

VI Festival Internacional de Matemática
29 al 31 de mayo, 2008, Colegio Bilingüe San Agustín, Palmares, Costa Rica

Diferentes representaciones en matemática: una entrevista

M.Sc. Margot Martínez
Universidad Nacional
mmarti@una.ac.cr

Palabras clave: Lenguaje matemático, representaciones, entrevista

Resumen

Diferentes investigadores han sostenido que la matemática es un lenguaje que sirve para representar aspectos del mundo que nos rodea. Sin embargo, la notación matemática, que podría considerarse una especie de traducción del lenguaje cotidiano, no ha tenido suficiente atención de parte de los educadores. Las diferentes representaciones ofrecen diferentes aspectos de un concepto o relación más complejos y por eso los estudiantes necesitan una variedad de representaciones que refuercen su comprensión sobre un tópico en particular. Se puede afirmar que un estudiante entiende una idea si es capaz de reconocerla en diferentes sistemas de representación, puede manipular esta idea dentro de un sistema de representación dado y puede traducir la idea de un sistema a otro. Para validar las afirmaciones hechas, en este documento se presentan los resultados de entrevistar a cuatro estudiantes, con el fin de determinar sus habilidades en la traducción entre diferentes sistemas de representación usados en matemática.

Según Orey (2005), la matemática es un lenguaje que tiene sus propios símbolos, sintaxis, gramática y una variedad de representaciones. También hace uso de diferentes tipos de letras para representar variables, signos para números, diagramas, fórmulas y algoritmos. Posiblemente no hay una persona en el campo de las matemáticas que esté en desacuerdo con esta afirmación.

Esta sin embargo no es una idea nueva. ReBarker y Smith (1933) afirman que el lenguaje escrito ordinario y el lenguaje de simbolismo matemático tienen elementos en común, y esto es particularmente cierto en los campos de análisis y álgebra. Estos investigadores hacen una analogía ligando la traducción entre dos lenguajes escritos y los símbolos usados en matemática para representar operaciones y números. La gramática usada en el lenguaje correspondería con las leyes en las operaciones matemáticas.

Por otro lado, Lesh, Post y Behr (n.d.) declaran que la traducción entre diferentes tipos de representación, y las transformaciones dentro de ellas, son importantes en el contexto

educativo, puesto que pueden ayudar a identificar tanto posibles dificultades como oportunidades de aprendizaje en nuestros estudiantes.

De acuerdo con Brizuela (2004) el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), organización que determina los objetivos y principios de la educación en los Estados Unidos de América, ha incluido recientemente la representación como uno de los procesos que se debe considerar a través de todos los niveles. Brizuela lamenta que, a pesar de que existen suficientes investigaciones que reconocen la importancia de la notación en la educación matemática, estas no hayan tenido un verdadero impacto en los educadores. Mencionando a Ferreiro (1991) dice que los estudiantes se encuentran tratando de comprender las relaciones entre los elementos del sistema y la manera en que este funciona, y concluye que las ideas de los niños pequeños acerca de notación matemática podrían ser constitutivas en su posterior entendimiento sobre notaciones más complejas y sobre matemáticas en general. Esta afirmación nos hace considerar que representación y notación no son simples aspectos en matemática. Podrían ser facetas determinantes en la consecución de una comprensión significativa de parte de nuestros estudiantes. Brizuela apoya la tesis de Lesh cuando declara que las diferentes notaciones ayudan a los estudiantes a pensar acerca de un problema, y en el proceso de pensar y reflexionar, su comprensión se vuelve más profunda. Luego, citando la NCTM, añade que diferentes representaciones frecuentemente ofrecen diferentes aspectos de un concepto o relación más complejos y es por eso que los estudiantes necesitan una variedad de representaciones que refuercen su comprensión sobre un tópico en particular. Haciendo referencia a Goldin, esa autora dice más tarde que el pensamiento matemático efectivo encierra la comprensión de las relaciones entre diferentes representaciones del mismo concepto así como las diferencias y similitudes estructurales entre sistemas de representación. Sobre esto, Lesh et al. describen cinco tipos de sistemas de representación que se dan en el aprendizaje matemático y resolución de problemas: caracteres basados en la experiencia, modelos manipulativos, dibujos de diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos. Ellos definen la traducción entre estos sistemas como el establecimiento de una relación desde un sistema de representación hacia otro. En su investigación, concluyen que los estudiantes presentan deficiente comprensión en los contextos de solución de problemas así como de cálculos usando papel y lápiz. Igualmente, muchos estudiantes tienen insuficiente comprensión de los modelos y lenguaje necesarios para representar y manipular estas ideas. Observaron

también que esta incapacidad para traducir es un factor significativo que influye tanto en el aprendizaje matemático como en el desempeño en la resolución de problemas, y que remediar esa habilidad facilitaría la adquisición y uso de ideas matemáticas elementales. Para ellos, un estudiante entiende una idea si es capaz de reconocerla en diferentes sistemas de representación, puede manipular esta idea dentro de un sistema de representación dado y puede traducir la idea de un sistema a otro. Para diagnosticar dificultades de aprendizaje en un estudiante, o para identificar oportunidades de aprendizaje, los educadores generan preguntas ofreciendo una idea en un tipo de representación y pidiendo a los estudiantes que ilustren, describan o representen la misma idea de otra manera. En relación con este tema, Siegler (2003) afirma que aún cuando los estudiantes trabajan bien en las clases de álgebra, es frecuente que fallen representando situaciones concretas con ecuaciones algebraicas, dado que están acostumbrados a tratar las ecuaciones como ejercicios de manipulación de símbolos, perdiendo así cualquier conexión con contextos del mundo real. Muchos de sus errores surgen de extensiones incorrectas de reglas correctas.

Otro importante resultado del trabajo de Brizuela es que los estudiantes pueden generar nuevas representaciones externas después que han desarrollado su sistema de representación interna, a través de la interacción con otras representaciones externas estructuradas en el ambiente de aprendizaje. Brizuela establece que la creación de relaciones entre su comprensión de conceptos acerca del problema (comprensión que se halla todavía en desarrollo) y una notación simbólica de esa comprensión en papel, envuelve complejas y profundas transformaciones de la comprensión inicial. Ella concuerda con Cobb acerca de que el uso de símbolos es fundamental en la forma en que las personas pueden entender y usar conceptos matemáticos, dado que la relación entre el uso de símbolos matemáticos implica que el estudiante le dé algún tipo de significado, y que el desarrollo de significados encierra modificaciones en las maneras de simbolizar. Concluye que la construcción de notaciones no puede ocurrir separadamente de la construcción de aspectos matemáticos. La notación juega un papel fundamental en la adquisición de conceptos numéricos. De este modo, el aprendizaje de notaciones matemáticas vincula mucho más que el desarrollo de habilidades motoras de percepción. En sus resultados, muchas veces los niños inventaban notaciones mientras procedían con un problema, y esta representación espontánea establece un contexto significante en el cual las representaciones apropiadas

podrían ser introducidas. Para validar las afirmaciones hechas, se entrevistará a cuatro estudiantes tratando de determinar sus habilidades en la traducción entre diferentes sistemas de representación usados en matemática.

Participantes

En esta entrevista participaron cuatro estudiantes, quienes aceptaron ser entrevistadas acerca de un aspecto de matemática. Las entrevistas están organizadas en el mismo orden cronológico en que fueron hechas. Cada entrevista es la misma para todas las participantes. Solo cuando se consideró que alguna respuesta requería de una explicación más larga de parte de la estudiante, se formularon otras preguntas para clarificar la idea. No se usarán sus nombres reales, para proteger su privacidad. Todas ellas son estudiantes de secundaria, y provienen de hogares de clase socioeconómica media.

Aún cuando la información acerca de cada participante está incluida en el principio de cada entrevista, se incorporan ahora mismo algunos aspectos sobre ellas. La primera es María, una niña de 13 años quien cursa octavo año en un colegio público. Ella quiere ser modelo, y contestó cada pregunta muy rápidamente, como si lo estuviera haciendo sin pensar. Parece que no quiere hacer ningún esfuerzo por razonar sobre matemáticas y dijo la primera cosa que se le vino a la cabeza. Acepta que no le gusta esta materia, y su favorita es educación física, dado que implica movimiento. La entrevista se llevó a cabo en su casa, un sábado en la tarde.

La segunda participante es Laura, una muchacha de 16 años quien cursa undécimo año en un programa para estudiantes avanzados, por lo que el nivel de las matemáticas que ella lleva en este momento es similar al Cálculo Diferencial de los primeros años de universidad. Su materia favorita es química, y es lo que piensa estudiar en la universidad. La entrevista fue en su casa, un domingo por la mañana.

La tercera participante es Grace, de 13 años y cursando octavo año. Su materia favorita en el colegio es Biología, y ella quiere ser bióloga. La entrevista fue en su casa, un domingo por la tarde. Ella es muy callada y parece que no le gusta hablar. Durante la entrevista, daba la impresión de que su mente se encontraba en otro lugar.

La cuarta participante es Melissa. Tiene 13 años, y está en séptimo año. Su materia favorita es arte, y quiere ser una dibujante de manga. La entrevista fue en la casa de Grace,

no al mismo tiempo. De hecho, Melissa tiene mucho que decir, y fue quien más habló durante la entrevista.

Las participantes fueron informadas de que ellas podrían contestar en forma verbal o escrita en el papel que se les suministró.

Análisis

María, la modelo

¿Por qué no te gusta [la matemática]?

Porque es difícil y me confundo. Yo no me puedo imaginar cómo resolver los problemas.

Ciertamente María no quiere hacer ningún esfuerzo para recordar una fórmula o representar un problema en una forma diferente. Una cosa que ella decía insistentemente durante su entrevista fue *“mi hermana podría [hacer esto] o, ¿sabe quién? Alicia. Ella es muy inteligente.”* Decía esto aún a sabiendas de que esta entrevista no era para evaluarla académicamente, o para medir su conocimiento. Ella piensa que matemáticas no es para ella, y está conforme con eso. Como se estableció antes, *“las dificultades en traducción son factores significativos que influyen tanto el aprendizaje matemático como el desempeño en la resolución de problemas+de acuerdo con la afirmación de Lesh.* Esto parece cierto en el caso de María: sus calificaciones en el colegio preocupan mucho a su madre (porque parece que a María no le preocupan del todo).

Ella respondió a muchas preguntas sin tomar tiempo para pensar. Recordaba parte de la fórmula para perímetro, pero se confundió acerca de la operación envuelta en ella (usó multiplicación en lugar de suma). Además, confundió parte de la fórmula para el área de un círculo con la fórmula para el área del rectángulo, aunque un par de segundos después, pudo recordar la correcta. Sin embargo, tiene problemas para representar números usando letras. En los rectángulos que solo tenían letras para simbolizar medidas, respondió que ella no sabía cómo responder las preguntas acerca de áreas y perímetros. Lo mismo ocurrió en el triángulo donde se le pedía representar el área usando expresiones algebraicas que simbolizaran el largo de los lados. Se asume que ella ya tiene este conocimiento (las fórmulas para perímetro y área de figuras planas) dado que es un contenido del currículo de escuela primaria, y esta era una pista para resolver los problemas.

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate cada una. ¿Cómo se puede representar los de Marcos?

(Toma 7 piezas pequeñas de cartón)

Así ò 7 más.

¿Por qué tiene 7? ¿De dónde sale el 7?

Porque él tiene 5 más. Puedo poner uno, dos, tres, cuatro, cinco más.

Si x representa los chocolates de Daniel, ¿cómo se representan los de Marcos?

No sé.

(Luego ella escribe en el papel

$x = \text{Daniel}$

$5 + x = 12$

$5 = \text{Marcos}$)

Parece que ella se halla en una fase muy concreta, donde los números juegan un papel muy importante. Fue consistente, sin embargo, acerca del 7, porque cuando escribió la ecuación para el número de chocolates que Marcos tiene, siguió usando 12 como la cantidad total de chocolates. Ella sabe que puede usar letras para representar variables, pero no puede manejar eso aún. Brizuela (2004) citando a Goldin y Shteingold, dice que el pensamiento matemático efectivo envuelve la comprensión entre diferentes representaciones del mismo concepto, así como las similitudes (y diferencias) estructurales entre sistemas de representación. Eso es, los estudiantes deben desarrollar representaciones internas adecuadas para interactuar con varios sistemas. Esto significa que si María no cuenta con una representación interna acerca de letras simbolizando cantidades, no será capaz de reconocer diferentes representaciones aún.

Laura, la científica

¿Cómo te sientes cuando tienes un examen de matemáticas?

Me siento preparada ò confiada.

Laura es una adolescente con gran confianza en su capacidad intelectual. Es inteligente y lo sabe. Y, al contrario que María, considera que matemática es bastante fácil. Cuando se le solicita que justifique sus respuestas, solo dice *ése es la respuesta* y parece que no juzga necesaria más justificación. No tuvo problemas con las preguntas de la entrevista, más que con una:

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate. ¿Cómo se representan los chocolates de Marcos?

(Laura se detiene y piensa por un momento. Luego toma 6 piezas pequeñas y dice *ése sería la representación, porque uno amarillo representa uno, entonces el otro tiene 6* ¿cómo se supone que funciona?→)

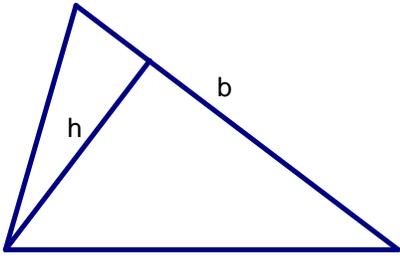
Si x representa los chocolates de Daniel, ¿cómo se representan los de Marcos?

(Escribe $x+15$)

De cierta manera, su razonamiento es muy rígido, porque tuvo problemas trabajando con material concreto pero no en la representación con una ecuación del problema. Como ya es sabido, los estudiantes tienen diferentes formas de razonamiento y aprendizaje. Dado que debemos respetar esas diferencias, toma especial importancia el uso de diferentes representaciones. Debemos hacer referencia aquí a Judah Schwartz, mencionado también por Brizuela (2004) cuando él enfatiza la importancia de ofrecer a los estudiantes múltiples posibilidades y formas para representar, y la habilidad de usar diferentes clases de notación, tales como lenguaje simbólico, lenguaje numérico, lenguaje gráfico y lenguaje natural. Para Laura, el uso de material concreto parece no ser ya efectivo, dado que ella ya sabe cómo traducir entre lenguaje natural y algebraico. De todos modos, el hecho de que sea una estudiante avanzada se debe considerar también.

La callada Grace

¿Sabes qué significa la formula $A = \frac{bh}{2}$ en esta figura?



¿Superficie? ¿El área?

Juzgando por sus respuestas (varias veces, la respuesta era en forma de pregunta) es posible determinar que Grace no se siente muy confiada de su desempeño en matemática. Sabe la forma para obtener el perímetro de un rectángulo, pues dijo como obtener el perímetro del primero, en el que el lado de los lados se dio usando números. Pero en los otros casos, no pudo responder cómo representar el perímetro con una expresión algebraica. Aunque, fue sorprendente que fuera capaz de representar el área de cada rectángulo usando esas mismas expresiones. Cuando se le solicitó representar el área de un triángulo donde se usó expresiones algebraicas en vez de números para dar el largo de los lados, o elegir algunas expresiones que representaran tres números consecutivos, ella no lo logró.

Un cuadrado amarillo representa los chocolates que Lily tiene. Si Katy tiene el doble de chocolates que Lily, ¿cómo se puede representar los de Katy?

(Toma 2 cuadrados amarillos y pone uno junto al otro)

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate. ¿Cómo se puede representar los de Marcos?

(Toma un cuadrado amarillo, y cuenta:

uno, dos, tres, cuatro, cinco

y pone juntos el cuadrado amarillo con las cinco piezas pequeñas.)

Si x representa los chocolates de Daniel, ¿cómo se representa los de Marcos?

(Escribe en el papel $(x)+5$)

Cuando Grace usó material concreto, respondió todas las preguntas en forma correcta. Y cuando se le solicitó representar con una expresión algebraica el mismo problema, lo hizo sin ningún inconveniente. Brizuela afirma que las notaciones pueden representar no solo lo que se ha hecho en el proceso de resolver un problema sino que también herramientas para pensar y reflexionar sobre el problema. Por supuesto, una entrevista no es suficiente para determinar esto, pero pareciera que el aprendizaje de Grace es más fácil con el uso de material concreto.

Nuestra artista Melissa

¿Me puedes decir su área?

¿Usted dice el área? ¿Es la misma [que el perímetro]? No. Yo no sé. No he estudiado matemática en mucho tiempo.

Matemáticas y arte están fuertemente relacionados. El uso de perspectiva en la pintura o los compases en música son solo unos ejemplos. Ojala Melissa se dé cuenta de ello, porque no está prestando suficiente atención a su clase de matemática. Admite que no ha estudiado matemática en mucho tiempo. Y sus respuestas lo verifican. Sin embargo, la manera en que resolvió el problema sobre los chocolates de Daniel y Marcos fue sorprendente.

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate. ¿Cómo se puede representar los de Marcos?

Veamos, ¿cuántas piezas completan un cuadrado? (Toma un cuadrado amarillo y lo rellena con piezas pequeñas. Acomoda 4 piezas sobre el cuadrado)

Entonces 4 piezas representan un cuadrado. Eso haría 9 chocolates. (Usa 9 piezas pequeñas para representar los chocolates, añadiendo las 4 piezas que ella considera que el cuadrado amarillo representa y 5 más).

De hecho, ella tiene su propia forma de representación. Según ella, el tamaño de cada figura era determinante para saber su valor, pues tomó pequeñas piezas para ver cuántas completan una amarilla. Esto podría estar relacionado con su convicción de que necesita números para representar perímetros y áreas. En referencia a esto, Brizuela (2004)

dice que el conocimiento acerca de sistemas convencionales, tales como las notaciones usadas en matemática, se construye a través de la interacción entre lo que el individuo aporta a la situación (las invenciones) y lo que el gran orden social presenta al aprendiz (las convenciones). Pero el énfasis debe ser puesto en la importancia de las invenciones del estudiante en el proceso de aprendizaje y construcción de conocimiento, dado que es a través de sus construcciones y estructuras de asimilación que los individuos pueden interpretar el sentido de lo que se les presenta. Esta representación debe trabajar en una forma relativamente efectiva, pues Melissa respondió correctamente la pregunta acerca de números consecutivos, y estaba bastante segura acerca de que esa era la respuesta correcta.

Conclusiones

Hablando de los resultados de estas entrevistas, es evidente que una única entrevista no es suficiente para concluir acerca de las habilidades de nuestros estudiantes, como ya se mencionó antes. Sin embargo, siempre hay alguna información útil que se puede obtener de aquí. El primer elemento que llama la atención es que todas las estudiantes prefirieron escribir sus respuestas. Aún cuando verbalizaron algunas de ellas, siempre escribieron alguna representación en el papel suministrado. Tal vez están acostumbradas a tratar diferentes maneras de representación para ayudar en su razonamiento.

Sobre otros aspectos, muchas veces como educadores estamos tentados a asumir que las habilidades de representación son secundarios ante la comprensión conceptual. Pero, como se ha establecido en la literatura consultada, los aprendizajes de conceptos y de notación ocurren simultáneamente. Cuando un estudiante usa símbolos de manera correcta, podemos suponer que este acto envuelve significado, y significancia implica habilidades de representación. La hermosa María es un buen ejemplo para usar en la confirmación de lo que los investigadores han encontrado acerca de representación y notación. Su carencia de habilidades de representación refleja sus pobres resultados en matemática. Obviamente es importante considerar su poco interés en matemática, tanto como su convicción de que no es buena en esta materia, también. Ambas creencias afectan su desempeño. Pero es bastante

claro que la construcción en notación no puede ocurrir separadamente de la construcción de aspectos conceptuales en matemática, como Brizuela concluye en su libro.

El ambiente matemático de Laura es muy diferente del de las otras muchachas. Está acostumbrada al razonamiento analítico y este hecho (además de que ella ya ha estudiado mucha más álgebra que las otras estudiantes) sugiere dejar su caso fuera de discusión en este momento. El único resultado de su entrevista que se conservará es que ella presenta una manera diferente de aprender y razonar, y los profesores debemos ser cuidadosos en cuanto al uso de diferentes representaciones en el aula. Debemos conocer a nuestros estudiantes lo suficiente para decidir cuál representación será de ayuda, y cuál traerá más complicaciones para ellos.

Parece ser que Grace es la única en este grupo que podría sacar ventaja con el uso de material concreto en la representación de cantidades. Esto no deja de ser una pequeña decepción, considerando el amplio respaldo que tiene el uso de manipulables en clase.

Algunas de las respuestas de Melissa no son buenos indicadores de la complejidad de su forma de pensar y razonar. Se puede pensar que no tiene buena habilidad para razonar en forma matemática. Pero viendo de más cerca, se vuelve evidente su capacidad creativa. Posiblemente, esto está relacionado con su gusto y sentido del arte. Fue capaz de desarrollar una interpretación diferente del significado de representación, considerando que el tamaño de esas figuras era importante para decidir su valor. Sin embargo, aún cuando esta representación espontánea es importante, su importancia radica en la interacción entre comprensión y notación.

El aprendizaje más substancial que se desprende de esta entrevista es que todavía todo estudiante puede sorprender con su razonamiento. Que no se debe pensar que podemos adelantarnos a sus respuestas y reacciones ante determinada situación o pregunta. Y que nunca dejaremos de aprender de ellos.

Apéndice A

La entrevista

¿Le gusta matemática?

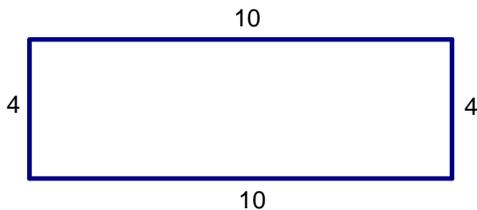
¿Cuál es su materia favorita en el colegio? ¿Por qué?

¿Qué quiere ser en el futuro? ¿Qué piensa estudiar en la Universidad?

¿Cómo se siente cuando tiene que ir a una clase de matemática?

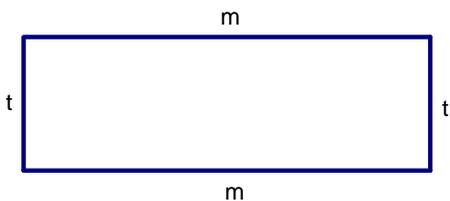
¿Cómo se sientes cuando tiene un examen de matemática?

¿Me puede decir el perímetro de este rectángulo?



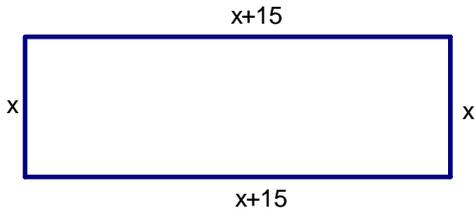
¿Me puede decir su área?

¿Me puede decir el perímetro de este otro rectángulo?



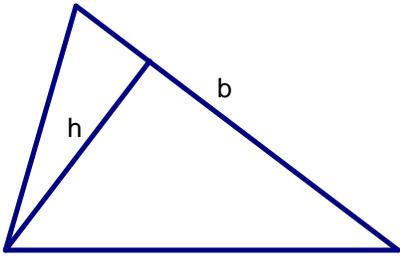
¿Me puede decir su área?

¿Me puede decir el perímetro de este tercer rectángulo?

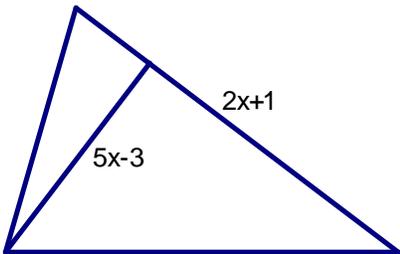


¿Me puede decir su área?

¿Sabe lo que significa la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ para esta figura?



¿Me puede decir cómo representar el área de este triángulo?



¿Corresponde alguna de las siguientes expresiones con una sucesión de 3 números enteros consecutivos? Si es así, ¿cuál de ellas?

$n, 3n, 5n$

$n, n+1, n+2$

$-1, n, n+1$

$1, n, 2n$

Un cuadrado amarillo representa los chocolates que tiene Lily. Si Katy tiene el doble de chocolates que Lily, ¿Cómo se representa los de Katy?

Marcos tiene 5 chocolates más que Daniel. El cuadrado amarillo representa los de Daniel. Las piezas pequeñas representan un chocolate. ¿Cómo se representan los de Marcos?

Si x representa los chocolates de Daniel, ¿cómo se representa los de Marcos?

Bibliografía

Brizuela, B. (2004) *Mathematical development in young children: Exploring notations*. New York: Teachers College Press.

Cobb P., Yackel, E. & McClain, K. (2000) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (n.d.). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Material entregado en el curso MAE 5691 Mathematics Learning and Teaching (Otoño del 2006)

ReBarker, H. & Smith, H. (1933) Language Discipline in Mathematics? *Mathematics News Letter*, (7)6,1-2.

Orey, D. (2005) Mathematics as a Universal Language or Mathematics as a Collection of Dialects? Disponible en http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/ACP.htm_files/Alg.html

Siegler, R. (2003) Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics.