

# UN ESTUDIO SOBRE EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS BASADO EN REGISTROS SEMIÓTICOS.

Gálvez C.<sup>a</sup>, Mandujano M.<sup>b</sup>, Zamora I.<sup>c</sup>, Maturana I.<sup>d</sup>,

UPLA, Chile

carolinagalvezormazabal@live.cl, mmandujanobaeza@gmail.com, Ivonnezd@gmail.com  
isamatup@hotmail.com.

## Resumen

*Basados en la teoría de Registros Semióticos de Duval (Duval R., 2006) investigamos desde una postura cognitiva una problemática de enseñanza aprendizaje referida a la Teoría de Conjuntos, es un área que al igual que la lógica bivalente es fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Realizamos un estudio de casos múltiples en dos universidades de la zona, donde la información que hemos recabado hasta ahora, dio cuenta fundamentalmente de las dificultades en las conversiones de registros naturales a gráficos, en conjunto con los tratamientos dentro de un mismo registro algebraico.*

**Palabras clave:** conjuntos, algebra, registros semióticos.

## INTRODUCCIÓN

En Matemática la teoría de conjunto cobró un rol esencial a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, matemáticos como Cantor, Dedekind, Zermelo y Frege entre otros trabajaron en la noción de conjunto, logrando proyectarla como eje articulador de la matemática. Según los estudios histórico-epistemológicos de Arrieche (Arrieche, 2000),

durante el siglo XX, se decide llevar este saber a las aulas, pero es en la década de los 80' que este proceso sufre fuertes críticas de matemáticos como Feynman (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), quienes cuestionan su impacto en la educación matemática, producto de ello, se retira parcialmente del curriculum escolar, permaneciendo en la actualidad como parte de los programas para los primeros años de carreras como licenciaturas en ciencias e ingenierías.

Desde la perspectiva didáctica algunas de las complejidades reportadas en el proceso de enseñanza aprendizaje, son los aportes de Linchevski y Vinner (1988) cuyos resultados revelaron que existe diferencia entre el concepto imagen, y el concepto definición. A su vez Zaskis y Gunn (1997) detectaron dificultades en la descripción del conjunto vacío y los elementos de un conjunto que son a la vez conjuntos. Fischbein y Baltsan (1999), mostraron en su investigación las dificultades del aprendizaje de la teoría de conjuntos introduciendo la relación entre la noción de colección y la noción matemática de conjunto. Arrieche (2002), por su parte propone en su estudio una relación entre la teoría de conjuntos y los números naturales, desde donde concluye que los maestros necesitan conocer las nociones elementales de la praxeología conjuntista, principalmente por sus relaciones con la numérica.

Por nuestra parte, proponemos un estudio sobre las problemáticas de aprendizaje que basado en la teoría de registros semióticos nos permita identificar claramente estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes universitarios para comprender la teoría de conjunto, en particular el álgebra de conjuntos. Además identificar factores matemáticos asociados a la comprensión del álgebra y de la teoría de conjuntos.

## TEORÍA DE REGISTROS SEMIÓTICOS.

La teoría de Registros Semióticos fue creada por R. Duval, como un modelo explicativo para las dificultades en el aprendizaje de la matemática, sostiene que hay al menos dos características de la actividad cognitiva implicada en las estrategias matemáticas. Por una parte se recurre a varios registros de representación semiótica, algunos de los cuales han sido específicamente desarrollados para efectuar tratamientos matemáticos; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción.

Desde estas perspectivas las preguntas claves para el logro de un aprendizaje en matemáticas son ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con su representación?

La conversión entre registros no se efectúa espontáneamente a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, pero puede ser un obstáculo serio cuando no hay congruencia. Duval sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas o no. La comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural. La persistencia del fenómeno de bloqueos de registros y su estrecha relación con dificultades de comprensión conceptual, las cuales se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no congruencia y por la ausencia de transferencia de conocimientos fuera de los sistemas estándares de aprendizaje. Estos fenómenos conducen a entender que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación.

Para Duval, es necesario que un sujeto alcance el estadio de la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar al representante y al representado o a la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa.

## DISEÑO METODOLOGICO: ESTUDIODE CASOS MULTIPLE.

Es un estudio cualitativo, por lo que decidimos como diseño metodológico de estudio de caso múltiple, en la medida que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad, en un período de tiempo, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992).

Tabla 1. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	Caso 1	Caso 2
		Ingeniería (15 estudiantes)	Matemáticas (4estudiantes)
		Cuestionario	Cuestionario
	Álgebra	Entrevista	Entrevista
Universitario		Registros de observación	Registros de observación

Fuente: Diseño metodológico. 2015.

Los criterios de selección de estas unidades de estudios trabajadas como “casos”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, con experiencias previas en los contenidos y voluntarios.

Diseñamos un cuestionario de 12 preguntas, realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. A continuación mostraremos dos preguntas del cuestionario y algunas de las evidencias obtenidas.

**Preguntas seleccionadas del cuestionario.**

1.- Sea  $C$  un subconjunto de los números  $\mathbb{R}$ , describa al conjunto  $C$  mediante una función proposicional. Realice un gráfico para  $C$ .

Una respuesta esperada en la descripción del conjunto  $C$ , es mediante los intervalos contados por la disyunción ( $\vee$ ), lo que interpretamos como un tratamiento basal, pues aun no elabora una función proposicional independiente de este registro; supusimos que la realización de un gráfico en la recta real que represente al conjunto  $C$ , provocaría un cambio de registro, el que podría precipitar una lectura más general del conjunto, y crear, al regresar al registro algebraico, funciones proposicionales, por ejemplo en términos de desigualdades, que describan a  $C$ .

Otra intención de esta pregunta es propiciar un ambiente donde hay más de una proposición lógica que define al mismo conjunto. Lo que nos conduce a una problemática de congruencia dentro de la misma representación.

12.- Dada la siguiente expresión algebraica  $B \cap (A \cup C^c)$  en teoría de conjuntos, realice una representación gráfica mediante un diagrama de Venn- Euler.

Una respuesta esperable corresponde a una representación gráfica como la de la figura 1. Por otra parte, desde la teoría de registros semióticos, el proceso involucra el cambio de registro del lenguaje algebraico al registro gráfico. Desde la perspectiva matemática los estudiantes deberán operar los conjuntos de manera combinada siendo capaces de identificar el conjunto solicitado.

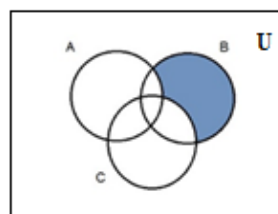


Figura1. Respuesta esperada.

**Evidencias obtenidas en las entrevistas.**

A continuación presentaremos un extracto de las producciones escritas por 3 estudiantes.

**Estudiante E1** (caso 1), en las preguntas seleccionadas responde a la primera pregunta realizando la gráfica del intervalo, pero no construye la función proposicional pedida, como es posible apreciar en la figura1. Por otra parte no responde a la pregunta 12.

Sea  $C = (-\infty, 4) \cup [5, \infty +)$  un subconjunto de los números  $\mathbb{R}$ , describa a  $C$  mediante una función proposición proposicional. Y represente a  $C$  gráficamente.

Figura 2. Respuesta de E1.

Una interpretación posible desde la teoría, es que a pesar de realizar un cambio de registro no interpreta la pregunta, ella requiere un tratamiento en el registro algebraico, presumiblemente se enfrenta a una falta de coherencia entre registros.

**Estudiante E14** (caso 2), es una evidencia de dificultades en la conversión de registros, al mismo tiempo que no realiza tratamientos dentro de un mismo registro.

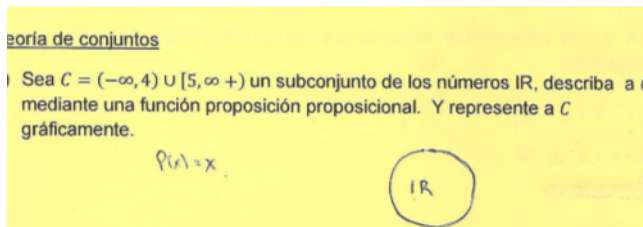


Figura3. Respuesta de E14 a la pregunta 1

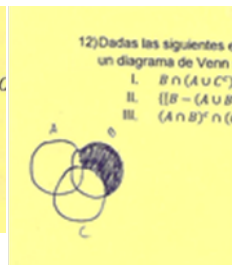


Figura4. Representación gráfica del conjunto pedido.

En este caso no mostro tratamientos ni conversiones para dar respuesta a la primera pregunta. A pesar de ello responde correctamente a la pregunta 12, realiza la conversión de registro esperada.

**Estudiante E15** (caso 1), al igual que la mayoría de los estudiantes de ambos casos, realizan un cambio de registro como se aprecia en la figura 5 para dar respuesta a la pregunta, el que no es suficiente para responder; es prueba que el registro grafico por sí solo no es suficiente para lograr la comprensión de un concepto.

Por otra parte el tratamiento pedido no es logrado, pareciera que el tratamiento algebraico es dificultoso para los estudiantes en ambos casos.

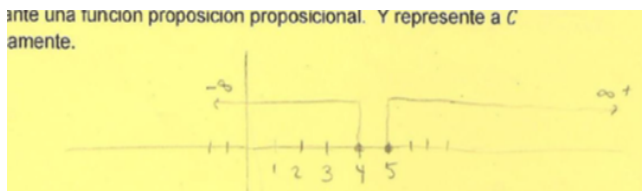


Figura 5. Dibujo de los intervalos que representan al conjunto C.

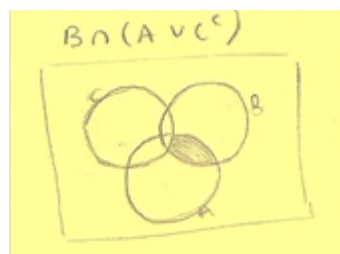


Figura 6. Respuesta a la pregunta 12.

La respuesta a la pregunta 12 es una evidencia de dificultades en el álgebra de conjuntos, pues el diagrama realizado no corresponde a la expresión algebraica solicitada. Podría pensarse que al realizar un diagrama el estudiante cambia de registro, pero no hay concordancia entre la expresión algebraica y la figura realizada.

### Algunas conclusiones

El estudio que hasta ahora hemos realizado da cuenta de algunas dificultades que los estudiantes de los dos casos tienen en la comprensión de conceptos relacionados a la teoría de conjuntos; temas como la intersección, la unión y complemento de conjuntos son una tarea pendiente; desde la perspectiva didáctica, el marco teórico permitió evidenciar dificultades en la conversión entre registros, por ejemplo entre el registro gráfico y el algebraico. Es prematuro dar como un resultado en este estudio que existe direccionalidad entre la conversión de registros, pero las evidencias

actuales dan cuenta que al parecer esto ocurre, esto es la conversión exitosa del registro algebraico al gráfico, más que del registro gráfico al algebraico.

Por otra parte, hemos obtenido evidencias que el tratamiento dentro de un mismo registro no se logra, en particular en el registro algebraico; cuyas implicancias repercutirían en otras áreas de la matemática, por ejemplo en resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Continuaremos la investigación con el objetivo de formular una propuesta didáctica que esperamos sea beneficiosa para el aprendizaje en los estudiantes.

## Referencias.

- Arnal, J.; Del Rincón, D.; Latorre, A. (1992). "La investigación colaborativa". En J. Arnal; D. Del Rincón y A. Latorre: *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología*. Barcelona, Labor.
- Arrieché, M. (2000). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos*. Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Arrieché, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes en el estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.
- Duval, R. (2006) *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*; Vol. 9.1, PP. 143-168. Madrid, RSME.
- Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). *The mathematical concept of set and the collection model*. *Educational Studies in Mathematics*, 37:1-22.
- Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). *The naïve concept of sets in elementary teachers*. *Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11: 471-78.
- Zazkis, R. y Gunn, Ch. (1997). *Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions*. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (1): 133-169.