correctamente en el parcial práctico – conceptual.

5. Impacto de uso de los CDF

Con el fin de evaluar el impacto del uso de los CDF en el proceso de comprensión, los alumnos respondieron un cuestionario al finalizar el aprendizaje del tema. Este cuestionario constaba de dos partes. En una primera parte, se realizaron preguntas abiertas acerca de la opinión que tenían sobre el uso de los CDF durante el proceso de comprensión de los métodos y conceptos estudiados.

A continuación, se transcriben algunos de los comentarios realizados por los alumnos:

> *"El uso de los CDF nos facilitó la comprensión de los temas gracias a la posibilidad de poder visualizar las soluciones obtenidas y comparar los distintos métodos".*

> *"Considero que los CDF nos ayudaron a ver rápidamente cómo se comportaba un método ante distintas condiciones".*

> *"Los CDF contribuyeron a la comprensión de los conceptos estudiados porque brindaban la información necesaria para que éstos no resultaran abstractos".*

El 64% de los alumnos indicó que el uso de los CDF los ayudó a entender el concepto de estabilidad de un método numérico, *"cosa que únicamente con los cálculo a mano hubiese sido más difícil de entender".*

En la segunda parte del cuestionario, se les presentaba preguntas cerradas que se analizarían luego utilizando una escala tipo Likert (Hernández Sampieri et al. 1998).

La Tabla 1 muestra la escala tipo Likert utilizada y el valor numérico que se le asignó a cada una de las opciones.

Escala	**Valor numérico**
Nada	4
Poco	3
Bastante	2
Mucho	1

Tabla 1. Escala tipo Likert y su valor numérico.

Para el análisis de los distintos ítems se calculó el promedio de cada uno de ellos. La Tabla 2 muestra los enunciados con los promedios obtenidos.

El uso de los CDF me ayudo a comprender …	**Índice**
… los distintos tipos de errores que influyen en la solución numérica de un PVI.	1,82
… el comportamiento del error global final para diferentes tamaños de paso.	1,18
… en qué casos la solución numérica obtenida al aplicar un determinado método coincide con la solución exacta.	1,45
… la estabilidad o inestabilidad de un método con un cierto tamaño de paso.	1,27
… el concepto de convergencia de un método numérico.	1,91
… la relación que existe en el orden de un método y la precisión de la solución numérica obtenida.	1,27

Tabla 2. Enunciados del cuestionario con los promedios obtenidos.

6. Conclusiones

Como se pudo apreciar en los resultados mostrados, ninguno de los índices correspondientes a los distintos ítems de las encuestas tomadas supera el valor 2. Esto significa que el uso de los CDF contribuyó bastante o mucho en el proceso de comprensión de los métodos y conceptos involucrados en la resolución numérica de PVI.

Estos resultados fueron reafirmados también por las opiniones emitidas por los alumnos y por las calificaciones obtenidas por cada uno de ellos en el parcial práctico – conceptual. El promedio de las calificaciones fue de 8,50 puntos, no habiendo notas inferiores a 6,50 puntos.

7. Referencias bibliográficas

Blythe, T. (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Argentina, Buenos Aires: Paidós.

Canós, L. y Mauri, J. (2005). Metodologías activas para la docencia y aplicación de las nuevas tecnologías: una experiencia. XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI), Universidad Politécnica de Valencia, Gandía, España.

Canós, L., Ramón, F. y Albaladejo, M. (2008). Los roles docentes y discentes ante las nuevas tecnologías y el proceso de convergencia europea. V Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria, Universidad Politécnica de Valencia, Gandía, España.

Caligaris, M. & Rodríguez, G. (2008). Una ventana a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería: XIV Encuentro Nacional, VI Internacional. Facultad Regional Mendoza, Mendoza, Argentina.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista, P. Metodología de la investigación. McGraw Hill. México. 1998.

Naharro, S.; Bonet, P.; Cáceres, P.; Fargueta, F.; García, E. (2007). Los objetos de aprendizaje como recurso de calidad para la docencia: criterios de validación de objetos en la Universidad Politécnica de Valencia. Actas del IV Simposio Pluridisciplinar sobo Diseño, Evaluación y Desarrollo de Contenidos Educativos Reutilizables. Bilbao: Universidad del país Vasco.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En Stone Wiske, M. (Comp), La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Argentina, Buenos Aires: Paidós.

Pogré, P. (2001). Enseñanza para la comprensión. Un marco para innovar en la intervención didáctica. En: Aguerrondo, I., Lugo. M.T., Podré, P., Rossi, M. y Xifra, S. Escuelas del futuro II. Cómo planifican las escuelas que innovan. Argentina, Buenos Aires: Educación Papers Editores.

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), The Instructional Use of Learning Objects.