

V FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

*De costa a costa**Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno*

29 al 31 de marzo, 2006

**MODELAJE MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA
UN TRATADO TEÓRICO Y UN EJEMPLO DIDÁCTICO***Nelson Hein¹***Resumen**

En Brasil la investigación sobre modelaje matemático en la enseñanza está creciendo significativamente. El modelaje matemático, proceso en la obtención de modelos, como método de enseñanza ha mostrado que puede contribuir en el proceso de aprendizaje del alumno, especialmente por constituir un recurso, en forma similar que en el nivel elemental, para la investigación científica. La verificación sobre el interés, la motivación y el aprendizaje momentáneo de los conceptos matemáticos de parte de los alumnos, si bien son necesarios, no son suficientes para atender la evaluación tanto de la eficacia como de la eficiencia del método más allá de los límites provistos por la escuela. Si se espera que el modelaje matemático promueva el conocimiento perenne es preciso que la investigación sobrepase el nivel de verificación; en consecuencia, resulta necesario disponer de un mejor fundamento teórico de los diversos entes involucrados en este proceso, comenzando por la teoría de modelos. Por caso, comprender tanto los tipos de modelos existentes como el grado de complejidad de los mismos, permitirán enfrentarnos con más fuerza al proceso de enseñanza y consecuentemente, evaluar el aprendizaje mediante el modelaje. Conforme a esto, en este trabajo se presentan consideraciones sobre la teoría de modelos y fundamentos de modelaje, tales como conceptos, clasificación, sistemas, modelos de optimización y proceso de modelaje.

Palabras-Clave: Modelos Matemáticos, Modelaje Matemático, Sistemas.

1. PRINCIPIOS DEL PROCESO DE MODELAJE**1.1. Concepto Intuitivo de Modelo**

El ser humano siempre quiso entender el planeta y el mundo real de su entorno; situación reflejada en las imposiciones sobre la supervivencia que así lo han determinado. Rodeada de elementos materiales, la primera necesidad de la humanidad fue conquistar el dominio de su medio ambiente. La seguridad contra predadores y fenómenos naturales, la búsqueda de la alimentación, la organización social de los núcleos humanos, etc., despertaron los primeros cuestionamientos. Cuando las necesidades aumentaron el nivel de complejidad, se incrementaron las carencias por perfeccionar el proceso de comprensión del mundo; tal situación fue

¹ Universidade Regional de Blumenau, Blumenau – Santa Catarina – Brasil. Correo-e: hein@furb.br

conducida y aún conduce, la abstracción y la representación de los entes y sus propiedades, y también a todos los interferentes de esa universalidad. En la imposibilidad de lidiar directamente con la complejidad del mundo, el ser humano se ha mostrado cada vez más hábil en la creación de metáforas para la representación y la resolución de su relación con ese mismo mundo. Tal proceso de búsqueda de una visión bien estructurada de la *realidad* (esclarecimiento) resulta, en esencia, un fenómeno que se denomina *modelaje*.

El modelaje es el proceso involucrado en la elaboración de un modelo. El concepto “*modelo*” puede tener diversos significados, por caso: modelo como *vehículo para una visión bien estructurada de la realidad* o bien, con los debidos recaudos, como *representación de la realidad* (Black, 1962).

Todos nosotros, en general, en numerosas situaciones hemos lidiado con modelos, mismo en situaciones en las que no teníamos la menor conciencia al respecto. Al explicar un tema a una persona mediante fotografías o gráficos, o cuando representamos planos o sólidos mediante ecuaciones matemáticas, tan sólo transmitimos e interpretamos una realidad plausible mediante metáforas de sustitución o *modelos*.

La Geometría Euclidiana es un modelo que satisface un conjunto de axiomas, o bien, un modelo de contexto axiomático. Similarmente, en esta línea se pueden identificar otros modelos que cubren distintos campos, yendo desde las Transformadas de Laplace y su *Mecánica Celeste* hasta la Teoría Cuántica y el *Átomo de Bohr*. Por supuesto que no existen exclusivamente modelos axiomáticos, el contexto epistemológico es un digno ejemplo de eso. Al enfrentarse con situaciones reales o bien, abordando lo imaginario, la mente de un humano opera con estructuras de “sustitución” como una forma de permitir el raciocinio, estructuras que genéricamente denominamos “modelos” (Boyer, 1974).

Los modelos para ser implementables precisan prescindir de pequeños detalles. En este abordaje está presente la importancia del equilibrio, pues simplificación *versus* validación es un concepto esencial. Los modelos se traducen en representaciones simplificadas de la realidad que preservan, en ciertas situaciones y enfoques, una adecuada equivalencia (BIEMBENGUT y HEIN, 2003).

El poder de representatividad es la característica del modelo que resulta deseable, en tanto que la capacidad de simplificación le confiere factibilidad operacional. Existen varios criterios de la medida de adecuación o adherencia del modelo a la realidad representada. En muchos casos, la representatividad del modelo se puede perfeccionar en forma interactiva. El proceso de verificación de la representatividad se denomina *validación del modelo*, constituyendo una etapa indispensable en cualquier procedimiento científico (Bassanezi, 2002).

1.2. Desdoblamiento del Concepto – Tratamiento de la Eficiencia

El concepto de modelo como representación sustituta de la realidad tiene alcance limitado; pero el aspecto de la eficiencia es fundamental. Para obtener modelos eficientes, se necesitan por lo menos tres habilidades: foco holístico, tratamiento ecléctico de la dimensión del análisis y traducción adecuada, a saber:

- *Foco Holístico*

Cuando estamos procurando resolver un problema, la mayoría de las veces, es significativa la preocupación centrada en la concatenación y el manejo de los múltiples impactos de la solución sobre otros contextos. Si la solución puede crear otros problemas que puedan, luego, anular la contribución de nuestro esfuerzo, el foco holístico es indispensable.

- *Tratamiento Ecléctico de la Dimensión del Análisis*

Los métodos de resolución a utilizar deben disponerse libremente. La Epistemología y la Axiología no deben considerarse como bases de modelaje dicotómicas, pero sí complementarias. Una construcción de modelos es el proceso que tiene dos caras: la faz que articula la teoría (hipotética-deductiva) y la faz que representa la validación de la deducción (inductiva) en la práctica.

- *Traducción Adecuada*

Un buen modelo requiere una conveniente traducción contextual. Una buena traducción contextual se puede expresar mediante un correcto isomorfismo entre el fenómeno y su modelo; seguidamente se ilustra el proceso de traducción, resaltando su aspecto simplificador y estructurador.

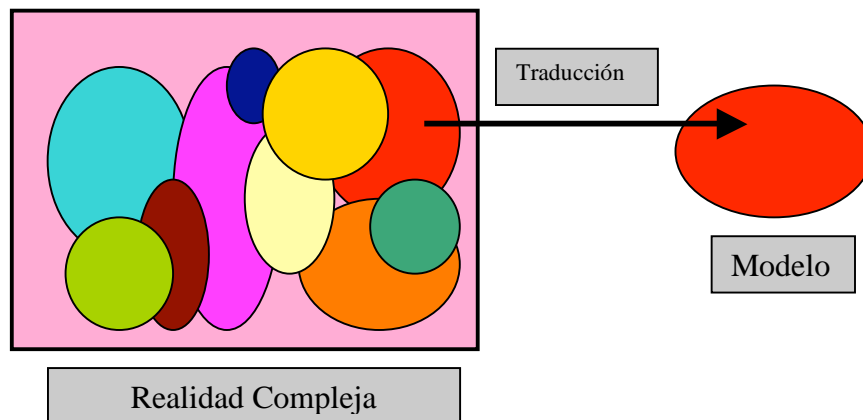


Figura 1 – Proceso de Traducción

Resulta claro que no es posible afirmar que todos los problemas son iguales. El proceso de traducción contextual debe ser capaz de identificar los elementos fundamentales de la cuestión y transportarlos para una representación capaz de ser manipulada por artificios o métodos de resolución. Las dificultades de los procesos de traducción corresponden a naturalezas diferentes, pero, profundamente interferentes, por tanto, la traducción coopera con cierto abordaje de solución. En la medida en que la traducción produce una representación más o menos tratable por los métodos existentes, se define la usabilidad del modelo. El concepto que representa ese fenómeno de interferencia de la traducción en la posibilidad de solución se denomina *complejidad*.

1.3. Desdoblamiento del Concepto – Tratamiento de la Complejidad

Para definir “complejidad” escogeremos la identificación de las propiedades que ocasionan e interfieren con el fenómeno; esta opción permite disponer de una visión bastante operacional sin perjudicar una posible profundización teórica. El primer aspecto a destacar en la constitución de la complejidad de un modelo es su “permeabilidad” al ambiente que lo circunda; un modelo simple tiene un perímetro de interferencia simple y bien definido. El segundo aspecto corresponde a su estructura interna; así, un modelo simple tiene estructura homogénea, morfología uniforme y número reducido de variables. El último aspecto engloba la dinámica, correspondiendo a la consideración de cómo se altera la estructura interna a lo largo del tiempo.

Analizando las tres dimensiones principales esbozadas previamente: Medio Ambiente, Dominio y Dinámica, postularemos que un modelo es simple cuando:

- presenta escasa influencia por las variaciones en su medio ambiente;
- es estructuralmente estable, homogéneo y tiene pocas variables; y
- tiene comportamiento fácilmente previsible.

2. METAMODELO SISTÉMICO

2.1. Concepto de Sistema

La Ingeniería de Sistemas constituye un campo significativo de la contribución en el proceso de estructurar y sistematizar los esfuerzos del modelaje. Como quedó expresado anteriormente, el fenómeno de traducción para las entidades del mundo real es una actividad compleja y difícilmente pasible de ser realizado en una sola etapa. El Metamodelo Sistémico² surge como una interesante propuesta en el sentido de auxiliar, en el más alto nivel, al proceso de traducción.

El concepto de *sistema* permite la configuración de útil pre-mapeamiento entre la realidad y el modelo de representación. Dentro del abordaje sistémico, modelar significa representar la realidad o los *sistemas originales* mediante otros *sistemas de sustitución*, estructurados y comparables, que se denominan modelos. Definimos *sistema* como cualquier unidad conceptual o física, compuesta de partes interrelacionadas, interactuantes e interdependientes.

Los sistemas son *componentes no atómicos* (considerando el punto de vista de la observación) de cierto universo. En general, tienen las siguientes propiedades, a saber:

- Simbiosis interna o propiedad de compartir funciones, que permite que cada parte sea indispensable dentro de la constitución del sistema;
- Simbiosis externa o propiedad de ser componente participante e indispensable (por lo menos en tesis) de un ecosistema social;
- Sinergia (efecto multiplicador), para que el sistema alcance un nivel de desempeño superior al correspondiente a sumar el desempeño de cada parte aislada;
- Homeostasis o capacidad de conservar su estado de equilibrio; y

² Empleamos el término metamodelo porque ese modelo es un importante abordaje que soporta la elaboración de otros modelos más específicos.

- Entropía negativa o capacidad de importar la energía necesaria de su ecosistema social para compensar la degradación entrópica natural y realizar auto-ajustes en dirección al equilibrio organizacional en el medio ambiente (Hadlock, 1998).

Otro elemento fundamental en el concepto de *sistema* reside en la *concepción de la propiedad recursiva*. Las partes de un sistema pueden ser igualmente consideradas subsistemas con la misma naturaleza de propiedades previstas para el todo; la propiedad en cuestión permite una enorme flexibilidad en el razonamiento. Con esa herramienta, muchas situaciones complejas de la realidad, antes de un abordaje de gran dificultad, se pueden “organizar” conceptualmente con facilidad. En verdad, el abordaje sistémico facilitó bastante el proceso de representación de la realidad y consecuentemente, su mejor comprensión (Mariotti, 2000). Considerando estos conceptos, se puede llamar “modelo” a cada interpretación de un sistema formal creado axiomáticamente.

En el proceso de representación sustitutiva, hay numerosos factores a considerar. Ciertamente, es casi imposible tomar en cuenta todos los elementos intervinientes en un problema real. Como el objetivo básico del proceso es alcanzar una comprensión aceptable de la realidad, los modelos se deben formular para “captar” apenas los “elementos fundamentales” en el proceso de traducción, simplificando al máximo el método de resolución a utilizar (Biembengut & Hein, 2003).

Los modelos presentan diversas ventajas, a más del hecho de simplificar la representación de un sistema determinado. Los modelos pueden revelar relaciones no aparentes, tanto como, facilitar la experimentación (o el aprendizaje por ensayo y error controlado), situación que no es frecuentemente, viable en sistemas reales. Como la estructura del modelo no depende de los datos de operación o instancia, el análisis es altamente auxiliado. A fin de satisfacer los requisitos de *calidad*, los modelos cuantitativos de optimización exploran alternativas de máxima productividad y, en algunos de ellos, se determinan automáticamente valores de máxima competitividad.

3. MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

3.1. El Contexto de los Modelos de Optimización

Un modelo no es idéntico a la realidad, pero sí suficientemente similar o suficiente para que las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación, se puedan extender a la realidad; así, para formalizar tal modelo es indispensable definir:

- La estructura relacional del sistema representado;
- El comportamiento funcional de cada subsistema o componente atómico; y
- Los flujos interrelacionales.

Considerando que nuestro objetivo está centrado en la presentación de una propuesta de modelaje factible, procederemos a examinar las condiciones para ejecutar una buena traducción a la luz de la complejidad; a continuación, en la Figura 2 se sintetizan las tres dimensiones debatidas en el ítem que representan las

posibilidades de aplicación práctica de abordaje sistémico (Bertalanffy, 1968; Suntherland, 1975).

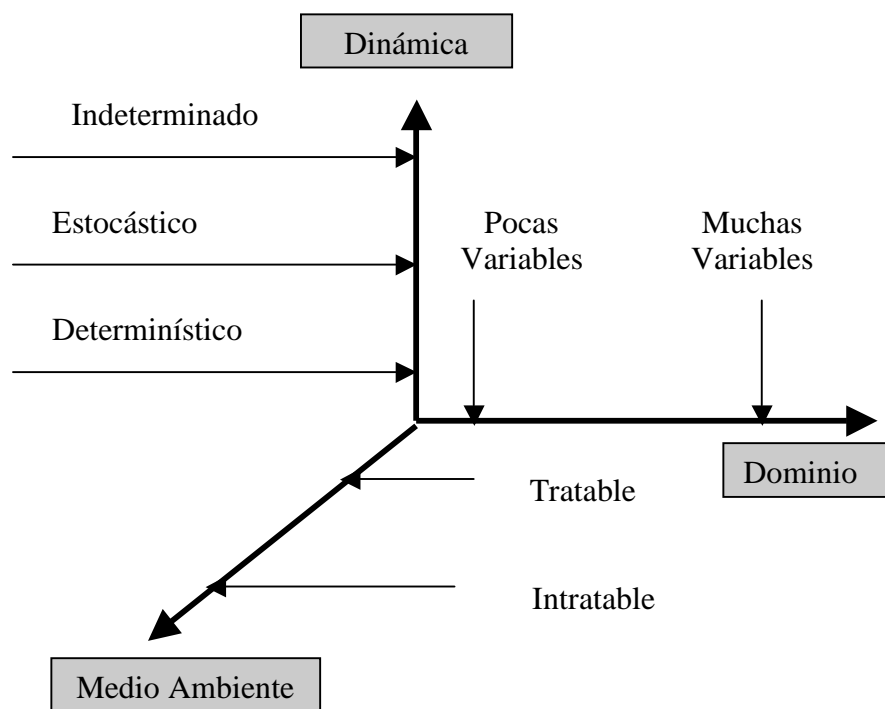


Figura 2 – Dimensiones de la Complejidad

El icono gráfico correspondiente a la Figura 2 se puede aplicar para el análisis de todo tipo de sistemas, incluso los socioeconómicos (que pueden representar tanto una sociedad como un país). Concentrándonos en el objetivo planteado al iniciar este trabajo, identificamos su área restringida en vista a la complejidad de traducción entre los dos planos, mediante la siguiente figura:

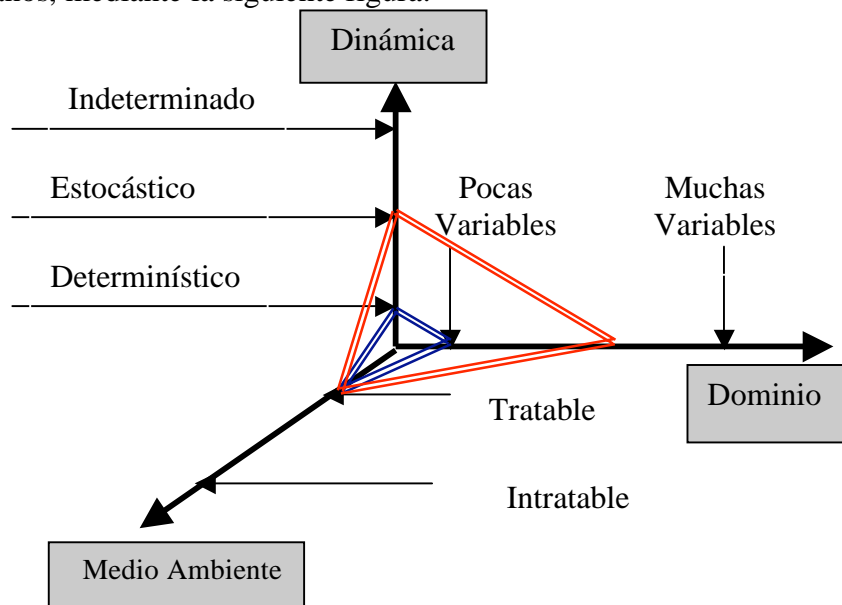


Figura 3 – Espacio Viable para Actuación en Modelos

El plano interior que define modelos determinísticos, tratables y de pequeño porte se denomina *Plano de Mecanismos*. La estructura relacional de los sistemas modelados se puede representar mediante diseños o símbolos, en tanto que el comportamiento funcional se puede representar mediante funciones de desempeño en las cuales las posibles entradas en los subsistemas se asocian a las salidas generadas por el mismo comportamiento.

De las mismas definiciones de modelo y objetivos, derivan las principales características de los modelos de optimización:

- referencia a la obtención de las *propiedades analíticas* del modelo;
- énfasis en una *mejoría medible* en el proceso. Aquí se involucran conceptos de optimización que hacen a las posibilidades del problema de disponer de más de una solución posible. Los modelos de optimización están regularmente amparados en variables cuantitativas bien definidas como el icono gráfico evidencia (Hein, 1999);
- se hace el *reconocimiento explícito* de las interacciones en el modelo y sobre el modelo mismo.

Ejemplo -1-:

Un *problema de optimización continua*, matemáticamente se puede formalizar así (Luenberger, 1984):

$$\begin{array}{l}
 \text{Minimizar } f(x) \\
 \text{sujeta a:} \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m_h, \\
 g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m_g \\
 x \in \mathfrak{R}^n
 \end{array}$$

Donde: $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ y $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, son funciones continuas, generalmente diferenciables en problemas tratables de gran porte.

Ejemplo -2-:

Un *problema de optimización discreta* se puede entender como el deseo de obtener un conjunto $S^* \in F$ satisfaciendo:

$$\begin{array}{l}
 C(S^*) \geq C(S), \quad \forall S \in F \quad (\text{problema de maximización}) \\
 C(S^*) \leq C(S), \quad \forall S \in F \quad (\text{problema de minimización})
 \end{array}$$

Donde S corresponde a la Configuración del problema; S^* es la mejor dentro de todas las configuraciones conforme al criterio de optimización $C(S)$; F es el espacio de las configuraciones y C es la función objetivo.

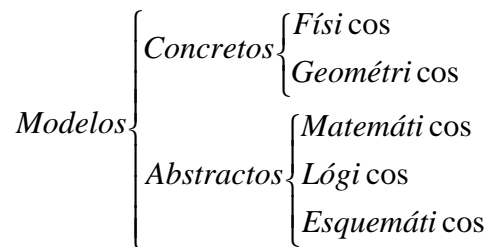
Si bien esta formalización es general, se volverá al modelo adoptando las nomenclaturas clásicas para las configuraciones S (o soluciones viables) y F (espacio de las soluciones viables).

4. CLASIFICACIÓN DE MODELOS

Los modelos se pueden construir sobre diversas arquitecturas. Como existen muchos enfoques mediante los cuales se puede abordar el proceso de construcción de modelos, es posible distinguir varias clasificaciones, a saber:

4.1. Clasificación en cuanto a la Naturaleza del Modelo

Seguidamente se presenta un esquema para clasificar a los modelos considerando su naturaleza:



Esquema 1 – Clasificación General de Modelos

4.2. Clasificación en cuanto a las Propiedades de los Modelos

Se puede abordar la clasificación de los modelos a partir de las propiedades que los mismos son capaces de representar; en relación a este aspecto, Ackoff y Sasieni (1971), destacan los grupos: modelos icónicos, modelos analógicos y modelos simbólicos.

En los *modelos icónicos* las propiedades relevantes de los objetos reales se representan como tales; en estos modelos una de las diferencias más significativas entre la realidad y el modelo, corresponde a la escala. Los modelos icónicos son *imágenes* de la realidad; ejemplos de estos modelos son las fotografías y los mapas. Los modelos icónicos son, en general, concretos y de manipulación experimental difícil.

Los *modelos analógicos* emplean un conjunto de propiedades inherentes al modelo para representar el conjunto de propiedades de la realidad; un ejemplo clásico de estos modelos es la sustitución de sistemas hidráulicos por eléctricos. Los grafos son modelos analógicos que utilizan grandezas geométricas y posiciones en el plano para representar diversas variables y sus relaciones, representando, en numerosas situaciones, *problemas de decisión*.

Los *modelos simbólicos* emplean letras, números y otros símbolos para representar las variables y sus relaciones. Frecuentemente, toman la forma de relaciones lógicas o matemáticas (ecuaciones). En general, todos los modelos y, especialmente, los modelos simbólicos se desarrollan en forma interactiva mediante aproximaciones. Los flujogramas y los Diagrama de Flujo de Datos (DFD) son típicos modelos simbólicos desarrollados, regularmente, en etapas de aproximación. Los modelos elaborados en las primeras fases del modelaje se denominan, en numerosas situaciones, *modelos conceptuales*. En estos modelos conceptuales, no extraña que las relaciones entre los elementos del sistema estén descriptas cualitativamente. Los Diagramas de Flujo de Datos y las Redes de Petri corresponden a ejemplos de modelos conceptuales. En optimización objetiva, cuando es posible, se

realiza la construcción de modelos simbólicos pues permiten el tratamiento cuantitativo del sistema y también, de sus propiedades.

4.3. Clasificación en cuanto a las Variables Controladas

Otra distinción importante entre los modelos se puede efectuar a partir de la naturaleza de las variables involucradas. Existen modelos que presentan variables controlables, en tanto otros no. En general, los modelos con variables controlables son *explicativos* y los modelos con variables incontrolables son *descriptivos*.

5. PROCESO DE MODELADO

5.1. Pasos para el Modelado

En forma bastante general, es posible resumir el *proceso de modelado* o de construcción de modelos en la óptica operacional, conforme a los pasos sugeridos por el flujograma de la Figura 4.

La definición del problema corresponde a una de las fases más relevantes del proceso y comprende la clara percepción del desafío colocado. El problema se debe traducir en elementos palpables: Objetivos; Variables de decisión (o control) y Niveles de detalle.

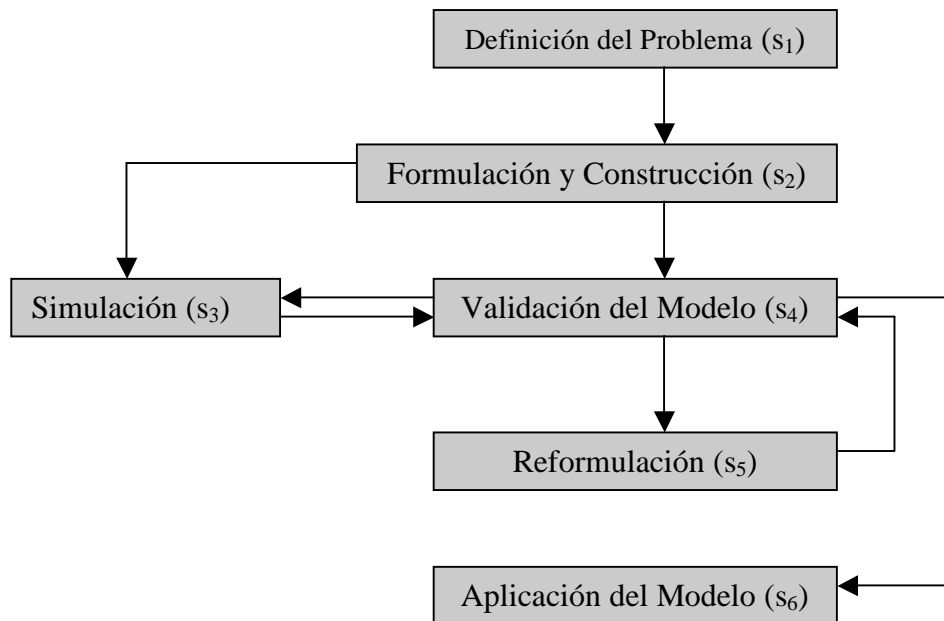


Figura 4 - Proceso de construcción de un modelo

5.2. Patrones para construir Modelos de Optimización

A pesar de no considerar la técnica de construcción de modelos como “un tema artístico”, difícilmente, sería posible reunir en un algoritmo específico y autocontenido todos los pasos indispensables para modelar un sistema genérico. Buscando el equilibrio entre el arte y la técnica, podemos proponer una sistematización si no completa, por lo menos parcial de este proceso. Conforme a Ackoff y Sasieni (1971), pueden considerarse cinco patrones de construcción de modelos:

Patrón 1: cuando una estructura del sistema es suficientemente simple y evidente para ser comprendida por inspección. Aquí, el modelo puede ser construido con facilidad, hecho que no significa que no pueda ser muy difícil o bien imposible proceder a evaluar las variables no controladas y otros diversos parámetros. El número de variables controladas también puede tornar imposible la obtención de una solución práctica del problema. El patrón 1 de modelaje se aplica claramente a los sistemas pertenecientes al plano del mecanismo del icono gráfico de la Figura 3.

Patrón 2: cuando la estructura del sistema es relativamente aparente, una representación simbólica no es tan aparente. En tal situación, la búsqueda de un sistema análogo con estructura conocida es una buena opción. El sistema análogo podrá auxiliar a descubrir las propiedades del sistema en estudio.

La metodología de *Enfriamiento Simulado* se traduce en un buen ejemplo del Patrón 2, pues se investigan los máximos de una función compleja mediante una analogía con el proceso de recocido de ciertos materiales.

Patrón 3: cuando la estructura del sistema no es aparente, un análisis estadístico del mismo puede constituirse en un buen enfoque. Aquí, el sistema se considera como “una caja negra”, donde se conocen, con seguridad, las respuestas para determinados estímulos.

Patrón 4: cuando la estructura del sistema no es aparente y no es posible aislar los efectos de las diversas variables mediante un análisis estadístico. En este caso, un enfoque está centrado en el diseño experimental, con el propósito de determinar variables y correlaciones relevantes para reducir el caso al patrón 3.

Patrón 5: cuando verificamos las situaciones del patrón 4, pero las experimentaciones posibles sobre el modelo son limitadas para el fin deseado. En este esquema son significativos los modelos de conflictos y también, de juegos de operaciones (Ackoff y Sasieni, 1971).

6. Una Aplicación Didáctica

Con el propósito de ilustrar la propuesta de modelaje expuesta precedentemente, se procede a presentar un simple modelo matemático destinado a la enseñanza, específicamente en el contexto que se describe, que a su vez esta directamente vinculado a un tópico de optimización.

La situación planteada reside en intentar brindar una ayuda a un “lector de medidores” de agua y/o energía eléctrica, debido a que el mismo enfrenta diariamente los más variados tipos de situaciones, en cuanto a longitud de calles. Ejemplos de esta

naturaleza abundan en las anchas avenidas de la Ciudad de San Pablo (Brasil), particularmente en la Avenida Paulista pero, también existen calles muy estrechas, como por caso, el famoso de la Calle 25 de Marzo, dentro de la misma ciudad. Consecuentemente, surge una pregunta: Cómo el “lector de medidores” procede en estos casos? Recorre totalmente un lado de la calle y después el otro lado o hace travesías regulares de un lado al otro lado de la calle?.

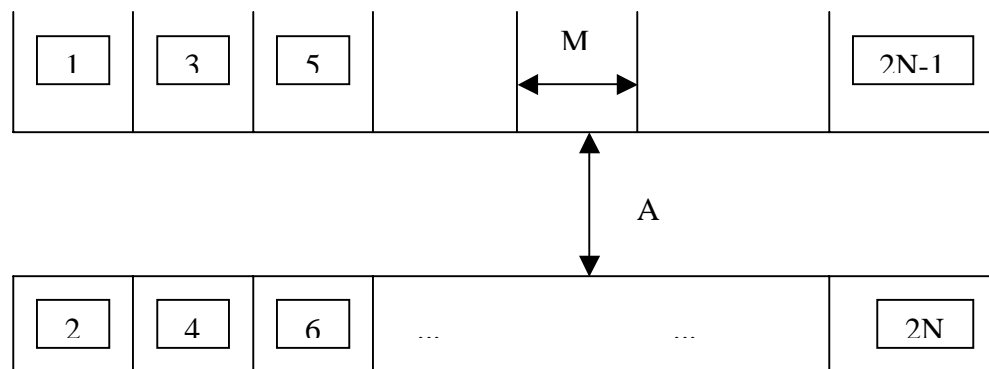
Las hipótesis vinculadas a esta pregunta, regularmente indican que si se trata de avenidas anchas el “lector de medidores” inicialmente recorra un lado y luego el otro lado; y cuando las calles sean estrechas realice travesías. Sin embargo, existe una pregunta adicional: Cómo hace para elegir los criterios en cada situación?

Cuando se toma el concepto que apunta al “medio ambiente” del problemas, evidentemente, se considerará un problema tratable; esto quiere decir que habrá un conjunto de hipótesis estructurales del problema que permitirán obtener una solución razonable. Así, por caso, las medidas de cada construcción ubicada sobre las aceras correspondientes a las calles serán idénticas; aunque si bien se conoce que en realidad esto no ocurre, pero si esta situación se respeta en forma absoluta, debería construirse un modelo para cada caso. Consecuentemente, la anchura de cada calle se tomará como fija, no existiendo, para nuestro modelo, variación alguna. Además de esto, una calle en cuestión tendrá salida, que no necesariamente deberá ser usada.

El dominio del problema contempla tres variables estructurales básicas, o sea: la anchura de la calle (A), la medida del frente de cada casa ubicada sobre la acera correspondiente a la calle (M) y el número de casas por calle ($2N$). Al problema en cuestión se lo puede clasificar como un problema con pocas variables homogéneas, hasta porque el número de casas es irrelevante, bajo la consideración que sea mayor que 2. Complementariamente se considerarán algunas otras variables, pero en carácter de apoyo.

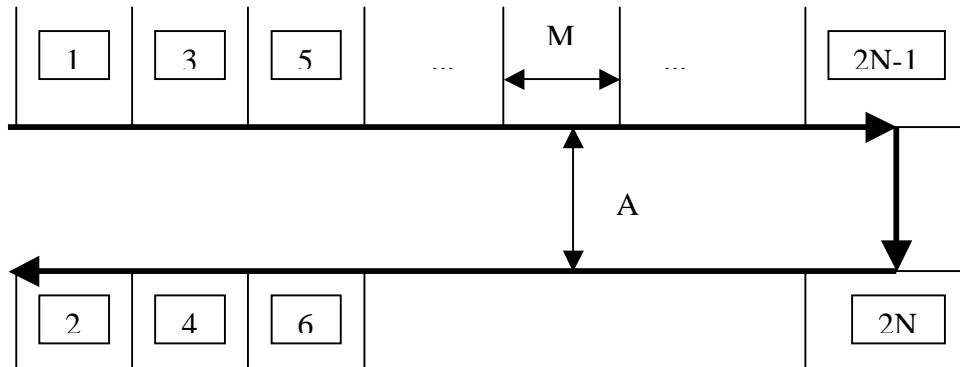
La dinámica del problema es de naturaleza determinística, en gran parte causada por las hipótesis de tratamiento del problema. No hay algo que justifique el uso de probabilidades en este problema; sin embargo, existe un punto curioso en cuanto a la indeterminación, que será explorada mejor y explicada con más detalle al llegar a la finalización del modelo.

La figura siguiente esboza la situación descripta previamente:

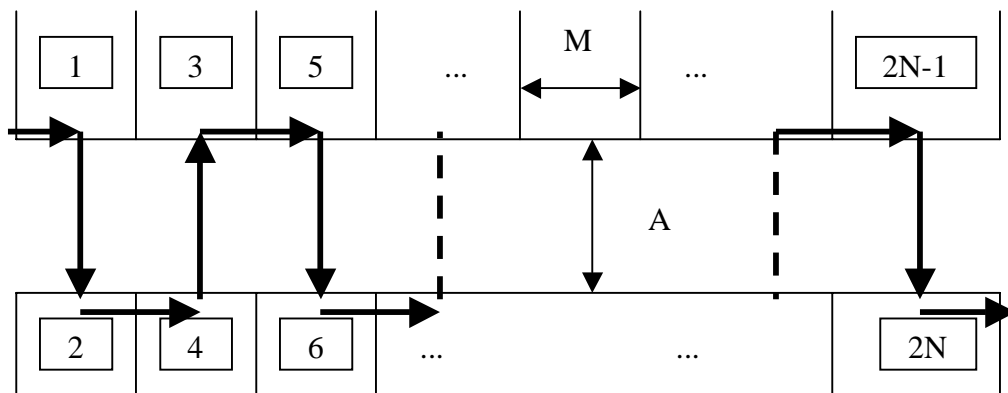


Las estrategias que se pueden aplicar son las siguientes:

I. Recorrer todo el lado de la calle, atravesar la calle en la última casa de la misma calle y regresar por el lado opuesto; consecuentemente, se describe el esquema:



II. Atravesar la calle cuando se ha completado la lectura en cada casa; el esquema que describe la estrategia sigue a continuación:



Matemáticamente se pueden testear ambas estrategias, particularmente una en relación a la otra:

Al efecto, designamos D_I a la distancia cuando se utiliza la estrategia I y D_{II} cuando se emplea la estrategia II, planteando la realización del test, para $N \geq 2$, en las condiciones que establecen:

$$D_I < D_{II}$$

A partir de los esquemas correspondientes al modelo particular se sabe que:

$$D_I = (2N - 1) \cdot M + A \text{ y } D_{II} = N \cdot A + N \cdot M$$

Por lo tanto:

$$(2N - 1) \cdot M + A < N \cdot A + N \cdot M$$

$$2 N \cdot M - M + A < N \cdot A + N \cdot M$$

$$2 N \cdot M - N \cdot M - M < N \cdot A - A$$

$$N \cdot M - M < N \cdot A - A$$

$$M \cdot (N - 1) < (N - 1) \cdot A$$

$$M < A$$

Análogamente cuando $D_I > D_{II}$ resulta que $M > A$. El problema de la “indeterminación” pseudocorre en el instante en que $M = A$, o sea, en este caso cualquiera de las dos estrategias será óptima. Siendo así, no es posible clasificar al problema en cuestión como indeterminado, pero sí como de única solución, pues D_I y D_{II} son iguales.

Lo descripto previamente permite concluir que si la calle es ancha se debe recorrer en primer lugar un lado de la misma y luego, regresar por el otro lado; en tanto que si la calle es estrecha se debe atravesar la calle inmediatamente después de la última lectura. Si la anchura y el frente de las casas son iguales, cualquiera de las dos opciones es óptima. Pero, este modelo sugiere que existe movimiento de automóviles por las calles, hecho que no ocurre en calles muy estrechas. Hasta aquí la travesía era realizada en forma perpendicular a la calle a efectos de minimizar el riesgo de accidente por atropello; sin embargo, si este riesgo no existiera se podrá optar por “zigzaguear” entre una casa y otra, cabiendo preguntar: Cual será esta distancia?

La importancia de aplicaciones como la descripta anteriormente radica en la posibilidad de modificar las distintas variables intervinientes, parámetros y/o constantes y más generalmente los dominios (o contextos) aportando situaciones de similitud que permitan enriquecer los enfoques de resolución de problemas de parte de los docentes en vistas a incrementar la formación de los aprendices, redundando en una mejor comprensión de situaciones con adecuadas interpretaciones contextuales de parte de los alumnos.

7. Conclusiones

El suceso del modelo depende de la adecuación de su traducción, o bien, de su “formulación”. El término propio “formular” empleado frecuentemente para expresar el proceso de construcción de modelos de optimización, trae consigo una carga *cuantitativa y matemática* de magnitud significativa. La adecuación pretendida depende, también, de los elementos que escapan al contenido estrictamente técnico, involucrando la percepción del constructor (o grupo de elaboración) del modelo, una facultad cognitiva de alto nivel. Las *fórmulas* (o *ecuaciones*) del modelo no existen como tales en la naturaleza, pues tienen que ser identificadas o creadas. El rigor de la traducción se obtiene mediante procesos poco rigurosos o conocidos, involucrando: intuición, experiencia, creatividad, poder de síntesis (Biembengut, 1999).

Por ende, resultan dos consecuencias inmediatas para el desarrollo de modelos:

- La presencia de una enorme dificultad de modelar el *proceso de formulación*.
- La existencia de una marcada tendencia a considerar a la actividad de formulación de un modelo como *arte*.

El abordaje artístico del fenómeno de formulación tiene sus justificaciones, pudiendo traer en sí un malicioso elemento: desubicar el foco de desarrollo de las técnicas de modelaje para un contexto poco conocido y controlable. Si, por un lado, la construcción de un modelo es innegablemente una actividad de carácter subjetivo, pudiendo exigir características innatas del modelador, por otro lado, la mayoría de las veces, conjugar el verbo modelar implicará un esfuerzo de carácter absolutamente técnico. A pesar de lo genial y casi místico, en la mayoría de las situaciones reales, los factores predominantes de la elaboración serán conocimientos y habilidades, cuyo aprendizaje y desenvolvimiento estarán perfectamente al alcance de quien tenga interés en este tema.

En la fase de formulación del modelo deben definirse los tipos de variables a utilizar en la representación, así también como el nivel apropiado de agregación de tales variables. Además, en la formulación deben representarse las restricciones del problema, tanto cuantitativas como las restricciones de naturaleza lógica. El modelo deberá adecuarse a la naturaleza de los datos de entrada y de salida, y además, ser capaz de expresar las funciones de desempeño que posiblemente, se exigirán durante el proceso. La formulación se completará estableciendo las hipótesis de representación que orientarán la elección y la posible utilización de modelos preexistentes y de técnicas de resolución (exactas, heurísticas, etc.) para el caso planteado.

La construcción de modelos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejarán la definición y dimensionamiento de las relaciones entre las variables del modelo (constantes de similaridad). En la fase de validación del modelo, corresponde comparar su comportamiento con la realidad y, si fuera necesario, actuar sobre tales elementos con el propósito de aproximar lo suficientemente posible el comportamiento del sistema modelo al del sistema real.

8. Referencias Bibliográficas

- ACKOFF, R. L., e SASIENI, M. W. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1971.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BERTALANFFY, L. **General System Theory**. Nova Yorque: George Braziller, 1968.
- BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: Editora FURB, 1999.
- BLACK, Max. **Models and Metaphors: studies in language and philosophy**. New York: Cornell University Press, 1962.

- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- EMSHOFF, J. R. **A Computer Simulation Model of the Prisoner's Dilemma**. Behavioural Science, 1970.
- HADLOCK, Charles R. **Mathematical Modeling in the Environment**. Washington: The Mathematical Association of America, 1998.
- LOESCH, Cláudio, HEIN, Nelson. **Pesquisa Operacional: fundamentos e modelos**. Blumenau: Editora FURB, 1999.
- LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. Addison-Wesley, 1984.
- MARIOTTI, Humberto. **As paixões do Ego**. São Paulo: Palas Athena, 2000.
- SUNTHERLAND, J. W. **Systems Analysis, Administration and Architecture**. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold Company, 1975.