

LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL A TRAVÉS DE LOS MODELOS EMERGENTES

Cárcamo, A.^a, Fortuny, J.^b, Gómez, J.^c

^{a y b} Universidad Austral de Chile, ^b Universidad Autónoma de Barcelona, ^c Universidad Politécnica de Cataluña;

andrea.carcamo@uach.cl, JosepMaria.Fortuny@uab.cat, joang@ma4.upc.edu

Resumen

Álgebra lineal es un curso reconocido por sus dificultades tanto cognitivas como conceptuales. Para contribuir a minimizarlas se elaboró y evaluó un diseño instruccional innovador basado en los modelos emergentes y la modelización matemática para los conceptos de conjunto generador y espacio generado a través de la investigación de diseño con estudiantes universitarios. Los resultados sugieren que este tipo de diseño instruccional favorece la construcción de estos conceptos matemáticos, por tanto, podría ser utilizado como una alternativa, a la enseñanza tradicional, para estos y otros conceptos de álgebra lineal.

Palabras clave: *modelos emergentes, modelización matemática, conjunto generador, espacio generador, investigación de diseño*

INTRODUCCIÓN

Álgebra lineal es difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier y Sierpinska, 2001) y es por esta razón que se han buscado diversas alternativas para su enseñanza como incorporar el proceso de modelización matemática en este curso porque resulta ser una metodología eficaz y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos a la vez que establece el vínculo entre la matemática y la realidad (Gómez y Fortuny, 2002).

Por su parte, Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney y Larson (2012) señalan que la teoría de diseño instruccional de la educación matemática realista (EMR) podría promover la comprensión de las ideas claves de álgebra lineal al concebir la matemática como una actividad humana y ser el estudiante quien construye su conocimiento desde una situación experiencial hacia un conocimiento más formal por medio de la heurística de los modelos emergentes de Gravemeijer (1999).

A partir de lo expuesto, surge el interés de diseñar y aplicar un diseño instruccional innovador para álgebra lineal que considere la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. Para ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática a la construcción de conjunto generador y espacio generado? Para responder a esta pregunta se plantea como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional fundamentado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática.

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación complementa la heurística de los modelos emergentes con la modelización matemática porque sustentan el diseño instruccional utilizado en este estudio.

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes se presenta como una alternativa para los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya

hechas y tiene como objetivo el diseño de actividades de instrucción que apoyen a los estudiantes a desarrollar las herramientas matemáticas que pueden necesitar más adelante (Gravemeijer, 2002).

Gravemeijer (2002) señala que la transición del *modelo de* actividad matemática informal al *modelo para* el razonamiento matemático formal ocurre con un cambio y evolución en el pensamiento de los estudiantes en donde cambian la situación que es experiencial para ellos por un enfoque de relaciones matemáticas. Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal Gravemeijer (1999) establece los modelos emergentes que corresponden a cuatro niveles de actividad: situacional (el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma), referencial (implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional), general (se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema) y formal (se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales).

La actividad situacional de los modelos emergentes considera una situación realista que no solo involucra situaciones del mundo real sino que en general, se refiere a situaciones problemáticas que los estudiantes pueden imaginar (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). En particular, en este estudio se considera una situación del mundo real y la modelización matemática como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas porque a nivel universitario, de acuerdo a Alsina (2007), los estudiantes aprenden mejor en contexto, ya sea porque proporciona motivación e interés o porque involucra a los estudiantes en la resolución de problemas del mundo real.

Metodología

El estudio tiene como principal objetivo evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática para la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La metodología para este estudio es la investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase se elaboró una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995). A continuación, en una universidad española se realizaron dos ciclos de experimentación de diseño con estudiantes de primer año en donde participaron 31 del curso 2013-2014 y 45 del periodo 2014-2015. Los datos recopilados en ambos ciclos de diseño fueron: protocolos escritos de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes en grupo, vídeo y grabaciones en audio y entrevista individuales al finalizar la experimentación.

El análisis de datos se inició con la organización, anotación y descripción de estos. Inicialmente, las tareas desarrolladas por los estudiantes y las grabaciones fueron analizadas por el equipo de investigación desde la perspectiva de la pregunta de investigación. Posteriormente, los datos recopilados se analizaron identificando ejemplos en que se manifestaba algún cambio del razonamiento informal a uno más formal con respecto a los conceptos estudiados. A partir de este análisis, se creó una historia que reconstruye el proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes.

En la Tabla 1 se presenta una síntesis de cómo se manifiesta la heurística de los modelos emergentes en las tareas que forman parte del diseño instruccional.

Tabla 9. Descripción de las tareas del diseño instruccional y su relación con los niveles de actividad de Gravemeijer

Descripción de tarea	Qué niveles de actividad se manifiestan en la tarea
<i>Tarea 1: Generando contraseñas con vectores.</i> Se les entrega información de la importancia de las contraseñas seguras, las características que deben tener y ejemplos de cómo crear contraseñas con Excel. A partir de esto, inventan un generador de contraseñas seguras utilizando vectores.	Nivel situacional. Los estudiantes utilizan sus estrategias en conjunto con sus conocimientos de matemática y de contraseñas para elaborar un generador de contraseñas seguras.
<i>Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado.</i> De acuerdo con la solución de su generador de contraseñas se les pide dos conjuntos: uno que posea todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro que tenga vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenga el vector genérico que genera sus contraseñas numéricas. Luego que el profesor introduce los conceptos, realizan una analogía entre estos y su generador de contraseñas.	Nivel referencial. Los estudiantes haciendo referencia a la solución propuesta de su generador de contraseñas presentan dos conjuntos con determinadas características y luego, que el profesor define formalmente los conceptos, enlazan esta nueva realidad matemática con el problema real, al hacer una analogía entre ellos.
<i>Tarea 3 y 4: Explorando propiedades y Aplicando lo aprendido.</i> Utilizan los conceptos de conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar en relación a ellos usando la notación matemática convencional.	Nivel general y formal. Los estudiantes exploran y aplican conjunto generador y espacio generado usando la notación matemática convencional.

RESULTADOS

Los resultados del segundo ciclo de experimentación se presentan a través de la historia del proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes en relación a las tareas del diseño instruccional.

Tarea 1: Crear un generador de contraseñas seguras en que se utilice vectores

La primera tarea fue una actividad situacional porque los estudiantes se centraron en el problema de crear un generador de contraseñas utilizando sus concepciones previas de vectores y de contraseñas. Los modelos matemáticos que propusieron los grupos de estudiantes fueron principalmente dos: vector genérico o combinaciones lineales (Ver ejemplos en la Tabla 2).

Tabla 2. Ejemplos de modelos matemáticos para generar contraseñas presentados por los grupos

Ejemplo vector genérico	Ejemplo combinación lineal
$P = (x, 2x, y, 3y, z, 4z)$	$vector 1: a(3, -3, 4) + b(-1, 1, 2) + c(0, 4, 2)$
	$vector 2: a(1, 2, -3) + b(-4, 9, 2) + c(2, 0, -7)$

Por consiguiente, los estudiantes tuvieron una primera aproximación con los conceptos de conjunto generador y espacio generado cuando anotaron dos conjuntos: uno que contenía todos los vectores que generaban las contraseñas numéricas y otro que poseía los vectores numéricos que permitían obtener los vectores numéricos para generar contraseñas al hacer la combinación lineal entre ellos.

Tarea 2: Realizar una analogía entre el generador de contraseñas y los nuevos conceptos

En esta tarea el razonamiento de los estudiantes se correspondió con un nivel referencial, pues utilizaron su experiencia con la resolución del problema de contraseñas para relacionarla con conjunto generador y espacio generado a través de una tabla de analogía en que vincularon los dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado. Cabe señalar que en todas las tablas de analogía se observó falta de rigurosidad con la notación matemática, tal como se observa en la Figura 1 con la notación matemática del conjunto generador.

Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre que recibe en matemática
conjunto que contiene los vectores para generar contraseñas numéricas.	$E = \{(7a, 2b, -3c) \in \mathbb{R}^3\}$	Espacio generado
conjunto que al hacer combinación lineal con sus vectores se obtiene cada vector que genera una contraseña numérica	$B = \left\{ \begin{array}{l} (7, 0, 0), \\ (0, 2, 0), \\ (0, 0, -3) \end{array} \right\}$	conjunto generador

Figura 1. Ejemplo de respuesta de la tabla de analogía entre el generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado

Tarea 3: Explorando propiedades

La tarea 3 fue una actividad general porque los estudiantes aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado sin referirse a la situación de generar contraseñas y exploraron propiedades de estos al plantearle preguntas como: ¿Cuántos vectores debe tener como mínimo un conjunto para generar a \mathbb{R}^2 ? ¿Existirá un número máximo? La mayoría de los estudiantes conjeturó correctamente al señalar que el mínimo son dos vectores y que no hay un máximo.

Tarea 4: Aplicando lo aprendido

La tarea 4 fue una actividad formal, pues los estudiantes aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto puramente matemático. Por ejemplo se les preguntó si dos vectores determinados pertenecen a un cierto espacio generado y la mayoría de los estudiantes respondieron y justificaron adecuadamente. Lo anterior, da indicios que los estudiantes progresaron hacia un razonamiento más formal de espacio generado porque fueron capaces de trabajar con este concepto en un problema matemático convencional.

CONCLUSIONES

La principal contribución de este estudio es una propuesta de enseñanza para conjunto generador y espacio generado, ya que existen escasas investigaciones de estos conceptos en el campo de la educación matemática y además, es una metodología alternativa a la tradicional para álgebra lineal que podría ser implementada para otros conceptos de este curso de acuerdo a los resultados de esta investigación.

En este estudio se planteó la pregunta sobre qué aporta un diseño instruccional basado en la modelización matemática y la heurística de los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado. A partir del análisis de datos se observa que las siguientes características del diseño instruccional aportan en la comprensión de estos:

- Los estudiantes a través de la creación de un generador de contraseñas activaron sus concepciones previas de vectores y combinación lineal lo que les ayudó a conectar éstas con

la siguiente tarea que procuraba una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.

- La tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos en estudio ayudó a los estudiantes a visualizar estos tanto en un contexto real como matemático, al mismo tiempo que les ofreció la posibilidad de diferenciarlos al utilizarlos en una situación real.
- Las tareas 3 y 4 permitieron que los estudiantes progresaran hacia un nivel más formal de los conceptos en estudio, por ejemplo, al conjeturar acerca de las características que deben tener los conjuntos para generar un cierto espacio generado y a continuación, aplicar los conceptos en un contexto convencional matemático.

Finalmente, señalamos que la heurística de los modelos emergentes no sólo orientó el diseño instruccional, sino que además, favoreció el desarrollo cognitivo de los estudiantes, al usar implícitamente los conceptos de conjunto generador y espacio generado en el contexto de generar contraseñas para posteriormente, utilizarlo en problemas matemáticos convencionales, es decir, les permitió realizar una transición desde un *modelo de* a un *modelo para* como plantea Gravemeijer (1999). Lo expuesto da indicios que este diseño instruccional resultó adecuado.

Referencias

- Alsina, C. (2007). *Teaching applications and modelling at tertiary level*. En *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 469-474). New York: Springer.
- Cobb, P., y Gravemeijer, K. P. E. (2008). *Experimenting to support and understand learning processes*. En Anthony E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.
- Dorier, J. L., y Sierpinska, A. (2001). *Research into the teaching and learning of Linear Algebra*. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Gómez i Urgellés, J. V. y Fortuny, J. M. (2002). *Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (31), 7-23.
- Gravemeijer, K. (1999). *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.
- Gravemeijer, K. (2002). *Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis*. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Congress on Teaching Statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado de http://iase-web.org/documents/papers/icots6/2d5_grav.pdf
- Simon, M. A. (1995). *Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., y Larson, C. (2012). *An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence*. *PRIMUS*, 22(8), 577-599.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2014). *Realistic mathematics education*. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Dordrecht: Springer Netherlands.