UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 55. Abril 2019
Páginas 123-143

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Um estudo da Primeira Forma Quadrática: Uma proposta de ensino com construção dinâmica

Ana Carla Pimentel Paiva, Francisco Régis Vieira Alves

Fecha de recepción: 18/07/2018
Fecha de aceptación: 15/04/2019

Resumen

En este artículo se presenta un análise epistemológico de un concepto de la teoría matemática de las superficies, denominada Primera Forma Cuadrática. Ante el carácter reconocidamente abstracto de ese concepto, utilizaremos algunos elementos clásicos constituyentes de la Ingeniería Didáctica - ED para la investigación de la enseñanza del objeto matemático en cuestión. De este modo, presentaremos definiciones que nos permitan el cálculo y la comprensión del concepto. Además, utilizaremos el software GeoGebra, para evidenciar la interpretación y significación visual de los conceptos previos involucrados, ayudando así, de forma cualitativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto.
Palabras clave: Primera forma cuadrática. Superficies. GeoGebra. Ingeniería Didáctica.

Abstract

In this article, we discuss an epistemological analysis of a concept of the vast mathematical theory of surfaces, called the First Quadratic Form Faced with the admittedly abstract character of this concept, we will use some classic elements of Didactic Engineering - ED to investigate the teaching of the mathematical object in question. In this way, we will present definitions that allow us to calculate and understand the concept. In addition, we will use GeoGebra software to highlight the interpretation and visual meaning of the previous concepts involved, thus helping, in a qualitative way, the teaching and learning process of the concept.
Keywords: First quadratic form. Surface. GeoGebra. Didactic Engineering.

Resumo

Abordamos nesse artigo uma análise epistemológica de um conceito *da teoria matemática das superficies, denominado* Primeira Forma Quadrática Diante do caráter reconhecidamente abstrato desse conceito, utilizaremos alguns elementos clássicos constituintes da Engenharia Didática – ED para investigação do ensino do objeto matemático em questão. Desse modo, apresentaremos definições que nos permitam o cálculo e a compreensão do conceito. Além disso, utilizaremos o software GeoGebra, para evidenciarmos a interpretação e significação visual dos conceitos prévios envolvidos, auxiliando assim, de forma qualitativa no processo de ensino e aprendizagem do conceito.
Palavras-chave: Primeira forma quadrática. Superfícies. GeoGebra. Engenharia Didática.

1. Introdução

Este artigo foi elaborado no âmbito de uma pesquisa preliminar e em andamento de uma dissertação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, que busca utilizar a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. Baseado nessa metodologia, o nosso objetivo nesse artigo é a realização de uma análise preliminar de um importante conceito de Geometria Diferencial, intitulado primeira forma quadrática.

A Geometria Diferencial - GD é a área que estuda as propriedades geométricas de curvas, superfícies e suas generalizações, utilizando as técnicas do cálculo infinitesimal. Essa área da Matemática apresenta forte interação com outras áreas da ciência, desde sua origem, com a cartografia, passando pela Teoria da Relatividade, até os dia de hoje, onde é crescente o estudo de temas relacionados à Analise e à Física (Paiva, Alves, 2018).

Devido a esse caráter de interdisciplinaridade essa área tem mostrado grande vitalidade e se desenvolvido em várias direções do conhecimento e com considerável volume de pesquisa (Da Silva, 2009, p. 44). Contudo, apesar de sua relevância, Grande, Nunes e Silva (2015, p. 3) relatam um déficit de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de GD:

> No que tange às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial observou-se uma escassez de trabalhos e pesquisas ligados ao assunto, o que se pode sugerir a possibilidade de investigações e uma maior exploração do tema em sala de aula por parte dos professores, com uma ampla gama de aplicações e conteúdos que podem ser envolvidos em seu estudo.

Além disso, os autores também enfatizam as diversas possibilidades que a exploração do ensino dessa área ofereceria:

> Além da possibilidade de relacionar diversos conteúdos, por meio do contexto histórico e suas aplicações, a Geometria Diferencial permite a exploração da intuição geométrica e da analogia com conceitos ligados à Física por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses objetivando a construção do conhecimento matemático, sendo que o tratamento desses objetos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática (Grande, Nunes e Silva ,2015, p.3)

Por essa razão, pretendemos ao longo desse artigo realizar uma análise epistemológica desse conceito relacionado a superficies, o conceito de primeira forma quadrática. Portanto, iniciaremos esse artigo expondo uma sucinta descrição da metodologia de pesquisa que norteia a nossa análise.

Posteriormente, apresentaremos uma pequena digressão histórica que destaca nomes de grandes matemáticos que introduziram o conceito de superfícies e primeira forma quadrática, destacaram suas propriedades básicas e propuseram problemas relacionados a esses objetos matemáticos.

Por meio dessa fundamentação pretendemos iterar o ponto de vista defendido por Alves, Borges Neto e Maia (2012, p. 54) que enfatizam "a relevância do estudo da Matemática, por meio de sua História e Epistemologia". Além disso, introduziremos uma fundamentação teórica, estabelecendo o formalismo matemático subjacente do estudo desse conceito.

Posteriormente, aprofundaremos uma discussão acerca de como a construção dinâmica de conceitos geométricos, por meio da utilização do *software GeoGebra*, facilita o entendimento das definições desses conceitos. Em seguida, utilizaremos essas construções no âmbito do ensino de superficies, com uma ênfase no conceito *primeira forma quadrática*.

Para realizarmos tal estudo, enfatizaremos e descreveremos situações em que a visualização de determinadas propriedades e a exploração perceptual garantido pelo emprego da tecnologia, no contexto do ensino, atribuam significados intuitivos, tácitos e heurísticos a determinados conceitos abstratos *(ALVES, 2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017).* Por fim, tratraremos de conclusões e oportunas ponderações decorrentes deste trabalho.

1. Engenharia Didática – ED

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.66) como "um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino."

Ainda segundo os autores, a metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisas, denominadas de análises a priori e análises a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. A sistematização prevista pela ED, é composta por quatro fases: análises prévias, análises a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

Na primeira fase, as análises previas, na perspectiva de Artigue (1995), o pesquisador determina as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas. A fase posterior, análises a priori, é a etapa em que o pesquisador elabora e analisa uma sequencia de situações didáticas (Almouloud,2007).

Do mesmo modo, Alves (2018,,p.13) retrata esta perspectiva, descrevendo que a dimensão epistemológica abrange as "características do saber em jogo", a dimensão cognitiva explora "as características cognitivas do público alvo" e por fim a dimensão didática que averigua "as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino".

Por essa razão, nas análises prévias , pretendemos investigar a gênese do campo epistêmico matemático de GD e os respectivos conceitos matemáticos desse campo, realizando assim uma análise epistemológica do objeto matemático primeira forma quadrática.

Experimentação pode ser definida como a etapa que em ocorre a aplicação da sequência didática[1] , ou seja, é a etapa para garantir os resultados práticos com a análise teórica .(Almouloud, 2007).

Por fim, a análise a posteriori e a validação refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, a etapa em que ocorre efetivamente a fase experimental da pesquisa (Almouloud, 2007).

Em relação ao âmbito de interesses da ED, assinalamos o entendimento e controle epistemológico, por parte do pesquisador, o permite o estudo das “representações epistemológicas” (Artigue, 1989, p. 1). Tal controle, segundo Artigue, funciona no sentido de: nos auxiliar a retomada da historicidade dos conceitos científicos matemáticos; e nos auxiliar compreender o papel das noções matemáticas, como o rigor, cultivado no ensino atual.

Assim, a vista do apresentado, determinamos que a utilização de tal metodologia é crucial, devido seus critérios sistemáticos e pressupostos que permitem o desenvolvimento adequado da pesquisa, além de permitir compreender de forma diferenciada o nosso fenômeno de interesse.

Vale ressaltar que nesse trabalho, iremos nos restringir apenas à análise prévia e construção de situações/análises a priori que permitem realizar a construção das sessões de ensino que detém a possibilidade de realizações didáticas em sala de aula, no contexto do ensino de GD.

Por esse motivo, analisaremos de acordo com ALMOULOUD (2007, p.172), a saber: estudo da organização matemática da Geometria Diferencial conjuntamente a uma análise didática do conceito primeira forma quadrática.

De modo específico, nos ateremos ao estudo das gêneses históricas envolvendo o conceito de primeira forma quadrática (apresentada na seção 2); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático); obstáculos relativos ao conceito de primeira forma quadrática, conceitos reconhecidamente complexos vinculados ao conceito de primeira forma quadrática.

Após esta pequena descrição do método utilizado em nossa investigação, abordaremos, no próximo segmento, uma exposição histórica da gênese do conceito de primeira forma quadrática.

2. Enfoque histórico

Do ponto de vista de Eves (2004), a gênese em torno do estudo de superfícies, ocorreu por volta de 1772,quando Leonhard Euler (1707-1783),realizou um estudo da curvatura das seções planas de uma superfície[2], escrevendo sobre o problema de se determinar quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente (isto é,

---

[1] Definiremos que uma sequência didática pode ser formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

[2] Essas são as curvas na superfície que são obtidas pela intersecção da superfície com um plano normal a ela. Uma bela apresentação desse assunto foi também elaborada pelo menos conhecido soldado francês Jean Baptiste Marie Meusnier (1754-1793).

sem distorcê-la) sobre um plano. O matemático descobriu que a condição necessária para que isso ocorra é que a superfície seja *regrada* (ou seja, folheada por retas).

O autor também menciona uma das mais significativas observações de Euler acerca da teoria de superfícies encontra-se num fragmento sem importância: "Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarium variabilium [3]". Apartir dessa observação que é o reconhecido o fato das coordenadas *(x,y,z)* dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes.Entretando nem Euler nem seus contemporâneos seguiram essa idéia de estudar superfícies através da representação das coordenadas *x, y, z* em termos de funções de duas variáveis.

A aplicação de tal idéia só ocorreu em 1827 ,quando o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) na sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* utilizou tal representação paramétrica sistematicamente. As variáveis *u* e *v* foram definidas como "coordenadas curvilíneas" sobre a superfície.

Além disso,o matemático também introduziu a forma diferencial quadrática ds^2, hoje conhecida como *primeira forma fundamental*, que essencialmente exprime as distâncias sobre a superfície, e escreve ds^2 em termos de três funções *E, F* e *G* de *u* e *v* o que lhe permite escrever equações para as curvas geodésicas[4] (Eves,2004).

A seguir, explanaremos algumas definições que nos permitam o cálculo e a compreensão dos conceitos relacionados a *primeira forma quadrática* .

3. Fundamentação teórica

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superficie parametrizada regular .O plano tangente a X em ponto (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0), denotado por T_pX, onde $q = (u_0, v_0) \in U$. A aplicação desse plano tangente da superficie, $\forall\ q \in U$, dada por:

$$I_q : T_qX \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow I_q(w) = < w, w > = |w|^2$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q. Teneblat (2008) representa um vetor $w \in T_qX$ é da seguinte forma:

$$w = a\, X_u(u_0, v_0) + b\, X_v(u_0, v_0), \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

[3] Dada uma superfície de qualquer, a natureza das suas coordenadas devem ser uma função binária.
[4] Estas são as curvas na superfície com a propriedade que qualquer segmento suficientemente pequeno é o caminho mais curto entre os seus extremos.

$$I_q\,(w) = \ a^2 < X_u, X_u > (u_0, v_0) + 2ab < X_u, X_v > (u_0, v_0) + \ b^2 < X_v, X_v > (u_0, v_0) \quad *$$

Adotando a subsequente notação:

$$E(u_0, v_0) = < X_u, X_u > (u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) =< X_u, X_v > (u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = < X_v, X_v > (u_0, v_0),$$

teremos que a primeira forma quadrática $*$ pode ser reescrita por:

$$I_q\,(w) = \ a^2 E(u_0, v_0) + 2ab\, F(u_0, v_0) + \ b^2 G(u_0, v_0),$$

com $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v),pois os vetores X_u e X_v não se anulam .

Variando (u, v), temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática* .

Propriedade (1): Seja $X : U \longrightarrow S$ uma parametrização de uma superficie e seja e $X^* : U \longrightarrow S^*$ outra parametrização de uma superficie distinta, tais que $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ em U . Então a aplicação $\phi = E^* \circ E^{-1}: E(U) \longrightarrow S^*$ é uma isometria local, ou seja, existe uma deformação em X que a torna, a superficie X^* (Do Carmo,2012, p.263) .

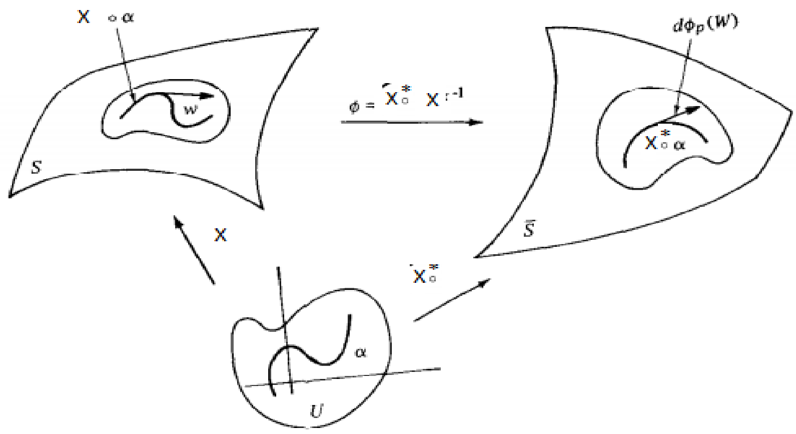

Figura 1 – Esquema de aplicação isométrica

Fonte :Manfredo (2012, p. 264).

Para o melhor entendimento dessa propriedade, exibiremos e ilustraremos um exemplo: deformação de duas superficies isométricas: a catenóide e a helicóide. A parametrização da catenóide é dada por $X(u, v) = (\, a\cosh v\; cosu, a\cosh v\; sen\; u, av)$

em que $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$,com os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental :

$$E(u,v) = a^2cosh^2v \text{ , } F(u,v) = 0, \; G(u,v) = a^2(1 + senh^2v) = a^2cosh^2v \text{ .}$$

Enquanto, a parametrização da helicóide é dada por por $X^*(u^*,v^*) = (v^* \cos u^*, v^* sen\, u^*, au^*)$, em que $0 < u^* < 2\pi$, $-\infty < v^* < \infty$. Definiremos uma reparametrização da helicóide para podermos usar a propriedade:

$$u^* = u \text{ ; } v^* = a\, senh\, v \text{ , em que } 0 < u < 2\pi \text{ , } -\infty < v < \infty$$

Assim, teremos: $X^*(u,v) = (a\, senh\, v \cos u, asenh\, v\, sen\, u, au)$, e os respectivos coeficientes da primeira forma coincidirão com os coeficientes obtidos na catenóide, $E*(u,v) = a^2cosh^2v$, $F*(u,v) = 0$, $G*(u,v) = a^2cosh^2v$. A figura abaixo, ilustra as etapas dessa deformação.

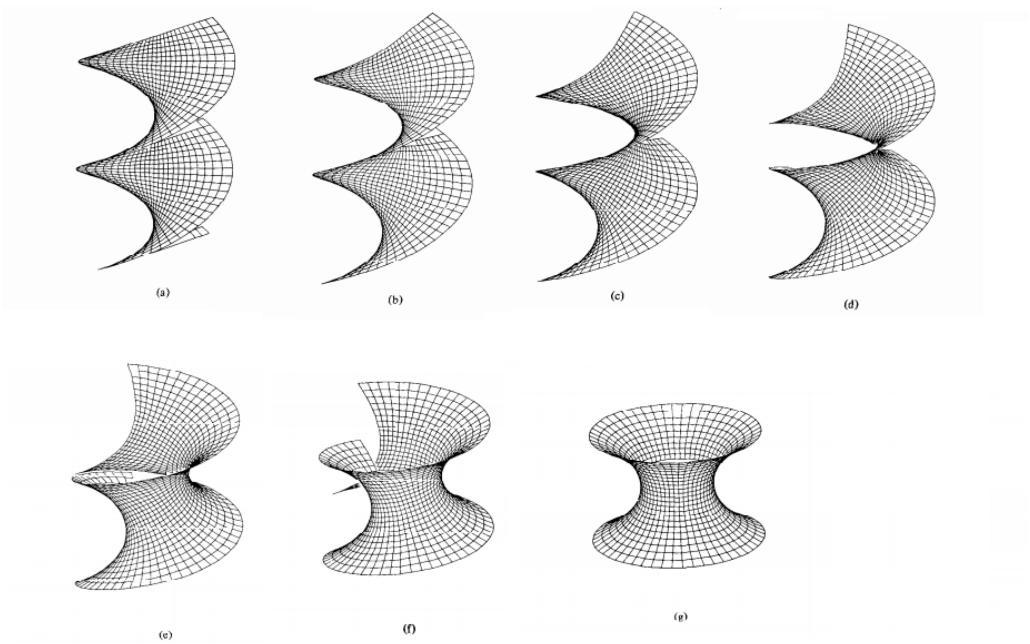

Figura 2 - Deformação isométrica do helicóide no catenóide.
Fonte: Do Carmo (2012, p. 267/268).

Ainda observe que, “se X e X^* são superficies isométricas, então as propriedades geométricas das superficies, que dependem apenas da primeira forma quadrática, são preservadas pela isometria” (Teneblat,2008, p.147). Dentre as propriedades que dependem da primeira forma quadrática, Teneblat (2008, p. 141) destaca as seguintes:

Propriedade (2) : Seja $X(u,v)$ uma superficie parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X\big(u(t),v(t)\big), t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superficie, então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))}\ dt,$$

onde usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superficie em que $q(t) = (u(t),v(t))$.

Propriedade (3) : Se duas curvas da superficie $\alpha(t) = X\big(u(t),v(t)\big)$ e $\beta(r) = X\big(u(r),v(r)\big)$ são tais que $(u(t_0),v(t_0)) = (u(r_0),v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por :

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0),\beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(r_0)|} .$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u,v)$ em (u_0,v_0) é dado por :

$$\cos\theta = \frac{\langle X_u,X_v \rangle}{|X_u||X_v|}(u_0,v_0) = \frac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)}} .$$

Propriedade(4) : Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superficie parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por ;

$$A\big(X(D)\big) = \iint \sqrt{EG - F^2}\ dudv$$

Em que E , F, G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X.

Após essa reduzida fundamentação matemática do conceito primeira forma quadrática de superficie e suas respectivas caracterizações, observamos a utilização de diversos conceitos relacionados ao Cálculo de Varias Variáveis - CVV. Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017) defende a exploração gráfico-geométrica desses conceitos matemáticos relacionados a CVV,e o desenvolvimento de uma idéia intuitiva do conceito, como forma de facilitar o entendimento do mesmo.

Por esse motivo, na próxima seção, abordaremos, de acordo com o que assinalamos na introdução desse artigo, as potencialidades das construções dinâmicas que auxiliem a visualização desses conceitos.

4. O ensino com construções dinâmicas por meio do *software* GeoGebra

Conforme Nascimento (2012, p. 125), o uso de recursos tecnológicos digitais no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer, pois "há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de *softwares* educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores." Muitos professores ainda se utilizam da metodologia tradicional cuja principal característica é a repetição dos conceitos, em que o conhecimento é apenas memorizado e reproduzido (Anastasiou e Alves ,2003).

Faria, Souza e Fernandes (2015, p.68) defendem uma mudança na postura desses profissionais, em especial, os que lecionam as disciplinas de matemática, declarando que é papel desses docentes a busca por metodologias que motivem os alunos a aprender, declarando que:

> o docente deve buscar novos conhecimentos para aprimorar a sua formação, sobretudo dos recursos tecnológicos disponíveis em sua escola e assim criar métodos didáticos aplicáveis à sua disciplina, adequando à realidade dos discentes e fazendo-os perceber a Matemática de modo diferente.

Nascimento (2012, p. 03) explana acerca da utilização dos recursos tecnológicos no ensino de geometria, manifestando que "a proposta do uso de *softwares* de geometria dinâmica[5], no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica".

Dentre os *software*s de geometria dinâmica, o GeoGebra permite a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, permitindo assim o trabalho, com estudantes, das idéias intuitivas de conceitos de GD. (Grande, Nunes e Silva, 2015).

Em consonância, Ferri, Calejon e Schimiguel (2013) defendem que o *software* tem a capacidade de aumentar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante na assimilação de conceitos e tornando o ambiente de aprendizagem mais atrativo.

Santos e Breda (2018, p.31) salientam que "o GeoGebra permite a manipulação de objetos no plano, no espaço e a representação de funções vetoriais reais uni ou bidimensionais de duas variáveis reais." Meier e Da Silva (2015, p. 137) esclarecem que por meio dessa manipulação, com sua movimentação dos objetos contruídos na tela do computador, "os alunos observam os resultados obtidos, inicialmente de forma empírica, porém após determinado tempo é possível estimular o desenvolvimento da argumentação, que visa explicar as regularidades percebidas".

Devido a essas potencialidades da utilização do *GeoGebra,* propomos o emprego das propriedades visuais do software, para uma ressignificação de conceitos, o que exige conhecimentos matemáticos mais sofisticados,

[5] Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso. (Grande, Nunes e Silva, 2015).

proporcionando diversas possibilidades no que diz respeito ao estudo de *primeira forma quadrática*. Dessa forma, na seção seguinte, apresentaremos algumas construções dinâmicas, cuja manipulada e exploração didática, estimulam a intuição geométrica auxiliando, dessa forma, na redução da abstração do conceito de primeira forma quadrática e facilita a aprendizagem relacionada ao mesmo.

5. Uma proposta de construção dinâmica

Apresentaremos uma proposta de utilização do GeoGebra baseado no ponto de vista de Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017) que defende a utilização do *software* GeoGebra de forma a contribuir para uma ressignificação de conceitos, estabelecendo o conjecturas e verificando geometricamente suas veracidades, propiciando assim um processo de exploração e investigação matemática.Em conssonância, com base e amparo na ED , delinearemos questões (situações problema), formularemos determinadas hipóteses, que detém a possibilidade de serem investigadas, a posteriori, de modo empírico.

Construção (1) :Considere a superficie $X\,(u, v) = (\operatorname{sen} u, cos\ u, v)$, com $-10 < u < 10$, $-10 < v < 10$, que descreve um cilindro reto, sendo obtida por meio da rotação da reta $x = (1{,}0, v)$ em torno do eixo Oz .

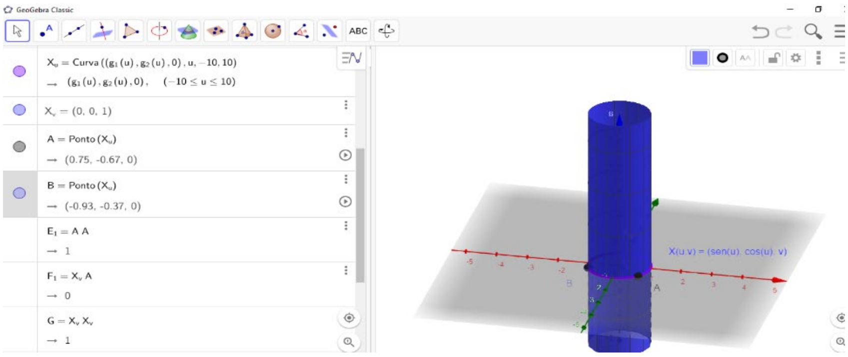

Figura 3 – Construção do cilindro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Tomaremos o ponto $\mathrm{A}\,(0.75, -0.67, 0)$ para a análise e obtenção do coeficientes da primeira forma quadrática , para isso, inicialmente calcularemos a derivada da superficie X em relação as variáveis u e v .Para isso, deveremos calcular as derivadas das coordenadas separadamente, denominado as funções coordenadas de f_n em que n designa a coordenada e as derivadas por g_1, g_2 as derivadas relativas a u e g_3 a derivada relativa a v .

Note que não definimos a derivada da terceira coordenada da superficie em relação a u , nem a derivada da primeira e segunda coordenada em relação a v ,por assumirem valores nulos. Assim calculamos no GeoGebra, apenas as derivadas diferentes de zero, encontrando $X_u = (cos(u), -sen\,(u), 0)$, e em relação a segunda variável $X_v = (0,0,1)$. Na figura abaixo, se encontra o protocolo de construção para o cálculo de tais derivadas.

	Nome	Descrição	Valor
1	Função f_1		$f_1(u)$ = sen(u)
2	Função f_2		$f_2(u)$ = cos(u)
3	Função g_1	Derivada de f_1	$g_1(u)$ = cos(u)
4	Função g_2	Derivada de f_2	$g_2(u)$ = -sen(u)
5	Função f_3		$f_3(v)$ = v
6	Função g_3	Derivada de f_3	$g_3(v)$ = 1
7	Curva Paramétrica X_u	Curva((g_1(u), g_2(u), 0), u, -10, 10)	X_u:(cos(u), -sen(u), 0)
8	Ponto X_v(0, 0, 1)		X_v = (0, 0, 1)
9	Ponto A	Ponto sobre X_u	A = (0.75, -0.67, 0)
10	Ponto B	Ponto sobre X_u	B = (-0.93, -0.37, 0)
11	Número E_1	A A	E_1 = 1
12	Número F_1	X_v A	F_1 = 0
13	Número G	X_v X_v	G = 1
14	Número E_2	B B	E_2 = 1
15	Número F_2	X_v B	F_2 = 0
16	Superfície X	Superfície(sen(u), cos(u), v, u, -10, 10, v, -10, 10)	X(u,v) = (sen(u), cos(u), v)

Figura 4 – Protocolo de construção para o cálculo das derivadas parciais do cilindro
Fonte : GeoGebra

Ao analisarmos a derivada da superfície em relação a u , constatamos que se trata de uma função que depende do ponto escolhido, no caso o ponto A, enquanto que a derivada em relação a v , se trata de um vetor constante logo independe do ponto escolhido. Assim, com base nas ferramentas do *software*, calculamos os coeficientes da primeira forma quadrática no ponto A, obtendo $E_1(u,v) = 1$, $F_1(u,v) = 0$, $G(u,v) = 1$. Assim, como foi definido anteriormente, a primeira forma quadrática será dada por: $I_q\,(w) = \, a^2 + \, b^2$, em que $a\,, b\, \in \mathbb{R}$.

Veja que ao propor essa construção podemos, no GeoGebra, variar o ponto A e analisar o comportamento dos coeficientes da primeira forma quadrática. Por exemplo, variar o valor do ponto A , tomando um ponto $B(-0.93, -0.37,0)$ podemos observar na figura 4, por meio dos cálculos dos produtos internos, que os valores dos E, F e G não variam, ou seja, apesar da derivada em relação a u não ser uma função constante ,os coeficientes da primeira forma quadrática são funções constantes,ou seja, independem do ponto escolhido.

Além disso, observa-se que os valores obtidos nos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro coincidem com os coeficientes da primeira forma quadrática do plano $X(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1 , w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Apresentando as seguintes derivadas parciais $X_u = w_1 = (1,0,0)$ e $X_v = w_2 = (0,0,1)$. Se analisarmos as derivadas parciais desse plano, constatamos que se tratam de funções que independem do ponto escolhido, obtendo $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Veja na figura 5, um exemplo de tal plano.

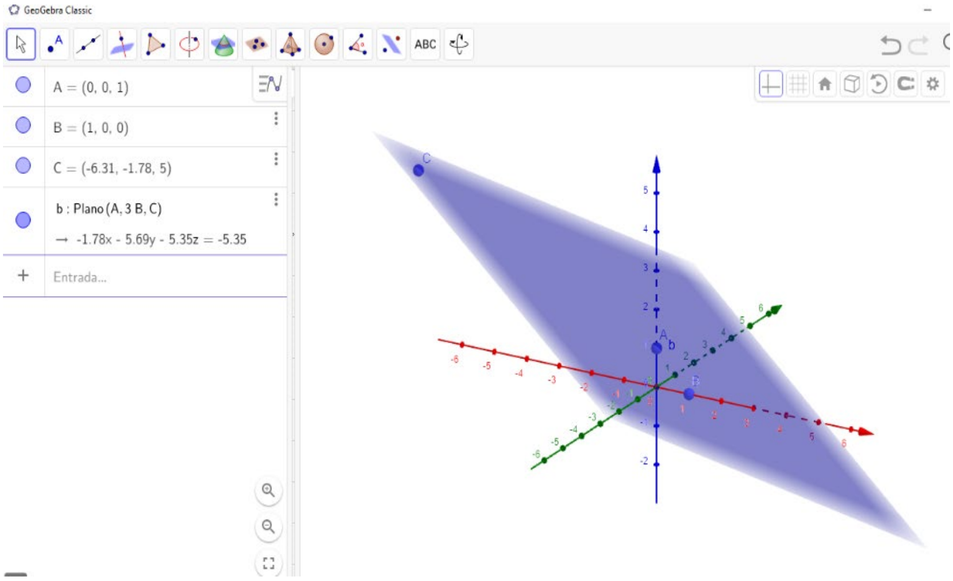

Figura 5 – Exemplo de planos formado por um ponto e dois vetores ortogonais distintos
Fonte : Elaborado pelos autores

Utilizando o fato dos coeficientes da primeira forma quadrática do cilindro e o plano assumirem valores constantes e congruentes, concluímos que estas superfícies são isométricas. Intuitivamente, podemos pensar no plano como uma folha de papel plana que pode ser enrolada em um cilindro, sem deformação.

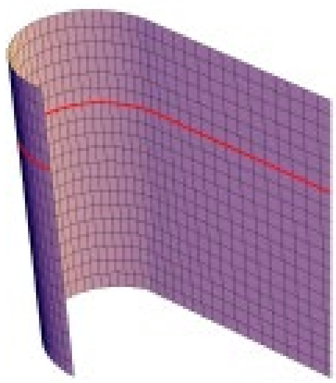

Figura 6 – Idéia intuitiva da transformação isométrica do plano em um cilindro
Fonte : Nunes(2010,p.37)

Veja que por meio dessa construção, assumimos o ponto de vista de Valente (1993), oportunizando o desenvolvimento de uma construção do conhecimento, com o aprendiz no centro do processo educativo compreendendo conceitos e reconhecendo a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas, defendendo a utilização do computador como ferramenta facilitadora nesse proceso por auxiliar na descrição, reflexão e depuração de ideias.

Construção(2) : Proseguiremos, analizando a superficie obtida pela rotação da curva $a = (3 + r\cos u\,, r\,sen\,u, 0\,)$ em torno dos eixos xy, denominada de toro, cuja a aplicação é dada por: $X = ((3 + r\cos u)\cos v\ , (3 + r\cos u)\,sen\,v, u\,)$ em que adotamos r = 1.8 e $-2\,\pi < u < 2\,\pi\,,\ -3\,\pi < v < 3\,\pi$.

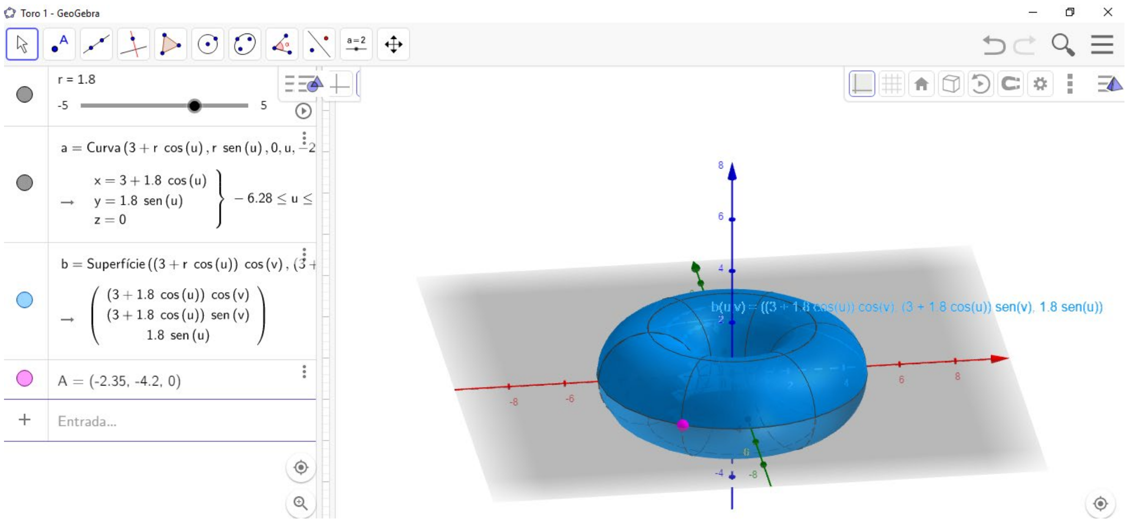

Figura 7 – Construção do toro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Para o cálculo das derivadas parciais, devido ao fato das funções coordenadas possuirem duas variáveis, o protocolo de construção dessa superficie torna-se mais dificultoso, fazendo-se uso de uma interface do GeoGebra denominada Cálculo Simbólico, representada pelo símbolo abaixo:

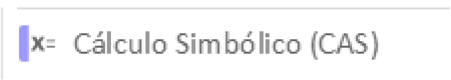

Figura 8 – Simbolização da função CAS no *software* GeoGebra
Fonte : GeoGebra

Veja que, essa função do GeoGebra assenta o pesamento de Almouloud et al. (2004, p.94), que atesta que os ambientes informáticos na educação proporcionam ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimento e a superação das dificuldades na aprendizagem, por proporcionar o cálculo de operações complexas. Veja na figura 8, o uso da ferramenta CAS para o cálculo das derivadas parciais, vale lembrar que designamos as funções coordenadas de forma análoga a primeira construção.

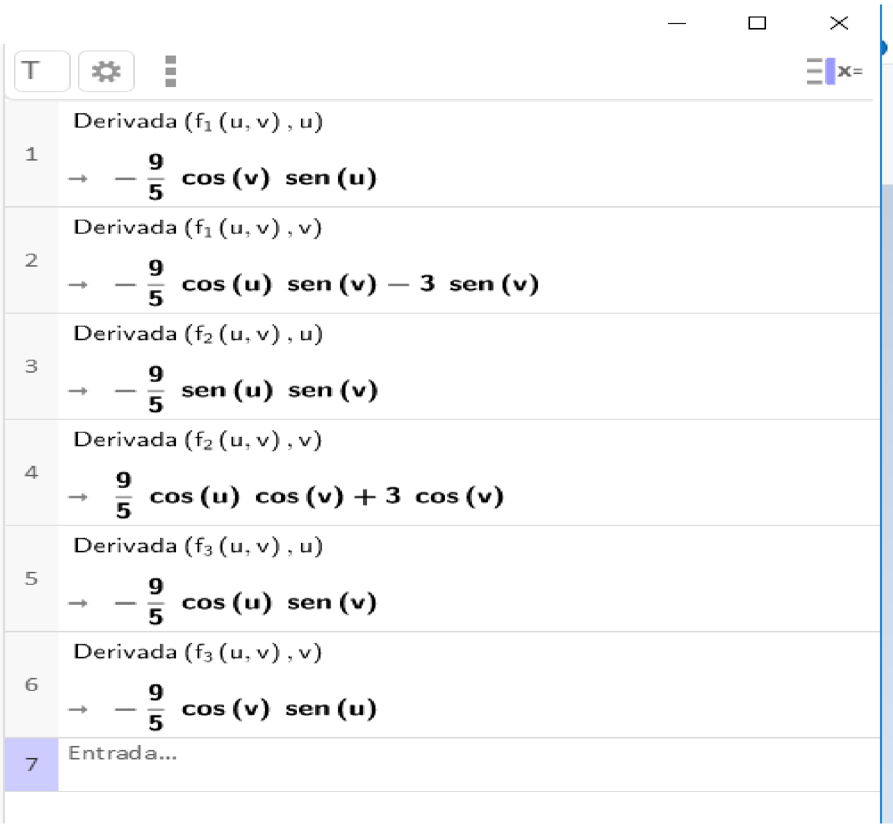

Figura 9 – Utilização da função CAS do *software* GeoGebra para o cálculo das derivadas parciais do toro
Fonte : Elaborado pelos autores

Considerando os dados apresentados na figura 9, concluímos que $X_u = \left(-\frac{9}{5}\cos v \sin u\,, -\frac{9}{5}\sin u \sin v\,, -\frac{9}{5}\cos u \sin v\right)$, e $X_v = (-\frac{9}{5}\sin u \sin v\,, \frac{9}{5}\cos u \cos v + 3\cos v, -\frac{9}{5}\cos v \sin u\,)$.

Por meio dessas derivadas , calculamos no GeoGebra, os coeficientes da primeira forma quadrática desta parametrização obtendo: $E(u,v) = \left(-\frac{9}{5}\right)^2 = (1.8)^2 = 3.24$, $F(u,v) = 0$ e $G(u,v) = (3 + 1.8\,cos\,u)^2 = (3 + 3.24\,cos\,u)^2$. Além disso, podemos definir a primeira forma como $I_q\,(w) = 3.24\,a^2 + b^2(3 + 3.24\,cos\,u)^2$.Observe que se variamos o ponto A ,os coeficientes da primeira forma quadrática variam seus valores, pois nem todos são funções constantes ,nesse caso o valor da primeira forma quadrática varia do ponto escolhido.

Não detalharemos o cálculo desses coeficientes, pois ao realizarmos essa construção, temos como objetivo elencar outra potencialidade do *software* no ensino de primeira forma quadrática, que remete a visualização e um melhor entendimento de um dos conceitos integrantes do cálculo do referido conceito, a derivada parcial. Por esse motivo, na figura abaixo, exibimos o comportamento das derivadas do toro.

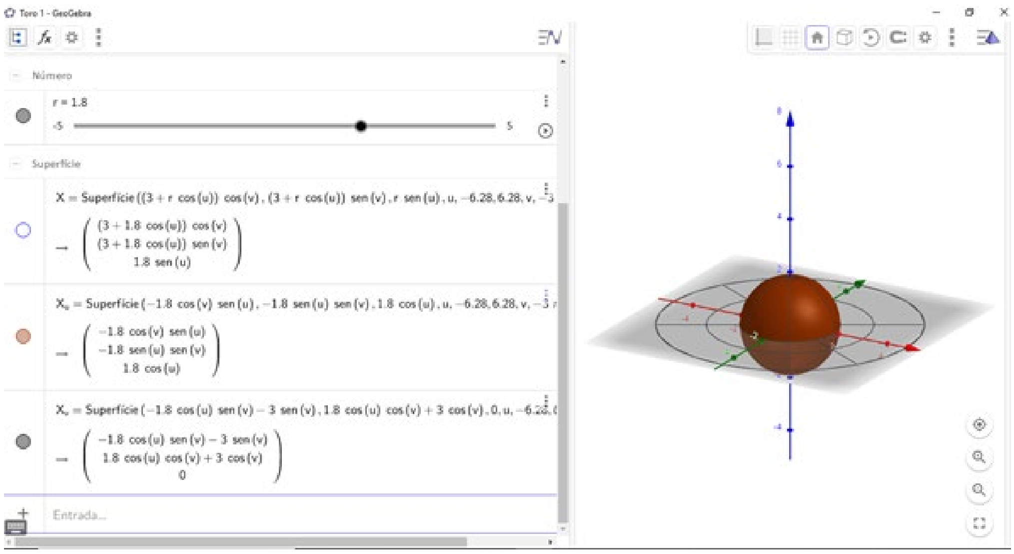

Figura 10 – Representação das derivadas parciais do toro no *software* GeoGebra
Fonte : Elaborado pelos autores

Note que o gráfico da derivada em relação a u , se trata de uma esfera , enquanto que a derivada em relação a v , se trata de uma curva planar. Segundo Guzmán (2002) por meio dessa construção dessa construção gráfica, no GeoGebra, podemos observar a continuidade das derivadas em um determinado ponto e explorar a noção do conceito. Entretanto vale ressaltar que para essa exploração, os alunos devem possuir uma boa fundamentação dos conceitos de domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Dessa forma, constatamos que, por meio do GeoGebra, podemos elaborar diversas abordagens, com diferentes viés em relação ao ensino de primeira forma quadrática. À vista disso, apresentaremos na construção a seguir, uma proposta relacionada ao conceito de primeira forma quadrática, priorizando as propriedades descritas por Teneblat (2008), no caso a propriedade referente ao cálculo da área da superfície.

Construção(3):Considere a superficie denominada de sela, cujo a função que a descreve é dada por : $f(u,v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\,(16\,u^2 + 36)(16\,v^2 + 9) - 144}$. Observe, na figura abaixo, a representação dessa superficie e o cálculo dos respectivos coeficientes da primeira forma quadrática.

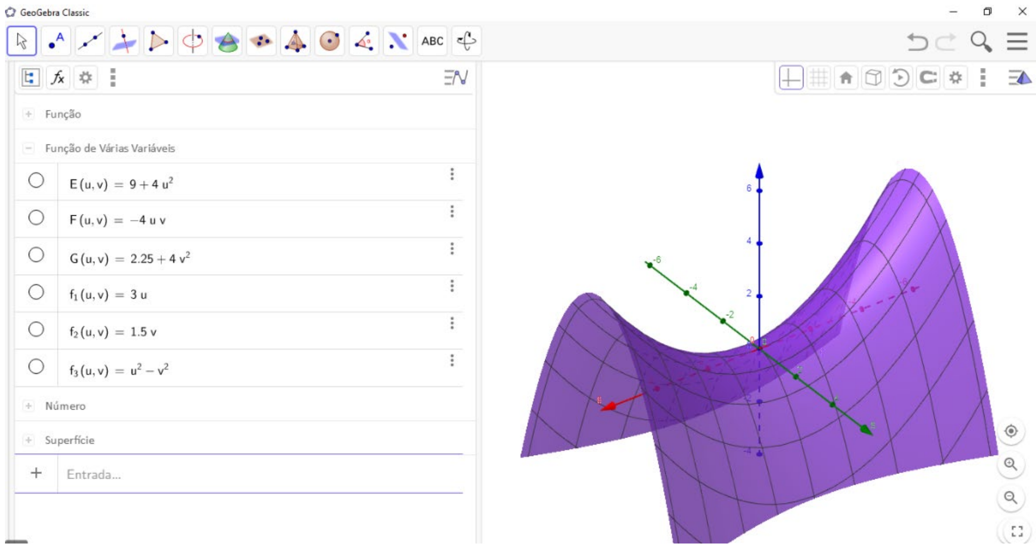

Figura 11 – Representação da superficie sela e os valores dos coeficientes da primeira forma quadrática
Fonte : Elaborado pelos autores

À vista do que mencionamos anteriormente, a finalidade dessa construção é a utilização do software para o cálculo da área da superficie. Para isso, precisamos obter a expressão definida na propriedade [4]:

$$A(X(D)) = \iint \sqrt{EG - F^2}\ dudv$$

Veja na figura abaixo, que utilizamos a janela CAS para o cálculo da expressão que deve ser integrada, e que além de nos fornecer a expressão, os comandos realizados nessa janela nos permitem obter os valores algébricos, como está exibido para o ponto $(0.6 - 1.3)$.

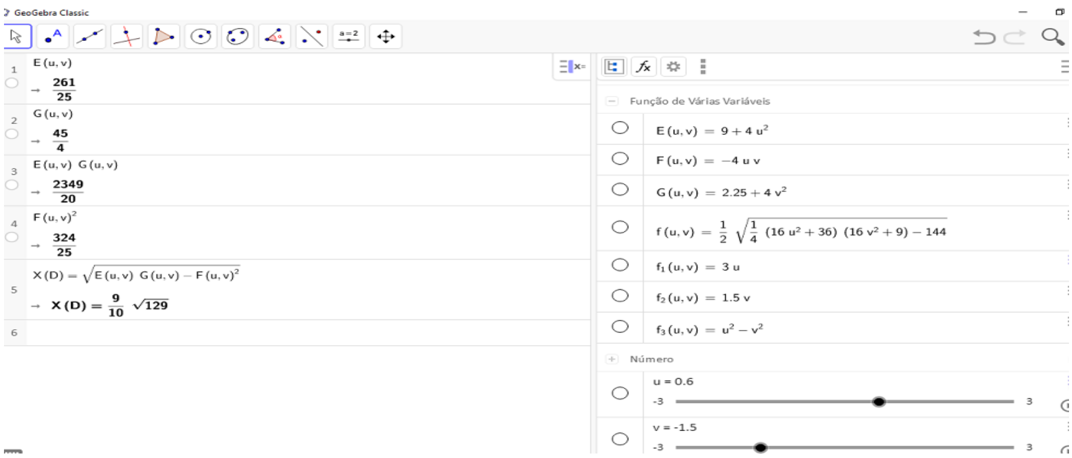

Figura 12 – Representação do cálculo da expressão $\sqrt{EG - F^2}$ dos coeficientes da superficie sela
Fonte : Elaborado pelos autores

Após o cálculo de tal função basta escolhermos o intervalo de integração para o cálculo da área da superficie. Conforme definido na propriedade[4], por se tratar de uma integral dupla, e inexistir, no *software*, comando direto para o cálculo de tal operação, nos baseamos nos algoritmos definidos em Ávila e De Araújo (2012), para contornar tal obstáculo.

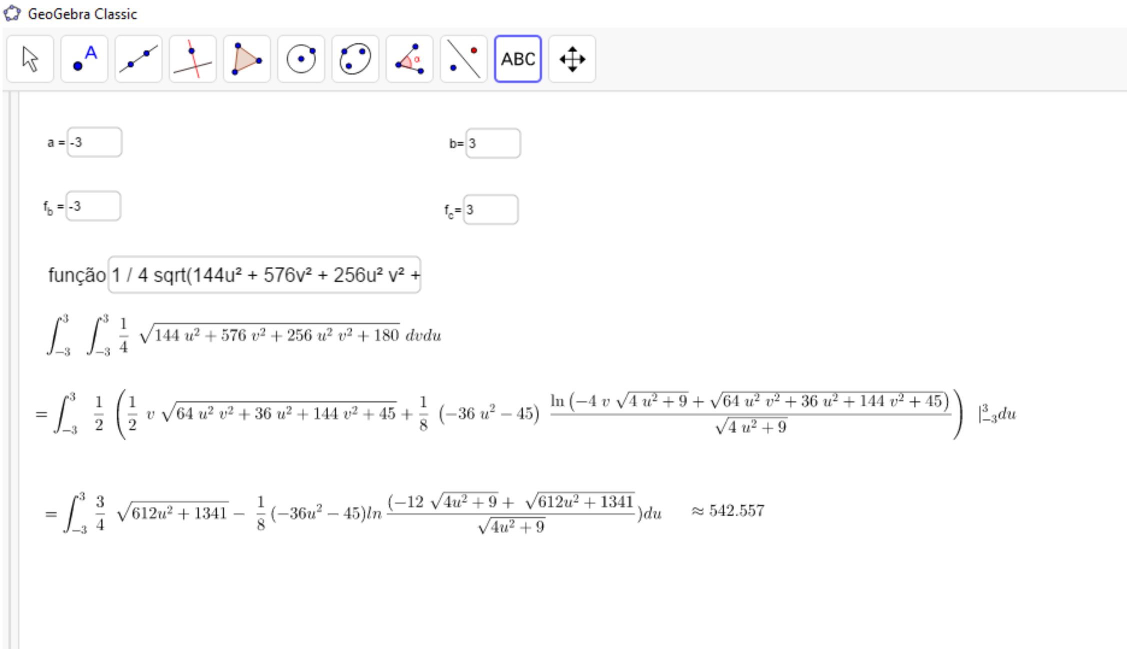

Figura 13 – Cálculo da área da superficie de sela
Fonte : Elaborado pelos autores baseado em Ávila e de Araújo(2012)

Através dessa construção, pretendemos por meio da visualização e das operações desenvolvidas, incitar os conhecimentos intuitivos sobre a integral, e exibir uma das aplicações relacionadas ao conceito de primeira forma quadrática.

Além disso, notamos que por meio dessa e das demais construções apresentadas, podemos mobilizar conhecimentos prévios(função, produto interno, derivada, etc),necessários para o entendimento do conceito em questão, e realizar uma articulação entre os conceitos álgebricos e suas respectivas configurações geométricas.

6. Considerações finais

Por meio desse estudo visamos sugerir uma proposta de ensino de um conceito de Geometria Diferencial, alicerçado por uma pesquisa fundamentada nos principios da Engenharia Didática. Inicialmente, constatamos que apesar da relevancia desse conceito, a quantidade pesquisas relacionadas ao ensino do mesmo é infima.

Para a fundamentação da pesquisa embasamos o conceito primeira forma quadrática históricamente e matematicamente, para que entendessemos a forma como o mesmo se desenvolveu. Após essa fundamentação histórica/matemática notamos que as operações necessárias para o cálculo do conceito, requeriam o uso, de modo frequente, tanto do conhecimento matemático, bem como das nossas habilidades de visualização e percepção. Diante do exposto e da complexidade do conceito, concluímos que essas características poderia indicar uma dificuldade/entrave na aprendizagem do mesmo. Assim, tendo em vista essa problemática, buscamos meios que facilitassem a compreensão do conceito, empregando a sistematização da ED.

Por essa razão decidimos utilizar um software que priorizasse a visualização do conceito em questão. Dessarte, norteados pelas investigações de Alves (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2016; 2017), optamos pela a realização de uma breve análise acerca de que modo a utilização do *software* GeoGebra poderia colaborar com o ensino do conceito primeira forma quadrática, analizando as interfaces do *software* que melhor o elucidavam.

Em seguida, elaboramos construções dinâmicas que proporcionassem um desenvolvimento intuitivo estabelecendo conexões com os conteúdos necessários para o entendimento do conceito de primeira forma quadrática, visto que, esses são complexos e abstratos.

Dessa forma, concluímos que, por meio do GeoGebra priorizamos manipulações geométricas ao invés de execuções de natureza algébrico-analíticas, trazendo uma abordagem diferente dos livros que abordam esse conceito, que embora tragam noções intuitivas, requerem nas atividades apenas o cálculo dos conceitos sem a interpretação geométrica devida. Essa análise nos proporcionou a obtenção de elementos que nos permitem considerar primordial a utilização do GeoGebra na elaboração e desenvolvimento de atividades destinadas à compreensão dos significados do conceito primeira forma quadrática.

Bibliografía

ALVES, F. R. V. (*2012). Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do GeoGebra*. *In: Conferência Latinoamericana de GeoGebra*. Uruguay. 9-18. Acesso em 09 de julho de 2018, de http://www.GeoGebra.org.uy/2012/actas/73.pdf

ALVES, F. R. V. *(2013a). Visualizing in Polar Coordinates with GeoGebra. In: GeoGebra International of Romania.* p. 21-30. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/.

ALVES, F. R. V. *(2013b)*. *Exploring L´Hospital Rule with the GeoGebra*. *In: GeoGebra International of Romania. p. 15-20.* Acesso em 10 de julho de 2018, de http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/.

ALVES, F. R. V. *(2015). Visualização de Teoremas em Análise Complexa*: *exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo. Revista Sinergia.* v. 16, nº 1, 65 – 76. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.cefetsp.br/edu/prp/sinergia/

ALVES, F. R. V. *(2016)*. *Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva*. *Revista Interfaces da Educação***,** v. 7, nº 21, 131 – 150. Acesso em 10 de julho de 2018 , de https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces article / /viewFile/1259/1183

ALVES, F. R. V. (2017). Engenharia didática com o tema integração de funções na variável complexa: análises preliminares, a priori e modelização de situações. Revista de Ensino de Ciências e Tecnologia***.****v. 7, nº 1, 1 – 15.* Acesso em 10 de julho de 2018 , de http://www.redalyc.org/html/4675/467546204013/.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. C. (*2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercursões para a formação do professor de matemática no Brasil. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA–RS,* v. 2, n. 18. Acesso em 27 de maio de 2019, de http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/download/304/222

ALVES, F. R.V.; NETO, H. B.; MAIA, J. AD*.(2012). História da Matemática: os números figurais em 2D e 3D. Revista Conexões Ciência e Tecnologia*, v. 6, n. 2, p. 40-56.

ALMOULOUD, S. A. et al. *(2004).A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos.* Revista Brasileira de Educação, São Paulo, n.27, p. 94-108, set. /dez. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.redalyc.org/html/275/27502707/.

ALMOULOUD, S. A.; DE QUEIROZ, C.; COUTINHO, S.(*2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 62-77. Acesso em 16 de julho de 2018, de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008v3n1p62/12137

ALMOULOUD, A.S*.(2007).Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

ANASTASIOU, L. D. G. C.; ALVES, L.P. (Orgs.). *(2003).Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*. Joinville: UNIVILLE.

ARTIGUE, M.*(1989). Ingénierie didactique. Publications mathématiques et informatique de Rennes*, v. 1989, n. S6, p. 124-128*.* Acesso em 16 de julho de 2018, de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1989___S6_124_0.pdf

ARTIGUE, M.*(1995). Ingeniería didáctica.* Ingeniería didáctica en educación matemática, v. 33, p. 60. Acesso em 27 de maio de 2019, de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=41

ÁVILA, G.; DE ARAÚJO, L. C. L.*(2012). Cálculo - Ilustrado, Prático e Descomplicado*, ed. 1ª. Editora LTC*.* São Paulo*.*

DO CARMO, M. P. *(2012). Geometria diferencial de curvas e superfícies.* SBM.

DA SILVA, C. P.*(2009). Aspectos históricos do desenvolvimento da pesquisa matemática no Brasil*. Editora Livraria da Fisica.

EVES, H.*(2004) Introdução à história da matemática/Howard Eves*; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

FERRI, J.C.; CALEJON, L. M. C.; SCHIMIGUEL, J.*(2013). Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática. Revista Gestão Universitária*, v. 1, p. 4. Acesso em 10 de julho de 2018 , de http://www.gestaouniversitaria.com.br/artigos/uso-do-GeoGebra-no-ensino-de-matematica--2

FARIA, I. G.; SOUZA, L. D. F. R.; FERNANDES, E. A.*(2015). Métodos informatizados contribuem para o ensino da Matemática: utilização do GeoGebra para o ensino de geometria-Revisão bibliográfica. Revista Eletrônica de Educação e Ciência*, v. 5, n. 1, p. 65-70. Acesso em10 de julho de 2018, de http://fira.edu.br/revista/wp-content/uploads/2015/03/2015_vol5_num1_pag65.pdf

GRANDE, A.L. NUNES, L.D.O. SILVA, M.P.D.*(2015). O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra*. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática*.* Tuxtla- Chiapas - México. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/225/130

GUZMÁN, M. (2002).*The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis*. In: 2 nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, Hersonissos: University of Crete.p. 1-24. Acesso em 10 de julho de 2018, de https://eric.ed.gov/?id=ED472047.

MEIER, M.; DA SILVA, R. S.*(2015) O uso da Geometria Dinâmica em Modelagens Geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental*. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 4, n. 6. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf_113

NASCIMENTO, E. G.*(2012). Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN*, v. 8457, p.1808. Acesso em 10 de julho de 2018, de https://uol.unifor.br/oul/conteudosite/?cdConteudo=3363732

NUNES, B.*(2010) .Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet*. Universidade Federal de Santa Catarian- Florianópolis. Monografia. Acesso em 10 de julho de 2018, de http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Orientacoes_arquivos/tcc_bruna_certo.pdf

PAIVA, A. C. P.; ALVES, F. R. V.*(2018). Utilização do GeoGebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.* ISSN 2237-9657, v. 7, n. 2, p. 65-79.Acesso em 10 de julho de 2018, de https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35458

DOS SANTOS, J. M. D. S.; BREDA, A. M. D.'A.*(2018). A projeção estereográfica no GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.* ISSN 2237-9657, v. 7, n. 1, p. 31-40. Acesso em 16 de julho de 2018, de https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/viewFile/36164/24949

TENEBLAT, K. *(2008). Introdução à Geometria Diferencial.* ed. 2ª. Editora Blucher. São Paulo.

VALENTE, J. A.*(1993). Diferentes usos do computador na Educação*, *In: VALENTE, J. A. (org.), Computadores e conhecimento, repensando a Educação.* UNICAMP-NIED, p. 1-23.

Autores:

Ana Carla Pimentel Paiva: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Ceará - UFC , Mestranda do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM do Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail:carlapimentel00@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves : Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC, Mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará - UFC , Mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará – UFC, Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Ceará, UFC, Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br