REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 12-21

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ACERCAR LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA A LAS AULAS

Manuel de León Rodríguez
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Real Academia de Ciencias

Resumen

En este artículo mostramos como la investigación matemática no puede mantenerse alejada de las aulas a riesgo de presentarse a los alumnos y futuros ciudadanos como una ciencia obsoleta y sin aplicaciones en la vida diaria. El Proyecto Klein de IMU e ICMI, que quiere recordar las ideas de principios del siglo XX del matemático alemán Félix Klein, va en esa dirección. Presentamos dos ejemplos posibles en las que, partiendo de resultados elementales que se enseñan en las escuelas, podemos llegar a las últimas aplicaciones y desarrollos sofisticados de la matemática actual.

1. Acercando la investigación matemática a las aulas

La investigación matemática ha conocido en el último siglo un desarrollo espectacular. A pesar de la crisis de los fundamentos sufrida a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, que culmina con la demostración de Kurt Gödel en 1931 de que cualquier sistema formal consistente que permita describir la aritmética será necesariamente incompleto, es decir, siempre habrá afirmaciones que se puedan expresar en el lenguaje del sistema cuya veracidad o falsedad no se puedan demostrar en ese sistema, las matemáticas han sabido reponerse y han alcanzado cotas extraordinarias.

Desde ese momento, ya podremos ver de la misma manera aquella afirmación de David Hilbert, *"Wir müssen wissen, wir werden wissen" ("Debemos saber, sabremos"),* hecha casi simultáneamente con el anuncio del teorema de incompletitud de Gödel, pero debemos siempre recordar un clásico artículo del Premio Nobel de Física de 1963, Eugene Paul Wigner, titulado "La efectividad irrazonable de la matemática en las ciencias naturales", en la que afirma:

"The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it".

Aunque Wigner tenía un concepto formalista de las matemáticas: *"mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose",* durante los últimos cincuenta años, y muy especialmente desde el advenimiento de los ordenadores, esta disciplina se ha convertido en una pieza indispensable para el desarrollo tecnológico y el mantenimiento de la sociedad del bienestar. Esto sin olvidar su papel clave en el desarrollo de otras ciencias, no solo de la Física, sino también (más recientemente) de la Biología o la Medicina.

Sin embargo, mucha de la importancia de las matemáticas en la educación se desvanece ya que sus últimos avances y sus aplicaciones no llegan a las aulas o, sí lo hacen, no con la suficiente fuerza para causar un impacto en la enseñanza. Pareciera que enseñamos unas matemáticas rígidas, elaboradas hace siglos, de manera que la impresión para muchos alumnos es la de saberes obsoletos e inútiles.

Por otra parte, las matemáticas, como toda ciencia, como toda invención humana, van acompañadas de las historias personales de las mujeres y hombres que las desarrollaron; y de los contextos históricos y científicos que propiciaron esos desarrollos, bien por necesidad o bien por encontrarse a mano el instrumento que precisaban y que los matemáticos, a veces no guiados por el interés práctico, habían elaborado previamente. Es paradigmático el caso de Godfrey Harold Hardy, quién en su Apología de un matemático (1940), afirmaba cosas como esta: "*ninguna persona ha descubierto ya una aplicación militar para las teorías de números o relatividad, y parece improbable que esto ocurra por muchos años".* Hoy en día, la Teoría de Números y los resultados en curvas elípticas se han mostrado esenciales para el desarrollo de la criptografía moderna y permiten transacciones comerciales por internet impensables en los tiempos de Hardy.

Estamos pues convencidos que una aproximación de la investigación matemática a las aulas, acompañada del contexto histórico-científico correspondiente, serviría para formar a nuestros estudiantes de una manera mas integral, a la vez que podría contribuir a una mayor motivación, al percibir que las matemáticas han sido y lo continúan siendo, una ciencia viva; me atrevería a decir, que mas viva que nunca.

Se trataría de presentar un tema que hiciera un recorrido desde sus inicios mas elementales (que habitualmente son los presentados en el aula) hasta los tiempos actuales, viendo como se han producido variaciones y aplicaciones, algunas de ellas insospechadas. A la vez, se vería como existen derivaciones transversales, y esos temas han conducido en muchos casos a la interacción directa con otras ciencias y a desarrollos tecnológicos.

Esta propuesta no es diferente a la en su día propuesta por Félix Klein, catedrático de la Universidad de Gotinga, contenida en su libro de 1908 “Matemática elemental desde un punto de vista superior”. En su aproximación a la enseñanza, Klein precisamente ponía encima de la mesa como las matemáticas que se enseñaban en las facultades no llegaban a las aulas de secundaria. Su preocupación era que llegaran a los profesores que luego las iban a impartir. Pero podemos ser mas ambiciosos y tratar de que lleguen a profesores y alumnos, aun cuando son los profesores los que pueden remachar la tarea con su contacto continuado en el día a día.

Esta propuesta de Félix Klein fue muy notable, ya que se trataba de un investigador de primera línea, autor del llamado Programa de Erlangen que clasificaba las geometrías por sus grupos de transformaciones y que supuso una revolución en la geometría y en las matemáticas en general. Y debe también señalarse una faceta a veces menos conocida de Klein, y fue su impulso a las matemáticas aplicadas a la industria.

La idea de Félix Klein ha sido retomadapor la International Mathematical Union (IMU) y la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en sendas sesiones de sus comités ejecutivos de marzo y abril de 2008, donde tomaron la decisión de proponer un proyecto conjunto que, bajo la dirección del profesor W. Barton (del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda), pusiera en marcha una actualización –en cierto sentido y con todos los matices—de la obra de Klein.

Así, además de una serie de congresos y talleres en diferentes lugares del mundo, se ha puesto en marcha el Blog Proyecto Klein http://blog.kleinproject.org/?lang=es, precisamente con la idea de diseñar viñetas en esa dirección. Según se apunta en el blog, "*el objetivo de las viñetas es dar a los profesores una sensación de conexión entre las matemáticas del mundo del profesor y la investigación y aplicaciones contemporáneas de las ciencias matemáticas. Es por eso que comienzan con algo familiar para el profesor y progresan hacia un mayor entendimiento del tema a través de un pedazo interesante de matemáticas. Al final, ilustran un principio clave de matemáticas. La viñeta ha de estar escrita de manera que se complete este viaje. Una viñeta es un trozo independiente y corto de matemáticas escritas para profesores de secundaria de clases con los alumnos más mayores (PSCAMMs). No se trata de pedagogía, pero inspiran una docencia mejor. No se trata de currículum, pero retan a los profesores a reconsiderar lo que enseñan. No son recursos para usar en clase, sino una fuente de inspiración de la que pueden beber los profesores. El objetivo es refrescar y enriquecer el conocimiento matemático de los profesores.*"

3. Dos ejemplos

En este breve artículo quisiera dar algunas pinceladas de cómo podría hacerse esta aproximación, buscando algunos ejemplos de temas que son parte del currículo de secundaria o bachillerato y que pueden ser utilizados para estos fines, y partiendo del principio de que la mejor manera de mostrar una propuesta teórica es a través de algunos ejemplos ilustrativos. Esperamos con ello complementar en alguna medida las ideas contenidas en el proyecto Klein.

3.1 Kepler, cristales de nieve y los caprichos rudolfinos

No hace falta irse a los últimos avances de la disciplina para encontrar motivos con los que cumplir el objetivo de acercar la investigación a las aulas. Un ejemplo que puede utilizarse con múltiples finalidades es el de Johannes Kepler.

Johannes Kepler es un personaje habitual en la enseñanza secundaria y el bachillerato por sus tres famosas leyes que establecieron los fundamentos del movimiento de los cuerpos que conforman en Sistema Solar. Recordemos aquí estas tres leyes, que se recogieron en la obra de Kepler, *Astronomia Nova*, publicada en Praga en 1609:

1ª) Los planetas recorren órbitas elípticas y el sol se sitúa en uno de los focos de la elipse;

2ª) El área barrida por la recta imaginaria que une sol-planeta sobre la superficie de la elipse, es la misma en intervalos de tiempo iguales;

3ª) El cuadrado del período de la órbita de un planeta alrededor del sol, es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. Esta es la denominada ley armónica.

Estas leyes surgieron de las observaciones y las cavilaciones teóricas. Recordemos que todavía no existía el cálculo diferencial y que las observaciones eran todavía muy rudimentarias, aunque comenzaban a ser más precisas. Así que Kepler fue a Praga en 1600 contratado por Tycho Brahe, danés que ejercía entonces como astrónomo real de Rodolfo II. Brahe es considerado como el "mejor observador del cielo" antes del telescopio, gracias a los ingeniosos aparatos de medición que él mismo construía. Brahe, impresionado por los resultados teóricos de Kepler, estaba dispuesto a darle acceso a sus datos, lo que era una oportunidad que Kepler no podía desaprovechar. De esta manera unieron esfuerzos dos personas con conocimientos complementarios: el observador de los cielos que aprovecha su situación social privilegiada, con el estudioso de la teoría que anhela datos que corroboren sus intuiciones matemáticas.

Hasta entonces, Kepler, había errado por aquella Europa convulsionada por las guerras religiosas, había sido expulsado de Graz, Austria, donde había querido echar raíces, por su negativa a convertirse al catolicismo. Una vez en Praga, Kepler comienza su trabajo, que incluye el escribir un tratado en contra del archienemigo de Brahe, el también astrónomo Ursus. Inicia también una colaboración con Brahe para elaborar unas nuevas tablas astronómicas, las denominados posteriormente Tablas Rudolfinas, en honor de Rodolfo II. En septiembre de 1601, Brahe muere repentinamente, y unos días después Kepler es nombrado astrónomo real en su sustitución.

Ser astrónomo real en aquella época era un buen empleo, pero exigía realizar trabajos astrológicos para el monarca, y no está claro que esto fuera algo que le gustase. Así y todo, esta época praguense es quizás la más pacífica en su agitada vida. Publicó más de treinta trabajos, entre ellos la *Astronomia Nova*, y dos trabajos importantes de óptica, en uno de los cuáles sugirió el telescopio que hoy lleva su nombre. ¡Hasta tuvo la oportunidad de observar una supernova en octubre de 1604! Sin embargo, la muerte de Rodolfo II, las tensiones religiosas crecientes, la muerte de su esposa Bárbara y de su hijo Friedrich de seis años, obligaron a Kepler a trasladarse de nuevo, esta vez a Linz, Austria.

¿Por qué la forma hexagonal?

En el ambiente de tranquilidad praguense es cuando Kepler escribe *“Strena seu de nive sexángula*”. El análisis de Kepler es profundo, y deduce que la forma particular de los copos de nieve debe ser consecuencia de la manera en la que se empaquetan las partículas que los constituyen. Kepler unifica así dos conceptos: el mundo geométricamente ordenado y creado por un Dios matemático, con una ciencia que trata de explicar los fenómenos naturales buscando las causas y leyes que los producen.

Esta obrita de Klepler se la dedica a su amigo y protector Johannes Matthäus Wäckher von Wackenfelds. En la introducción Kepler escribe a su amigo:

“Sí, sé bien que tan aficionado es usted a la nada; de seguro no tanto por su mínimo valor, sino por el juego divertido y delicioso que uno puede tener con ella, cual si fuera un gorrión feliz. Por tanto, me imagino que para usted un regalo debe ser mejor, y mejor recibido, cuando más se acerque a la nada”.

Kepler ironiza aquí con su situación en Praga, siempre pendiente de los pagos a destiempo y recortados de Rodolfo II, en cuya corte trabajaba Kepler de astrónomo, porque ¿qué mejor regalo que dar nada para quién nada recibe? Por otra parte, Kepler hace un juego de palabras con nix (latín) que significa nieve, y nichts (alemán), que significa nada. Kepler piensa además que no habrá mejor regalo en esas fechas que reflexionar sobre algo que cae del cielo. Recordemos que Rodolfo II era un gran aficionado al arte y empelaba ingentes cantidades de dinero en la compra de cuadros y esculturas, descuidando los pagos a los funcionarios y las inversiones públicas, contrayendo deudas ingentes.

Se puede pensar en esas partículas como glóbulos, que se apilan ocupando el mínimo espacio posible, y el empaquetamiento hexagonal es el mejor. Basta ver las colmenas de las abejas, o las teselaciones de un plano, que pueden ser de triángulos, cuadrados o hexágonos.

En éste mismo ensayo, Kepler planteó su famosa conjetura de empaquetamiento, resuelta 300 años despues por Thomas Hales. Años antes, Kepler había compartido correspondencia con el astrónomo y matemático inglés Thomas Harriot, acerca de la manera óptima de apilar balas de cañón en la cubierta de un buque. Sir Walter Raleigh, de quién Harriot fue ayudante, le había planteado la cuestión cuando estaban planificando una expedición en 1585 rumbo a Virginia, a fin de establecer allí la primera colonia británica.

La conjetura de Kepler establece que la mejor manera es la que usan los fruteros para las naranjas, poniendo cada naranja de la siguiente capa apoyada en el hueco de las cuatro naranjas que estrán justo debajo en la primera capa. Este método minimiza el espacio dejado por los huecos entre las naranjas.

Durante siglos, trataron de demostrarla numerosos matemáticos como Gauss, que la probó en el caso regular. En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, fue incluida por David Hilbert entre su lista de los 23 problemas más importantes para el siglo XX (el problema número 18). Pero el asunto no tuvo mayores avances hasta que el matemático húngaro Laszlo Fejes Toth redujo el problema a un número finito pero enorme de cálculos. Thomas Hales fue capaz de realizar las cuentas en los años 90, ayudado por la potencia del ordenador. El resultando se publicó en Annals of Mathematics, y con ello la conjetura quedó resuelta. Aunque todavía hoy en día no todos los matemáticos aceptan que esto pueda considerarse una auténtica prueba.

Lo que hoy sabemos de la nieve

Kepler no tenía el conocimiento actual de cómo está constituida la materia. No sabía que una molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, formando un ángulo de 104,5 grados. Estas moléculas de agua están ligadas con enlaces con sus vecinas, formando tetraedros. Cuando la temperatura baja, se acercan más entre sí y forman esas estructuras de seis lados.

Uso en el aula

Contexto histórico

Permite examinar el convulso escenario histórico de la época, en la que Europa estaba inmersa en una guerra de religiones y poder.

Desde el punto de vista científico, se puede conectar con las diferentes teorías sobre el Sistema Solar, llegando a la revolución copernicanica desde la visión heliocéntrica de Ptolomeo.

El problema de los empaquetamientos se puede conectar con la biología, bien en la optimización de las colmenas de abejas, bien con el problema a resolver con el de las proteínas. En particular, la conjetura de Kepler nos permitirá debatir sobre si una prueba por ordenador tiene matemáticamente la validez o no de una parueba tradicional.

El estudio de los cristales de nieve permite además la conexión con las teselaciones y la teoría de grupos cristalográficos; en particular, la aventura de encontrar los 17 grupos en La Alhambra ya que los artesanos árabes los conocían.

Transversalidad

Los estudiantes pueden conectar las matemáticas con la astronomía. También con la tecnología necesaria para construir instrumentos de observación, como los telescopios.

El profesor puede utilizar noticias de periódicos, especialmente digitales, para conectar estos resultados con las misiones astronómicas (la nave Philae de la misión Roseta, la Estación Espacial Internacional) que hacen sus cálculos siguiendo las leyes de Kerpler y las posteriores de Isaac Newton.

Tareas

Los estudiantes pueden construir los diferentes tipos de cónicas, usando por ejemplo Geogebra.

3.2 La geometría: de Euclides al Big Bang

La geometría ha perdido peso en la enseñanza de la Secundaria, de manera que estudiantes de 14 o 15 años, en muchos centros, tienen unas vagas nociones de lo que es el perímetro de un polígono, de la relación de la longitud de la circunferencia con su diámetro, o sobre los cálculos más elementales de áreas o volúmenes. La geometría tiene un valor formativo enorme en la enseñanza de las matemáticas, por su carácter visual. Está muy bien que nuestros alumnos sepan resolver sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, pero sería deseable que supieran asociar una ecuación lineal a una recta, o una de segundo grado a una parábola.

Una de las más apasionantes historias de las matemáticas se remonta a Euclides de Alejandría, el más relevante matemático de la antigüedad. Euclides es conocido por su obra *Los Elementos* (el segundo libro más editado tras la Biblia).

Apenas existen datos fiables de su vida. Así, Euclides, deviene con el tiempo en un personaje de historias y leyendas. Según Estobeo, cuando uno de sus oyentes, nada más escuchar la demostración de un teorema, le había preguntado por la ganancia que cabía obtener de cosas de este género, Euclides, volviéndose hacia un sirviente, había ordenado: «Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende».

En otra ocasión, al preguntarle el rey Tolomeo I por una vía de acceso a los conocimientos geométricos más fácil y simple que las demostraciones de los Elementos, Euclides había respondido: «No hay camino de reyes en geometría»

Los Elementos constan de trece libros, clasificados así:

- Libros I a VI: Geometría Plana
- Libros VII a IX: Teoría de Números
- Libro X: Números irracionales
- Libros XI a XIII: geometría del espacio

Es notable su claridad (Einstein los leyó de niño y quedó fascinado por el libro).

Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que Euclides llamó postulados. Los famosos cinco postulados de Euclides son:

I.- Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.

II.- Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.

III.- Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.

IV.- Todos los ángulos rectos son iguales.

V.- Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

El Quinto Postulado se puede escribir de una forma más familiar como:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Esta formulación alternativa es debida a Proclo, quien nació en 411 en Constantinopla (Estambul), y murió en 485 en Atenas, Grecia. Proclo dirigió la Academia de Platón y comentó los Elementos de Euclides. El resultado de Proclo se atribuyó erróneamente durante muchos años a John Playfair (1748 – 1819), geómetra, geólogo y físico, y se conoció como Axioma de Playfair.

Se sucedieron muchos intentos históricos para probar que el quinto axioma se deducía de los otros cuatro (muchas pruebas falsas), por matemáticos como Wallis, 1663; Girolano Sacheri (supuso que era falso y quiso llegar a una contradicción); Legendre (con 40 años de trabajo sobre el tema, fue el que probó que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos de triángulo es de 180º); o Johann Heinrich Lambert, que calculó el defecto de ángulo en un triángulo en una superficie hiperbólica.

Estos repetidos fracasos llevaron a D' Alembert a calificar este problema en 1767 como el escándalo de la geometría elemental.

Gauss fue el primero en entender el problema. Comenzó a trabajar en él con 15 años en 1782. En 1817 llegó al convencimiento que el quinto axioma era independiente de los otros cuatro. Trataba de idear una geometría en la cuál se podía trazar más de una paralela por un punto externo, pero Gauss nunca publicó su trabajo.

Gauss discutió este tema con su amigo, el matemático Farkas Bolyai, quién había sido autor de varias pruebas falsas. Su hijo, el matemático János Bolyai, a pesar de que su padre le advirtió que no malgastara su tiempo en esto, trabajó en el problema. En 1823 Bolyai escribió a su padre: "He descubierto cosas tan maravillosas que estoy asombrado … de la nada he creado un nuevo mundo." (Ver [carta bolyai].)

Dos años después escribió sus resultados como un apéndice en el libro de su padre. Gauss quedó muy impresionado, pero Bolyai no había construido la nueva geometría, solo había probado que era posible.

Ni Bolyai ni Gauss conocían el trabajo de Lobachevsky publicado en 1829. Este fue publicado en ruso en una revista local (Kazan Messenger), trabajo que había sido rechazado por Ostrogradski. Lobachevsky publicó sus Geometrical investigations on the theory of parallels en 1840 (61 páginas). Un resumen en francés en el Journal de Crelle le dio difusión, pero los matemáticos no aceptaron sus ideas revolucionarias.

Lobachevsky reemplazó el quinto postulado de Euclides por este:

Existen dos rectas paralelas a una dada por un punto externo a la recta.

Otro importante actor en esta historia es Riemann, cuya tesis doctoral dirigió Gauss, y que impartió el 10 de junio de 1854 una conferencia para conseguir su habilitación en la Universidad de Gotinga, en la que reformuló el concepto de geometría. Geometría era, para Riemann, espacio más una estructura (la métrica) que permitía medir. Su trabajo se publicó en 1868, dos años después de morir.

Riemann trabajó en una geometría en la que las paralelas no son posibles, la geometría esférica. Estas geometrías no eran diferentes de la geometría euclídea en el sentido que no había contradicciones.

El primero en colocar la geometría de Bolyai-Lobachevsky al mismo nivel que la euclídea, fue Eugeni Beltrami (1835-1900). En 1868 escribió *Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry* y dio un modelo en dimensión 2 en un espacio euclídeo de dimensión 3, la seudo-esfera. En este modelo, los cuatro primeros axiomas se cumplían, pero no el quinto.

El modelo lo completó Klein en 1871 quién dio además modelos de otras geometrías no-euclideas, como la de Riemann. Klein demostró que hay tres tipos de geometrías:

- Hiperbólica (Bolyai – Lobachevsky)
- Esférica (Riemann)
- Euclídea.

Estas nuevas geometrías son las que aparecen cuando queremos estudiar nuestro universo (son sus posibles formas).

Esta es la nueva visión del universo en el que vivimos tras la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein, que incorpora el tiempo al espacio. Muchos otros nombres de físicos y matemáticos están ligados a estos avances durante el siglo XX. La historia continúa.

Uso en el aula

Contexto histórico-científico

Permite examinar el cambio de contexto histórico desde la Grecia Clásica hasta nuestros días, pasando por las diferentes épocas, y mostrando como un cambio de paradigma científico acompaña a cambios cruciales en la sociedad.

También se puede debatir sobre la consistencia de las matemáticas, y sobre el método deductivo que Euclides puso en marcha.

Transversalidad

Los estudiantes pueden conectar las matemáticas, en particular la geometría, con las ciencias físicas y con el mundo físico.

El profesor puede utilizar noticias de periódicos, especialmente digitales, para conectar estos resultados con las diferentes teorías sobre nuestro universo: nociones como materia oscura, energía oscura, agujeros negros, ondas gravitacionales, están presentes en los medios continuamente.

Tareas

Los estudiantes pueden tratar de construir modelos reales en dos dimensiones de las diferentes geometrías, y ver si se cumple o no el quinto postulado. Pueden también utilizar el software matemático desarrollado en los últimos años, cumpliendo por tanto la clase una doble función.

BIBLIOGRAFÍA

[carta bolyai] Carta de Janos Bolyai a su padre: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Extras/Bolyai_letter.html

[MdL] Manuel de León: La geometría del Universo, Colección ¿Qué sabemos de?, CSIC y La Catarata. Madrid, 2012

[MdLAT] Manuel de León y Ágata Timón: Las matemáticas de los cristales. Colección ¿Qué sabemos de?, CSIC y La Catarata. Madrid, 2015.

[Klein] Félix Klein: Matemática elemental desde un punto de vista superior. S.L. NIVOLA Madrid, 2006

[TR] Tomás Recio: El proyecto Klein: una perspectiva estimulante sobre unas matemáticas vivas, para los profesores de Secundaria. Publicado en Matemáticas y sus fronteras.
http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2009/06/03/119444

[BR] Bernhard Riemann: Riemanniana selecta. Editado por José Ferreiros Domínguez. Clásicos del pensamiento. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 2000.