

DISEÑO DE TAREAS EN EL ESTADO DE LA TRANSVERSAL DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO USANDO GEOGEBRA.

Santis-Orellana, C.^a; Henríquez-Rivas, C.^b. (Profesora Guía)

Universidad Alberto Hurtado;
carolina.santis.o@gmail.com, carohenriquezrivas@gmail.com.

Resumen

El trabajo que se presenta corresponde a una propuesta de aprendizaje para estudiantes de 7° básico (12 años) relativa a las transversales de gravedad del triángulo usando tecnología (Geogebra). Para la propuesta se diseñan tareas de referencia sustentadas en la teoría Espacio de Trabajo Matemático, con la finalidad de coordinar aspectos semióticos, discursivos e instrumentales. Los resultados proporcionan información relevante para mejorar la propuesta, así como para el estudio en la formación del profesor.

Palabras clave: transversal de gravedad, geogebra, espacio de trabajo geométrico, planos verticales.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo es parte de una investigación que tiene como objetivo diseñar una propuesta de aprendizaje para el estudio de la transversal de gravedad de triángulos utilizando Geogebra. La propuesta se ha diseñado para el nivel 7° básico (12 años), la cual en una fase de experimentación se ha implementado en una institución de la Región Metropolitana.

En el marco curricular chileno (MINEDUC, 2009) en 7° básico se propone el estudio de la transversal de gravedad de un triángulo en el eje de geometría, en el Objetivo Fundamental 7, dice: “Construir triángulos [...], caracterizar sus elementos lineales y comprobar que algunas de sus propiedades son válidas para casos particulares, en forma manual y usando procesadores geométricos.” (p. 172). De la misma manera, se realiza una revisión al Programa de Estudio del nivel donde se evidencia el estudio del objeto matemático con el aprendizaje esperado N° 2: “Construir propiedades de [...] la transversal de gravedad de triángulos, utilizando instrumentos manuales o procesadores geométricos” (MINEDUC, 2011, p. 50).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se identifica que los temas propuestos en el eje geometría no se explicitan cuáles propiedades o teoremas del objeto matemático a estudiar. Por ejemplo, no son considerados los relativos a la división proporcional de las transversales de gravedad de acuerdo al punto de intersección baricentro (entre otros).

Las investigaciones realizadas por Chávez (2014) y Miranda (2011) muestran que existen problemas al estudiar la transversal de gravedad de un triángulo, haciendo referencia a “los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo, no son fácilmente distinguidos por los estudiantes, los confunden, los olvidan y carecen para ellos de un significado relevante” (Chávez, 2014, p. 689). Asimismo, Miranda (2011) realiza un estudio en base a los puntos notables donde la problemática en la estudio es la difícil comprensión de los alumnos al estudiar las propiedades de dichos puntos. Ambos estudios citados concuerdan que existen problemas en la comprensión de las propiedades de la transversal de gravedad, al ser un tema muy abstracto y poco cercano para los estudiantes

En el marco de la teoría *Espacio de Trabajo Matemático*, ETM (Kuzniak, 2011), se muestra el potencial deluso de una herramienta tecnológica en procesos cognitivos y matemáticos al estudiar

contenidos referentes a la geometría y como se logra la articulación de los planos verticales coordinando lo figural e instrumental con estudiantes que se inician en el nivel secundario. Esto es lo que se evidencia en el trabajo Coutat y Richard (2011), por medio del uso de una herramienta tecnológica. En estudios como el de García, Romero y Gómez-Chacón (2014) a través de un experimento de enseñanza, los autores concluyen que el uso de Geogebra pierde protagonismo en la articulación de los planos instrumental y discursivo, al considerar al profesor como el gestor y diseñador principal en el proceso de razonamientos ligados al lenguaje.

En síntesis, la presente investigación tiene como propósito: *Diseñar tareas para el aprendizaje que favorezcan el estudio de propiedades de la transversal de gravedad de triángulos usando Geogebra para la construcción*. Lo anterior permitirá favorecer la activación de los planos verticales del Espacio de Trabajo Geométrico personal y propiciar el tránsito entre los Paradigmas Geométricos GI/gII (o bien gI/GII) en estudiantes de 7° básico.

Marco teórico

El estudio se sustenta en la teoría de *Paradigmas Geométricos y Espacio de trabajo geométricos (ETM_G)* desarrollada inicialmente por Houdement y Kuzniak (1999, 2000, 2006) y ampliada para otros dominios de la matemática por Kuzniak (2011), denominada actualmente *Espacio de Trabajo Matemático (ETM)*.

Espacio de trabajo matemático

El objetivo primordial es una mayor comprensión cuando se pone en manifiesto el trabajo matemático en un contexto escolar, con lo que, el ETM es el espacio organizado que favorece el trabajo de sujetos cuando resuelven problemas matemáticos. En el caso de la matemática escolar los sujetos serán alumnos o estudiantes en nivel inicial o avanzado (Kuzniak & Richard, 2014).

En el ETM se conserva la idea original del ETM_G, en la cual se articulan dos planos: uno que tiene referencia a aspectos cognitivos (plano cognitivo) y otro que hace referencia a aspectos matemáticos (plano epistemológico). Cada plano tiene tres polos, en el plano cognitivo: *visualización, construcción y prueba*, y en el plano epistemológico: *representante, artefactos y referencial* (Kuzniak, 2011). Los polos de los planos del ETM se articulan por medio de tres génesis: *semiótica, instrumental y discursiva*. “La génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos. La génesis instrumental, hace operatorios los artefactos en el proceso constructivo. La génesis discursiva que da sentido al referencial teórico (definiciones, propiedades) para ponerlo al servicio del razonamiento matemático” (Henríquez, 2014, p.1808). Lo anterior permite abordar la *circulación* entre las génesis en el ETM de un individuo.

Los planos verticales como lo describen Coutat & Richard (2014), se podrán vincular en las fases del ETM_G cuando se realiza una tarea: *descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación*. Según los autores “La ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas sobre la base de la coordinación de las génesis y sus relaciones con el plano epistemológico” (p. 11).

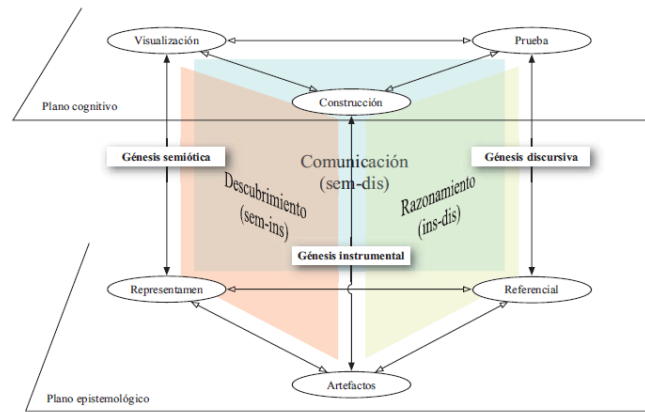


Figura 1. Planos verticales en el ETM (Kuzniak & Richard, 2014).

Kuzniak y Richard (2014) describen el trabajo matemático en el contexto escolar en tres niveles distintos o tipos de ETM: *ETM de referencia*, corresponde a la matemática considerada por la institución, la cual es desarrollada por el profesor y que corresponde al *ETM idóneo*, y es el docente que debe construir y propiciar oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, quienes trabajan para su *ETM personal*. Los autores enfatizan en que el ETM idóneo no es estático y que es susceptible a cambios constantes. Con lo expuesto, el presente estudio estará enfocado en el estudio ETM personal de estudiantes de 7° básico.

Paradigmas geométricos

En este enfoque teórico se definen tres tipos de geometrías que coexisten en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina de acuerdo a Houdement y Kuzniak (2006): *Geometría Natural (GI)*, que descansa sobre las figuras reales y tangibles y su importancia radica en la medición; *Geometría Axiomática Natural (GII)*, se habla de figuras geométricas, para validar el objeto se acude a definiciones y propiedades, pero a nivel de un sistema axiomático local; *Geometría Axiomática (GIII)*, los objetos matemáticos provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo.

DISEÑO DE TAREAS


El diseño de tareas permite indagar en el ETM_{Gpersonal} de estudiantes en el nivel de 7° básico, con el propósito de estudiar la interacción de los *planos verticales* del ETM y analizar el *paradigma geométrico* privilegiado en cada trabajo.

En el diseño de tareas se han definido los siguientes propósitos: 1) “Favorecer la coordinación de los planos [Sem-Ins] e [Ins-Dis] al construir la transversal de gravedad de un triángulo usando Geogebra”, y 2) “Conjeturar respecto a la división proporcional en la intersección de las transversales de gravedad de un triángulo para favorecer la coordinación de los planos [Sem-Dis] e [Ins-Dis] mediante el uso de Geogebra”.

Por razones de extensión, en lo que sigue será considerada la tarea asociada al propósito N°2.

“Relación entre trazos y el baricentro”

- Paso 1: Construye con Geogebra un triángulo ABC y dos transversales de gravedad que se intersectan.
 Paso 2: Utiliza herramientas de Geogebra para mostrar que la transversal de gravedad que va de B a G (o BG) pasa por el centro de AC . Describe tu justificación.
 Paso 3: Utiliza la herramienta “distancia o longitud” para encontrar las medidas de las transversales de gravedad.
 Paso 4: Completa la siguiente oración, de acuerdo a las medidas de las transversales de gravedad (Considera G como el punto de intersección de las transversales de gravedad):

a) $BG = 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$, b) $\frac{2}{3}BF = \underline{\hspace{2cm}}$ y  c) $\frac{1}{3}BF = \underline{\hspace{2cm}}$

Paso 5: Lo que acabas de comprobar, ¿se cumplirá para las otras dos transversales de gravedad? Utiliza los deslizamientos o movimientos de la figura para justificar y escribe tus explicaciones.

ANÁLISIS DEL DISEÑO DE TAREA

Análisis a priori

En la tarea, se busca identificar como los estudiantes conjeturan acerca de las relaciones que se presentan en la división proporcional al intersectarse las transversales de gravedad en el baricentro. Con esto, en los pasos 1 y 2 se espera que los estudiantes utilicen la herramienta de Geogebra *distancia o longitud* o que realicen construcciones geométricas como paralelogramos para probar lo pedido. El paso 3 ayuda al paso 4 para que los alumnos conjeturen la relación que existe entre los trazos y el baricentro. En el paso 5, lo ideal sería que los alumnos identificaran la razón entre en el punto de intersección de las transversales de gravedad y lo extiendan a las demás transversales de gravedad. Con los pasos 1 y 2 se favorece la coordinación de los planos [*Ins-Dis*] del ETM_G y con los pasos 3, 4 y 5 se favorece la coordinación de los planos [*Sem-Dis*] del ETM_G.

Análisis de resultados

La investigación corresponde a un estudio de casos (Stake, 1995), donde la implementación –en una etapa inicial– se llevó a cabo con dos estudiantes de 7° básico de un colegio particular subvencionado de Santiago de Chile. Cabe destacar que, antes de realizar las tareas los estudiantes tuvieron una inducción para asegurar el uso de Geogebra, y que los estudiantes conocen la definición de la transversal de gravedad de un triángulo. Los estudiantes se han denominado como E₁ y E₂.

Primer caso: ETM_G de E₁

A continuación se muestra parte del trabajo realizado por E₁, donde se describe su trabajo.

E₁ justifica el paso 2 respondiendo:

“Sí, porque el segmento BG pasa por el centro de \overline{AC} , quedando sin nombre el vértice”.

Para establecer las relaciones presentadas en el paso 4, utiliza las medidas de los segmentos (paso 3) y operatoria numérica, respondiendo:

“ \overline{FG} multiplicado por 2, $1,18 \cdot 2 = 2,36$ y $\overline{BG} = 2,36$ entonces $BG = 2 \cdot \overline{FG}$ ”.

De tal manera que E₁ utiliza la misma estrategia para completar las relaciones pedidas. A la pregunta del paso 5 dice:

“Sí, porque todos tienen la misma medida y tienen un punto medio y puede ser comprobado con Geogebra por las medidas y sin son exactas mejor”.

Coordinación de los planos vérticales del ETM y paradigma geométrico

El trabajo geométrico se activa con la génesis instrumental. El estudiante E₁ para justificar el paso dos de la tarea se basa en la utilización de Geogebra más que en propiedades geométricas o la definición de la transversal de gravedad, con esto no se identifica la coordinación de los planos [*Ins-Dis*]. El paso 4 el trabajo geométrico lo valida por medio de la figura, las medidas de las longitudes de las transversales de gravedad y el cálculo numérico, con esto se identifica la coordinación de los planos [*sem-dis*]. El Paradigma Geométrico privilegiado es GI, debido a que no utiliza definiciones y propiedades en el trabajo geométrico.

Segundo caso: ETM_G de E₂

A continuación se muestra parte del trabajo realizado por E₂.

E₂ justifica el paso 2 respondiendo:

“Con un punto de intersección, ya que si pasa por el centro de \overline{AC} tiene que haber un punto de intersección”.

Para establecer las relaciones presentadas en el paso 4, utiliza las medidas de los segmentos (paso 3) y operatoria numérica, respondiendo:

“ $\overline{BG} = 2,8$ y $\overline{GF} = 1,4$, significa que \overline{BG} es el doble de \overline{GF} ”.

Las otras relaciones presentadas las completaron la misma estrategia. A la pregunta del paso 5 dice:

“Sí, porque en todas las transversales el segmento más grande mide el doble del pequeño, ejemplo $\overline{GE} = 2,38$; $2,38 \cdot 2 = 4,76$; $4,76 = \overline{GA}$ ”.

Coordinación de los planos vérticales del ETM y paradigma geométrico

E_2 en la tarea 2, el paso 2 basa la justificación en la construcción y la figura, por ende en el trabajo geométrico hay una coordinación entre los planos [*Sem-Ins*]. En el paso 4 el trabajo geométrico lo valida por medio de la figura, las medidas de las longitudes de las transversales de gravedad, el cálculo numérico y en cada relación concluye verbalmente lo que se le pide probar, con esto se identifica la coordinación de los planos [*Sem-Dis*]. El Paradigma Geométrico privilegiado es GI.

CONCLUSIONES

Para lograr los objetivos planteados el uso de Geogebra fue considerado como un medio instrumental, en el cual se privilegia su potencial dinámico. Lo anterior, contribuye en favorecer los procesos de descubrimiento, visualización y razonamiento discursivo. En general observamos que los resultados de los dos casos analizados E_1 y E_2 , evidencian la articulación de los procesos que hacen alusión a lo semiótico–discursivo, instrumental–discursivo, donde el trabajo de ambos estudiantes se activa por medio del uso de la herramienta tecnológica, la cual favorece el proceso de descubrimiento y razonamiento. El proceso semiótico–instrumental no fue considerado en los objetivos y análisis a priori, y E_2 muestra la coordinación de estos procesos. Las tareas serán mejoradas luego de esta primera experimentación, y además, se considerarán otros teoremas pertinentes al objeto matemático en estudio, como los relativos a las áreas de triángulos.

Referencias

- Chávez, V. (2014). *Construcciones mentales para la recta de Euler*. Alme, 682-696.
- Coutat, S. & Richard, P. (2011) *Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques*. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.
- García, M., Romero, I. & Gómez-Chacón, I. (2015). *Procesos de argumentación de estudiantes de secundaria: Influencias cognitivas y actitudinales*. En *Espacio de Trabajo Matemático. Cuarto Simposio de ETM* (págs. 421-443). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). *Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, Volumen 17 (4-1), 1-39.
- Miranda, N. (2011). *Caracterización del uso de las TIC en la enseñanza de los puntos notables del triángulo*. Medellín: Facultad de ciencias exactas y naturales.
- Rivas, C. (2014). *El trabajo geométrico personal de futuros profesores*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME)*, 27, 1807-1816
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.