

# ARTEFACTO Y ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Flores-González, M.<sup>a</sup>Montoya-Delgadillo, E.<sup>b</sup>

<sup>a,b,c</sup>Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;  
[prof.macarena.flores@gmail.com](mailto:prof.macarena.flores@gmail.com)<sup>a</sup>, [elizabeth.montoya@pucv.cl](mailto:elizabeth.montoya@pucv.cl)<sup>b</sup>

## Resumen

*En el presente trabajo se investiga y estudia sobre el aprendizaje de la multiplicación de los números complejos, con el objetivo de enseñar este contenido activando la génesis semiótica privilegiando el registro gráfico, a partir de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático. En esta investigación de corte cualitativo, se ha implementado una propuesta de aprendizaje con 34 estudiantes de ingeniería y 4 estudiantes de Matemática, ambos de primer año universitario (18-19 años), donde se evidencia a partir de los resultados, que al momento de realizar tratamientos y conversiones entre los registros semióticos mencionados anteriormente con un artefacto de tipo software, y activando las distintas génesis del ETM, existe una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión.*

**Palabras clave:** *Espacio de Trabajo Matemático, Multiplicación de Números Complejos, Artefacto, Visualización, Génesis.*

## EL PROBLEMA: ALGEBRIZACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

En nuestra experiencia en el aula hemos constatado un privilegio en la escritura algebraica por sobre otras escrituras del objeto, lo que puede provocar una comprensión superficial de las propiedades. Para estudiar los números complejos no basta con saber las operaciones algebraicas y aritméticas que ellos cumplen, más aún, si bien el rol del álgebra en el desarrollo de la Matemática ha sido muy importante, habría que evitar la algebrización cuando esta no sea estrictamente necesaria con la finalidad de una mejor apropiación del objeto matemático, en otros términos, activar y articular los planos epistemológicos y cognitivos en el estudiante. (Montoya, Mena, Mena, 2015, p.13).

Dentro de los trabajos de investigación referentes a la enseñanza de números complejos, se encuentra a Barrera (2014) la que realiza una investigación referente a la multiplicación de números Reales y Complejos, con el objetivo de caracterizar el espacio de trabajo matemático de 34 grupos de estudiantes de Francia (de dos a cuatro personas de 17 y 18 años de edad) provenientes de un liceo científico, a través de un cuestionario de 5 preguntas realizadas; gracias a las producciones obtenidas la autora evidenció que el objeto matemático tratado debe emerger en los estudiantes activando las génesis dentro del plano cognitivo.

De acuerdo a Artigue, M. & Deledicq, A. (1992), existen cuatro etapas en la historia de los números complejos: *La aparición de cantidades imaginarias en algoritmos operatorios (siglo XVI)*(p.6); *El funcionamiento como herramienta y el encuentro con los ángulos y logaritmos (siglo XVIII)*(p.16); *Las representaciones geométricas de las cantidades imaginarias (siglo XIX)*(p.33), y por último, *La construcción algebraica (siglo XIX)* (p.50). Para efectos de nuestra investigación nos centraremos en el tercer momento y cuarto momento. Dentro de la representación geométrica encontramos a Wessel, que en 1797 multiplica geoméricamente segmentos dirigidos, donde argumenta que esta

multiplicación debe tener dos propiedades, que *la longitud del producto debía ser el producto de las longitudes de cada segmento y que el segmento producto debía diferir en la dirección de cada segmento factor por la misma cantidad angular que el otro segmento factor difería en dirección al compararlo con el segmento unidad*. (Nahin, 2008, p.71). Gauss por su parte, en el mismo siglo, define un número complejo como un punto, pero no como un segmento dirigido (Kline, 1972, p.834-835). Con el pasar de los años, se puede notar que los matemáticos han usado distintas notaciones para trabajar con los números complejos, un ejemplo de esto es la definición que entrega Euler (siglo XVIII) de unidad imaginaria, dice que  $i = \sqrt{-1}$ ; con los años esa convención cambió porque generaba inconvenientes para trabajar (operacionalizar) con ellos<sup>28</sup>, posteriormente llegó a ser  $i^2 = -1$ . Sin embargo, en la actualidad se sigue incurriendo en la misma notación, existiendo abuso de lenguaje incluso en algunos textos escolares, lo que lleva a errores en el aprendizaje de los números complejos.

A la luz de la problemática planteada, el objetivo general de esta investigación fue: enseñar la multiplicación del sistema de los números complejos con un énfasis gráfico; por ende los objetivos específicos fueron Diseñar e implementar una propuesta donde distintos registros puedan enlazarse mediante conversiones y Caracterizar el espacio de trabajo matemático personal del estudiante a través de las componentes que conforman el espacio de trabajo. Intencionamos una propuesta de enseñanza de tal manera que se evidenciara al menos dos cambios de registros de la multiplicación de los números complejos; en este sentido fue pertinente preguntarse ¿Qué elementos interfieren en los cambios de registros de representación en la multiplicación de números complejos? y ¿Cómo articular las componentes presentes en el espacio de trabajo matemático del estudiante en relación con la multiplicación de números complejos?. De forma conjunta, realizamos los análisis anteriormente mencionados a la luz del marco teórico que se presenta a continuación.

### **El espacio de trabajo matemático (ETM)**

El Espacio de Trabajo Matemático, ETM, desarrollada por Kuzniak (2011) e inspirada en los *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico*, ETG, por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraico, etc.), en un *ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista, etc)* mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo. El *plano epistemológico* está constituido por tres *componentes o polos: representamen (o representante), referencial y artefacto*. El *plano cognitivo* está también conformado por tres componentes: los procesos de *visualización, construcción y prueba*. La articulación entre estos planos se realiza mediante un conjunto de génesis: *semiótica, instrumental y discursiva* que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011), como se muestra en la figura 1.

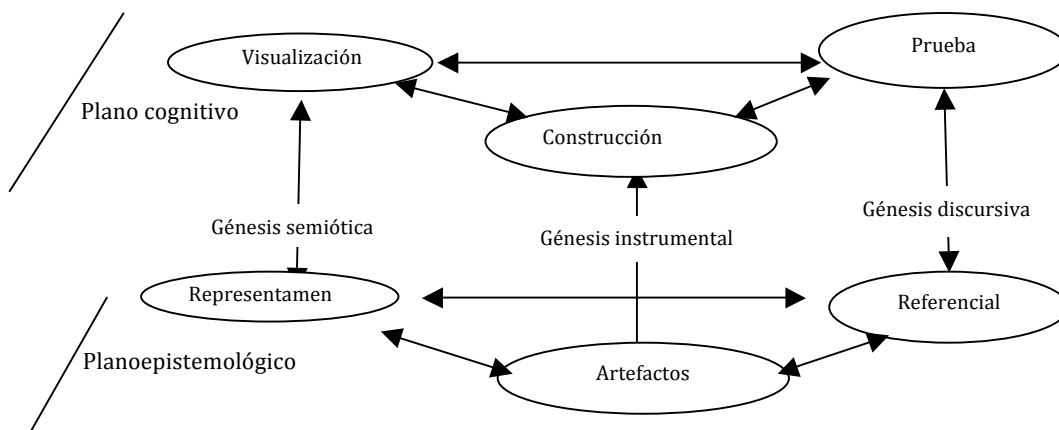


Figura 1. Espacio de trabajo geométrico y sus génesis (Kuzniak, 2011)

La teoría caracteriza además tres tipos de espacios de trabajo: (1) de referencia, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; (2) idóneo, según se enseña este saber en una institución dada con una función definida, y (3) personal, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas (Kuzniak, 2004). La activación de las génesis y una circulación intencionada en el ETM propicia el conocimiento matemático (Montoya, Mena, Mena, 2012).

### Análisis del ETM personal a partir de la misma tarea

La tarea establecida que deba realizar el estudiante, activa por lo menos una génesis en el alumno, luego para realizar un análisis del *ETM personal* a partir de una tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las componentes del ETM y cuál es la relación entre una génesis y otra. En esta investigación se presentan tareas que activan y dan sentido al espacio de trabajo *personal*, ya que la interacción entre problemas matemáticos y el individuo lleva a la reflexión en el ETM.

### Contexto metodológico y de experimentación

En este trabajo se efectuó una investigación de tipo cualitativa y reposa sobre una situación de aprendizaje diseñada para un contexto de una implementación con intervención docente.

En cuanto a la metodología, esta se basó en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Para ello, se realizaron las 4 fases correspondientes: en los *análisis preliminares, concepciones y análisis a priori, análisis a posteriori y validación*. Refiriéndose a la *experimentación*, la secuencia de aprendizaje se aplicó en primera instancia a un curso de primer año de universidad, en una carrera de Ingeniería. La implementación se hizo a cargo del profesor del curso y se realizó a 34 estudiantes de primer año (18-20 años). En una segunda instancia, la situación estuvo a cargo de las investigadoras, se aplicó a 2 binomios con estudiantes de la misma Universidad de Pedagogía en Matemáticas (un estudiante que reprobó álgebra 1 y otro que aprobó la asignatura) y en momentos diferentes. En cuanto al análisis a priori, se diseñó bajo el marco teórico un protocolo de análisis para las producciones, identificando el artefacto utilizado (con papel milimetrado en una primera implementación y con software en una segunda implementación).

## PRINCIPALES RESULTADOS OBTENIDOS

### Pregunta iv, 2ª implementación

Esta pregunta tiene por objetivo visualizar y describir la relación existente por un lado, entre los módulos de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera y por otro lado entre los argumentos de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera. A partir del representamen ubicado en el artefacto, el estudiante active el plano “Semiótico-Instrumental” y con el pueda comunicar sus conclusiones por medio del plano “Semiótico-Discursivo”.

Grafique el complejo  $w$  y multiplíquelo por el complejo  $v = c + di$ , con  $c, d \in \mathbb{R}$ . Luego responda.

a.-¿Existe alguna relación entre los módulos de los complejos  $w, v$  y la multiplicación de ellos? Justifique su respuesta.

#### Binomio2:

Comienzan nuevamente interactuando con el software utilizando aproximadamente 5 minutos en ello y logran contestar pregunta. Luego comienzan a dar justificación a su respuesta. En cuanto al ETM, parten por el plano Semiótico-Instrumental, pero además, los estudiantes se sitúan bastante en la génesis discursiva. Ahora mostraremos la respuesta entregada por B2.

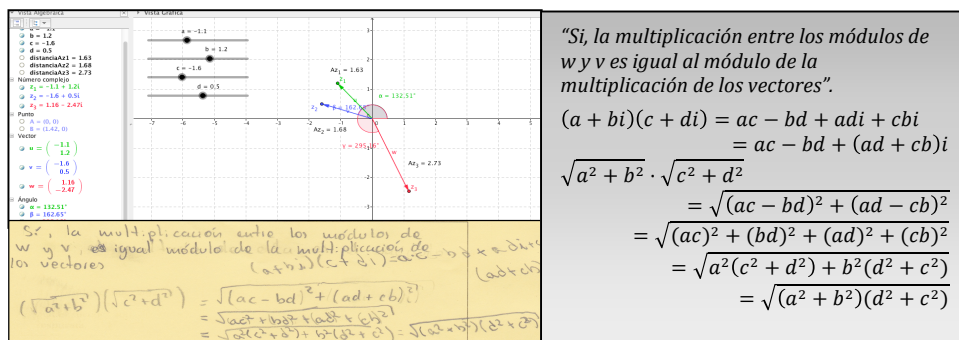


Figura 2. Producción B2.

b.- ¿Existe alguna relación entre los argumentos de los números complejos  $w, v$  y la multiplicación de ellos? Justifique su respuesta

#### Binomio 1:

No les basta con lo que observan para poder justificar la pregunta, por lo tanto ocurre lo mismo a nivel de ETM de la pregunta anterior. A continuación se muestra la respuesta dada por B1.B1:

$$z = j + hi = \sqrt{j^2 + h^2} \cdot cis(\theta + \alpha), w = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot cis(\alpha), v = c + di = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot cis(\theta)$$

$$Pd. w \cdot v = z$$

La multiplicación del módulo se hizo en la pregunta anterior.

$$Pd: cis(\alpha) \cdot cis(\theta) = cis(\theta + \alpha)$$

$$(\cos(\theta) + isin(\theta))(\cos(\alpha) + isin(\alpha)) = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha) + i(\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)) = \cos(\theta + \alpha) + isin(\theta + \alpha) = cis(\theta + \alpha)$$

$$w \cdot v = z \Rightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} \cdot cis(\alpha))(\sqrt{c^2 + d^2} \cdot cis(\theta)) = \sqrt{j^2 + h^2} \cdot cis(\theta + \alpha)$$

Por lo que está ahí dicho el argumento del complejo resultante es la suma de ambos argumentos de los números complejos  $w, v$ .

## CONCLUSIONES

En una primera instancia (donde se utilizó el papel milimetrado como artefacto), quedó en evidencia la problemática planteada referida a la génesis semiótica en relación con la algebrización del objeto matemático, ya que ningún estudiante pudo dar respuesta a la pregunta final que englobaba la interpretación de la representación gráfica de la multiplicación de dos números complejos. Generalmente, los estudiantes se entrampaban en la conversión del registro gráfico al

registro de lenguaje natural, conversión que naturalmente es más compleja por el poco nivel de congruencia existente. Uno de los factores porque ocurre lo anterior, es que los alumnos se encuentran más familiarizados al trabajar en el registro algebraico, y estos resultados los llevan a la gráfica sin tener un análisis profundo de lo que ocurre; por este hecho se vuelve fundamental el artefacto utilizado en la segunda implementación (software), ya que gracias a él se pueden visualizar de manera más concreta todas las gráficas pedidas, hace que el estudiante pueda generalizar sus respuestas con mayor facilidad y por lo tanto se cuenta con una herramienta que sin duda ayuda a la profundización del objeto. En este sentido, teóricamente se ha intencionado una circulación vertical en el ETM-personal del estudiante.

Luego de la reformulación del cuestionario, se pudo constatar la importancia de crear actividades que ayuden a que el estudiante pueda llegar a construir su conocimiento poniendo atención en detalles tan importantes como la definición de unidad imaginaria. Nos parece fundamental la participación del profesor, para que los estudiantes se apropien sobre estos aspectos relacionados con el objeto matemático tratado en esta investigación. Con lo mencionado previamente en cuanto a la génesis semiótica no queremos decir que se deje de lado el registro algebraico, sino que el alumno debe conocer las distintas representaciones del objeto y las conversiones que hayan entre estos, con el objetivo que el estudiante sea capaz de realizar esta(s) conversión(es) de manera casi “natural”. Por otro lado, un espacio de trabajo matemático con la activación de las tres génesis donde hayan circulaciones entre sus componentes, ayuda de manera importante al proceso de aprendizaje y a la construcción del conocimiento en el estudiante.

## Principales Referencias

- Artigue, M. & Deledicq, A. (1992). *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes: quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. Cahier DIDIREM 15, IREM Paris 7.
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9 – 24.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2015). *Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número Especial, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*. 17 (4-1), 20–40.
- Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A, Mena-Lorca, J. (2015). *Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*. 17 (4-1), 1