

## Resolução de problemas – um exemplo de formação de professores e aplicação com alunos

Patrícia Sampaio

Fecha de recepción: 19/12/2013

Fecha de aceptación: 16/06/2014

<p><b>Resumen</b></p>	<p>El nuevo programa de matemática de la enseñanza básica aún está siendo apropiado por los maestros, que necesitan tener una formación específica sobre las nuevas metodologías de enseñanza, hacer experiencias y construir nuevas tareas. Este reajuste incluye, para cada uno de los ciclos de la enseñanza, los objetivos, los temas matemáticos, las orientaciones metodológicas, aspectos ligados a la gestión curricular y a la evaluación. El Portugués Ministerio de la Educación ha proporcionado locales específicos de formación para los formadores de Algebra para promover el desarrollo profesional de los profesores. Se presenta la aplicación y la reflexión de una tarea que resulta de esta formación, que está dividida en dos partes, siendo la primera aplicable en cualquier ciclo y la segunda, con la explotación del Geogebra, más indicada para el 3º ciclo, sobre proporcionalidad directa</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>The new compulsory education program of mathematics is still being appropriate by teachers who need specific training on new teaching methods, to share experiences and build new tasks. This adjustment includes, for each of the cycles of compulsory education, goals, mathematical topics, methodological guidelines, aspects related to curriculum management and assessment. Thus, the Portuguese Ministry of Education provided training workshops for teachers' trainers to promote professional development. We present the application and reflection of a task resulting from this training, about Algebra, which is divided into two parts, the first can be applied in any cycle and the second, with Geogebra's exploitation, most suitable for 3.º cycle, about functions of direct proportionality.</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>O novo programa de Matemática do ensino básico ainda está a ser apropriado pelos professores, que necessitam de formação específica sobre as novas metodologias de ensino, de trocar experiências e construir novas tarefas. Este reajustamento engloba, para cada um dos ciclos do ensino básico, os objetivos, os temas matemáticos, as orientações metodológicas, aspectos ligados à gestão curricular e à avaliação. Deste modo, o Ministério da Educação Português forneceu oficinas de formação de formadores para se promover o desenvolvimento profissional dos professores. Apresenta-se a aplicação e a reflexão de uma tarefa resultante desta formação no âmbito da Álgebra, que está dividida em duas partes, sendo a primeira aplicável em qualquer ciclo e a segunda, com a exploração do <i>Geogebra</i>, mais indicada para o 3.º ciclo, sobre funções de proporcionalidade direta.</p>

### 1. Introdução

As oficinas de formação promovidas pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) Portuguesa no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) visaram preparar os docentes para a lecionação da disciplina, tendo em conta as orientações curriculares do programa.

Focaram as alterações em termos de conceitos lecionados, as orientações programáticas (das finalidades aos objetivos gerais e específicos), materiais recomendados, reforçando as capacidades transversais. Pela formação de formadores, a DGIDC tentou proporcionar uma perspetiva sobre as orientações curriculares atuais para o ensino da Matemática no ensino básico (9 anos de escolaridade, alunos com uma idade compreendida entre os 6 e os 15 anos), fomentar estratégias de trabalho colaborativo, habilitar os professores a planificar e concretizar tarefas matemáticas, proporcionar a capacidade de delinear, realizar e divulgar projetos de intervenção no campo do ensino/aprendizagem da Matemática. Deste modo, visava-se a reflexão da prática docente e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

Pela diversificação de tarefas matemáticas, pretendem-se atingir diferentes objetivos e pela discussão dos raciocínios promovidos na sua realização, há uma efetiva reflexão sobre como se alcançaram certas conclusões, promovendo o pensamento matemático. O ensino da Matemática pela resolução de problemas deve contribuir para a formação de alunos reflexivos.

Apresenta-se uma revisão de literatura sobre as tarefas matemáticas e a resolução de problemas, a importância do desenvolvimento profissional dos professores, a utilização de *software* de geometria dinâmica nas aulas de Matemática para finalmente se explorar uma tarefa aplicada em contexto de sala de aula.

O objetivo deste trabalho de pesquisa é apresentar um estudo de caso, realizado no âmbito da formação contínua de formadores de professores de Matemática, promovida pela DGIDC, visando contribuir para o desenvolvimento profissional dos mesmos no sentido da promoção de alterações nas metodologias de ensino adotadas pelos docentes em contexto de sala de aula.

## 2. Tarefas matemáticas e resolução de problemas

Uma tarefa matemática pode assumir diferentes naturezas e, deste modo, apelar a diferentes níveis cognitivos (Félicio & Rodrigues, 2010), salientando-se a pertinência de todos os tipos de tarefas nas aulas de Matemática (explorações, investigações, problemas, exercícios, projetos ...), mas reforçando-se a importância, em particular, de tarefas mais desafiantes, devendo ocupar um espaço significativo no trabalho quotidiano dos alunos. As diferentes tarefas usadas pelos professores representam diferentes tipos de pensamento por parte dos alunos, de acordo com o nível de exigência concetual das mesmas e da forma como são implementadas (Stein & Smith, 1998). A este respeito consideram Ponte e Sousa (2010, p. 35) que, e passamos a citar,

A selecção das tarefas a propor aos alunos constitui um dos aspectos essenciais do trabalho do professor. Mais do que descobrir uma ou outra tarefa motivante para “amenizar” uma sequência de aulas mais “árida”, o professor tem de considerar todo o conjunto das tarefas a propor na unidade, incluindo

naturalmente a sua diversidade (em termos de complexidade, nível de desafio e contexto matemático/não matemático), tempo de realização e representações e materiais a utilizar.

As recomendações atuais resultantes da investigação em educação Matemática apontam para que o docente diversifique as tarefas que propõe aos alunos, dando grande importância à atividade dos alunos no processo de ensino/aprendizagem, desempenhando cada tipo de tarefa um papel específico na concretização dos objetivos propostos (NCTM, 2007).

Os alunos devem ter oportunidades para discutir as tarefas com os colegas e com o professor, de argumentar, criticar e interagir nas atividades propostas, para uma efetiva partilha de ideias, estratégias, raciocínios e pensamentos matemáticos, desenvolvendo-se ainda a capacidade de comunicação dos mesmos. Não são “as tarefas que só por si irão alterar a aprendizagem. É de realçar a grande importância da acção do professor nas questões que coloca, nas interações que promove, em especial encorajando os alunos a discutir e a explicar a Matemática que desenvolvem” (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 108).

O professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões entre vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida. (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 33).

Polya, em 1945, foi o primeiro a abordar, de forma consistente, a questão da resolução de problemas em contexto de sala de aula, considerando que as atividades propostas pelo docente devem fazer o aluno pensar, construindo ele próprio o seu conhecimento, mas só nos anos 80 esta questão se tornou mais pertinente para a NCTM. Em Portugal, os programas de Matemática começaram a considerar a resolução de problemas como um objetivo prioritário no ensino desta disciplina a partir dos anos 90 e, neste momento, o PMEB “assume para além dos temas principais, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática” (Ponte et al., 2007, p. 1). “A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos” (*ibidem*, p. 8).

O PMEB contempla a existência de diferentes estratégias de resolução de problemas a serem trabalhadas pelos professores com os alunos, ao longo dos vários ciclos, como a utilização de esquemas/diagramas/tabelas/gráficos, trabalhar do fim para o princípio, a simulação/simplificação do problema, a descoberta de regularidade/regras, a organização de uma sequência de passos, por tentativa e erro, a procura de um problema análogo mais simples, o desdobramento de um problema complexo em questões mais simples, a criação de um problema equivalente, a exploração de casos particulares...

Através da resolução de problemas, o aluno averigua a validade de conceitos matemáticos, estimula procedimentos num contexto significativo, relaciona conceitos, realiza conjecturas, generaliza, toma uma atitude reflexiva, desenvolve a capacidade de raciocínio e o pensamento matemático. Segundo Boavida et al. (2008, p. 14), a resolução de problemas:

- proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- fomenta o raciocínio e a justificação;
- permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

“Numa perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial de fazer Matemática e permite o contacto com ideias matemáticas significativas” (Boavida *et al.*, 2008, p. 14). Os problemas propostos em contexto de sala de aula devem relacionar diferentes conceitos, estendendo-se às relações entre eles (Onuchic, 1999). Um problema é uma “situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel” (NCTM, 1991, p.11). Ponte (2005) considera quatro tipos essenciais de tarefas matemáticas: exercício (estrutura fechada e desafio reduzido), problema (estrutura fechada e desafio elevado), exploração (estrutura aberta e desafio reduzido) e investigação (estrutura aberta e desafio elevado). Estamos perante um problema quando o aluno necessita de encontrar um caminho para chegar à solução através de estratégias. O aluno deve procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar, não estando imediatamente acessíveis nem o processo de resolução nem a solução do problema, mostrando-se como desafiador para o aluno. Segundo Polya (2003), a resolução de um problema consiste de quatro fases: entender o problema, formular um plano de resolução, executá-lo e verificá-lo.

Dante (2003) define alguns objetivos para a resolução de problemas matemáticos: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática, tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias para resolver problemas, dar uma boa base matemática às pessoas.

Pela resolução de problemas, os alunos podem descobrir factos novos, o que os motiva a encontrarem novas formas de resolverem o mesmo problema, despertando-lhes a curiosidade para conhecimentos matemáticos e desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas. “Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas” (Andrade, 1998, p. 7) e desta forma, a resolução de problemas passa de um processo para uma metodologia de ensino. Huete e Bravo (2006, p. 118-119) reforçam esta ideia:

A resolução de problemas tem a ver com a produção de conhecimentos significativos para aquele que aprende. O conhecimento que se valoriza pela sua significação não é o conhecimento transmitido, mas o conhecimento produzido por quem está em situação de aprender. Assim, se a resolução de problemas deve ser o lugar da produção do conhecimento, a tarefa de resolver problemas é uma tarefa privilegiada para a aprendizagem.

O ensino da Matemática pela resolução de problemas deve contribuir para a formação de alunos reflexivos, autónomos e participativos, capazes de compreender e transformar a realidade, não se limitando à aplicação de regras e definições.

### 3. Desenvolvimento profissional

O desenvolvimento profissional dos professores envolve um processo contínuo de melhoria de práticas com o intuito de se promoverem mudanças educativas que visem a melhoria da qualidade de ensino, através de reflexões constantes sobre a prática docente, e “concretiza-se com uma atitude permanente de pesquisa, de questionamento e de busca de soluções” (Garcia, 1999, p. 137). “O professor tem de ser capaz de apreender intuitivamente as situações, articulando pensamento e acção e gerindo dinamicamente relações sociais; tem de ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas” (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998, p. 43). Sendo a formação uma parte integrante do desenvolvimento profissional de professores, é a formação que “lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objectivo de melhorar na qualidade do ensino que os alunos recebem” (Garcia, 1999, p. 26). Nóvoa (1992, p. 28) acrescenta que “a formação passa pela experimentação, pela inovação, pelo ensaio de novos modos de trabalho pedagógico e por uma reflexão crítica sobre a sua utilização. A formação passa por processos de investigação, directamente articulados com as práticas educativas”. O desenvolvimento profissional dos professores, é pois um processo que, na perspectiva de alguns dos autores consultados,

Implica adaptação à mudança com o fim de modificar as actividades de ensino-aprendizagem, alterar as atitudes dos professores e melhorar os resultados escolares dos alunos. (Heideman, 1990, p. 4)

Inclui todas as experiências de aprendizagem natural e aquelas que, planificadas e conscientes, tentam, directa ou indirectamente, beneficiar os indivíduos, grupos ou escolas e que contribuem para a melhoria da qualidade da educação nas salas de aula. (Day, 1999, p. 4)

[É] um *processo*, que pode ser individual ou colectivo, mas que se deve contextualizar no local de trabalho do docente – a escola – e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais através de experiências de diferente índole, tanto formais como informais. (Marcelo, 2009, p. 10)



O conceito de desenvolvimento profissional de professores associa-se ao de formação contínua e de aprendizagem ao longo da vida (Bolam & McMahon, 2004; Terigi, 2007). Qualquer que seja o conceito adotado, o objetivo é a promoção de mudança nos professores, para que estes possam crescer enquanto profissionais e indivíduos. Segundo Day (2007), o desenvolvimento profissional sempre foi essencial para os professores que trabalham numa escola, colocadas todas as mudanças que ocorrem no currículo, nas metodologias de ensino e nas próprias condições de trabalho.

O PMEB ainda está a ser apropriado pelos professores de Matemática, necessitando, estes, de frequentarem formações, neste âmbito, cooperar com outros colegas na planificação das aulas, partilhar experiências e materiais, construir tarefas matemáticas desafiantes e inovadoras ... “Relativamente às necessidades futuras evidenciadas pelos professores de formação contínua, a maioria considera como prioritárias a formação em didática e/ou temas do grupo disciplinar e a formação ao nível das TIC” (Sampaio & Coutinho, 2011, p. 149-150). Neste âmbito, a DGIDC promoveu oficinas de formação de formadores sobre o PMEB, por todo o país, para se promoverem metodologias em consonância com o programa.

#### 4. Matemática e software de geometria dinâmica

As TIC estão presentes nos programas oficiais de Matemática, devendo, por isso, o professor de Matemática integrar efetivamente as tecnologias nas suas aulas em todos os níveis de ensino. As orientações metodológicas do PMEB são bastante claras. O PMEB salienta que “os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática. Isto é, devem ser capazes de (...) usar instrumentos matemáticos tais como réguas, esquadros, compassos, transferidores, e também calculadoras e computadores” (Ponte *et al.*, 2007, p. 4), assim como usarem origens diversas (livros, manuais, jornais, Internet ...) para o desenvolvimento da comunicação matemática, e tirarem partido das TIC na resolução de problemas. Pela resolução de problemas associada à utilização das TIC, os alunos devem explorar atividades investigativas para a promoção do pensamento matemático, conforme o PMEB explicita, “a utilização adequada de recursos tecnológicos como apoio à resolução de problemas e à realização de atividades de investigação permite que os alunos se concentrem nos aspetos estratégicos do pensamento matemático” (*ibidem*, p. 62-63). A investigação tem vindo a reconhecer que a tecnologia pode facilitar abordagens dinâmicas de variados conceitos da Álgebra, pelas múltiplas representações, interativas, que poderão permitir a construção de significados, mais relevantes do que os aspetos manipulativos (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006), ideia reforçada por Ponte, Oliveira e Varandas (2003, p. 160):

Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. (...) Deste modo, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de

atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência.

Na Internet estão disponíveis materiais educativos que podem ser usados para o ensino da Matemática como a mais variada informação de natureza científica, problemas e desafios, jogos educativos, *software* específico (por exemplo, o *Geogebra*), planos de aula, *applets* ... Assim como diversos espaços de comunicação e colaboração como *blogues* e plataformas de gestão de aprendizagem. Silva *et al.* (2001) salientam que como as escolas de hoje estão ligadas à Internet, o professor de Matemática não deve desperdiçar este meio de comunicação.

O PMEB sugere a utilização de computadores na representação de objetos geométricos, na resolução de problemas e na exploração de situações, referindo que “os alunos devem recorrer a *software* de geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação” (Ponte *et al.*, 2007, p. 51). Relativamente às capacidades transversais, o PMEB também aponta como recurso o computador, a ser usado em diferentes domínios: geométrico, numérico e tratamento de dados, de modo a se tirar proveito em contexto de sala de aula da experimentação, apoiando a resolução de problemas e as atividades de investigação.

Um exemplo, bastante utilizado pelos professores de Matemática, de *software* livre de geometria dinâmica, é o *Geogebra* que proporciona uma abordagem inovadora da geometria, permitindo a construção de figuras geométricas e auxiliando assim a compreensão de conceitos e propriedades. Caldas (2011) elaborou um estudo sobre o desempenho dos alunos no 7.º ano pela utilização do *GeoGebra* na abordagem do tema “Triângulos e Quadriláteros”, tendo concluído que “o *software* de matemática dinâmica é um recurso muito eficaz, ao nível da formulação de teorias, à investigação, à exploração e ao aumento da motivação para a aprendizagem da disciplina de matemática” (p. 151). “Nesta perspetiva, as atividades propostas, com recurso ao *GeoGebra*, permitem, “dar vida” às figuras geométricas planas imóveis, contidas nos manuais de segundo e terceiro ciclos” (p. 87). Fernandes (2011) procurou analisar o contributo do *GeoGebra* para potenciar a capacidade de argumentação em alunos do 9.º ano no estudo da geometria e “em praticamente todas as tarefas, os alunos foram conduzidos a explorar uma determinada construção e, através da sua manipulação, procurar estabelecer relações e propriedades geométricas” (p. 141), tendo os estudantes acabado por autonomamente e, sem dificuldade, procederem à manipulação de objetos para explorarem, testarem e validarem propriedades e relações. Verificou-se uma mudança nas perspetivas dos alunos sobre a argumentação e sobre a aprendizagem do tema da geometria com recurso a um ambiente de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa.

Piteira (2000) elaborou um estudo com recurso ao ambiente de geometria dinâmico *Sketchpad*, em duas turmas, uma do 8.º e outra do 9.º ano de escolaridade, tendo verificado que os próprios menus deste *software* facilitaram o entendimento, pelos alunos, das construções geométricas, *obrigando-os* a pensar como deveriam construir novas figuras, avaliando o que já tinham construído e permitindo-lhes assim tirar conclusões sobre as suas propriedades e relações geométricas. De forma semelhante, Mota (2004) desenvolveu um estudo com recurso ao *Sketchpad*, em duas

turmas do 9.º ano de escolaridade, sobre o tópico “Circunferência e Polígonos. Rotações”, tendo concluído que este *software* permitiu aos alunos desenvolverem a capacidade de formularem conjecturas e realizarem as respetivas provas.

O ensino com as tecnologias de informação e comunicação tem de ser uma acção planeada, que assume os alunos como seres activos, isto é, inserida numa estratégia educativa centrada no estudante, oferecendo, deste modo, novas formas de aprendizagem. Estas práticas pedagógicas utilizadas de uma forma coerente, harmoniosa e sistemática contribuem para o desenvolvimento de um trabalho mais autónomo pelos nossos alunos, capazes de analisar, reflectir, verificar, organizar, seleccionar e estruturar as informações provenientes de diversas fontes. (Sampaio, 2006, p. 60)

## 5. Exploração de uma tarefa matemática

O programa de formação de formadores da DGIDC, em Álgebra, no âmbito do PMEB, consistiu em formações contínuas, segundo a metodologia de oficina de formação, desenvolvidas ao longo de três meses com a duração de cinquenta horas: vinte e cinco presenciais e vinte e cinco de trabalho autónomo. Neste caso, os formandos são professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (alunos com uma idade compreendida entre os 12 e os 15 anos) que também são formadores de professores de Matemática. A sua frequência neste tipo de formações promovidas pela DGIDC prende-se com a obrigatoriedade de replicação nas escolas onde lecionam.

Nesta pesquisa, apresenta-se um estudo de caso em que o procedimento adotado foi a recolha de dados pelo professor através de observação direta e materiais elaborados pelos alunos. Como se tratou de uma oficina de formação, todos os formandos teriam de criar tarefas matemáticas a aplica-las aos seus alunos. Assim, através deste programa de formação foram criadas diversas tarefas matemáticas, que foram aplicadas e exploradas, em contexto de sala de aula, assim como discutidos os resultados obtidos, em plenário, na formação. Através da reflexão destas experiências visou-se entender melhor o papel do professor como construtor de tarefas matemáticas, orientador da aplicação e discussão das mesmas, em contexto de sala de aula, e que alterações devem ser introduzidas nas metodologias adotadas pelo professor para maximizar os resultados. As metodologias de ensino usadas pelo professor podem ser caracterizadas segundo três papéis: desafiar, apoiar e avaliar, já que o docente necessita de desafiar os alunos para a concretização de tarefas investigativas através de diferentes situações e questões, por outro lado, o docente necessita de apoiar o trabalho desenvolvido pelos alunos através de perguntas, comentários e sugestões e, por fim, o docente necessita de avaliar os progressos dos alunos, assim como as dificuldades sentidas, para prosseguir com o planeado ou efetuar alterações necessárias (Ponte *et al.*, 1998, p. 24).

Apresenta-se uma tarefa matemática constituída por duas partes resultante desta formação, que foi aplicada em 3 turmas, uma do 7.º ano de escolaridade, outra



do 8.º e outra do 9.º. A primeira parte (figura 1) foi pensada para qualquer ciclo do ensino básico, dependendo da forma como é explorada pelo docente, e refere-se à área de um quadrado, no âmbito do desenvolvimento das capacidades transversais. A tarefa foi elaborada para ser executada em trabalho de grupo com a duração prevista de 45 minutos, divididos em dois momentos: primeiro, exploração da tarefa e segundo, apresentação oral e discussão em grande grupo das conclusões. No primeiro momento, o professor deverá assumir uma postura de orientador, permitindo que os alunos tenham tempo e liberdade para refletirem sobre o problema e descobrirem as suas próprias estratégias. No segundo momento, o docente deverá orientar a discussão, mas permitindo sempre que os alunos apresentem e expliquem as estratégias utilizadas.

Figura 1: Tarefa apresentada na oficina de formação de formadores do novo PMEB 3.º ciclo – Álgebra, proposta pela DGIDC.

1. O seguinte diálogo passou-se numa aula de matemática.

Professor: - Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado o que acontece à área?

Henrique: - Também aumenta.

Professor: - Aumenta de que forma?

Henrique: - É fácil. Se o lado duplica, a área duplica. Se o lado triplica, a área triplica ...

Matilde: - Acho que isso não é verdade!

Porque se pensarmos num quadrado em que o comprimento do lado é o dobro do outro, o espaço que fica lá dentro é maior que o dobro ....

Qual dos alunos tem razão, o Henrique ou a Matilde? Justifica o teu raciocínio.

Esperava-se, pela exploração desta tarefa, que os alunos compreendessem que a duplicação da medida do lado de um quadrado não duplica a sua área, estabelecendo uma relação entre o aumento da medida do lado e o aumento da área (por palavras, esquemas, cálculos ...), assim como a superação de algumas dificuldades a nível da expressão escrita, rigorosa e clara, e o desenvolvimento da comunicação matemática.

A tarefa foi aplicada nos três anos de escolaridade do 3.º ciclo do ensino básico, com bastante sucesso, apresentando-se alguns exemplos de raciocínios obtidos pelos alunos, salientando-se a construção de figuras, a determinação numérica da área através de exemplos concretos, o recurso a quadrados perfeitos e às noções de quadrado e de retângulo.

Figura 2: Aluno do 7.º ano de escolaridade.

Qual dos alunos tem razão, o Henrique ou a Matilde? Justifica o teu raciocínio.

Quem tem razão é a Matilde, porque se duplicar-mos o lado de um quadrado, a área vai ser aumentada ou seja vai quadruplicar.

Se aumentarmos 3 vezes o lado de um quadrado, a área vai ser aumentada 9 vezes, e se aumentarmos 4 vezes o lado de um quadrado a área vai ser aumentada 16 vezes.

Figura 3: Aluno do 7.º ano de escolaridade.

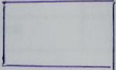
Quem tem razão é a Matilde

Porque ela diz que não se pode duplicar num só lado, porque se não fica um rectângulo.

Então ela sugeriu que para ficar quadrado tem que duplicar os quatro lados, se for triplicar tem de ser nos quatro lados para ser um quadrado, perfeito, e assim sucessivamente.

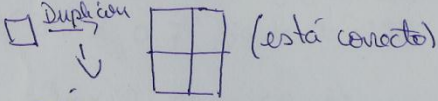
E se for num só lado a fórmula fica diferente não é  $l \times l$ , mas  $c \times l$ .

Ex: - (Henrique)



Duplicou (está incorrecto)

Ex (Matilde)



(está correcto)

a área não duplicou é 4 vezes maior

Nos baseámo-nos na resposta da Matilde.

Figura 4: Aluno do 8.º ano de escolaridade.

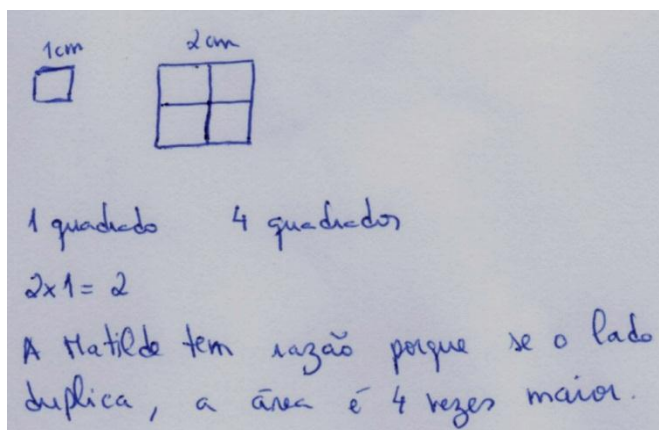


Figura 5: Aluno do 8.º ano de escolaridade.

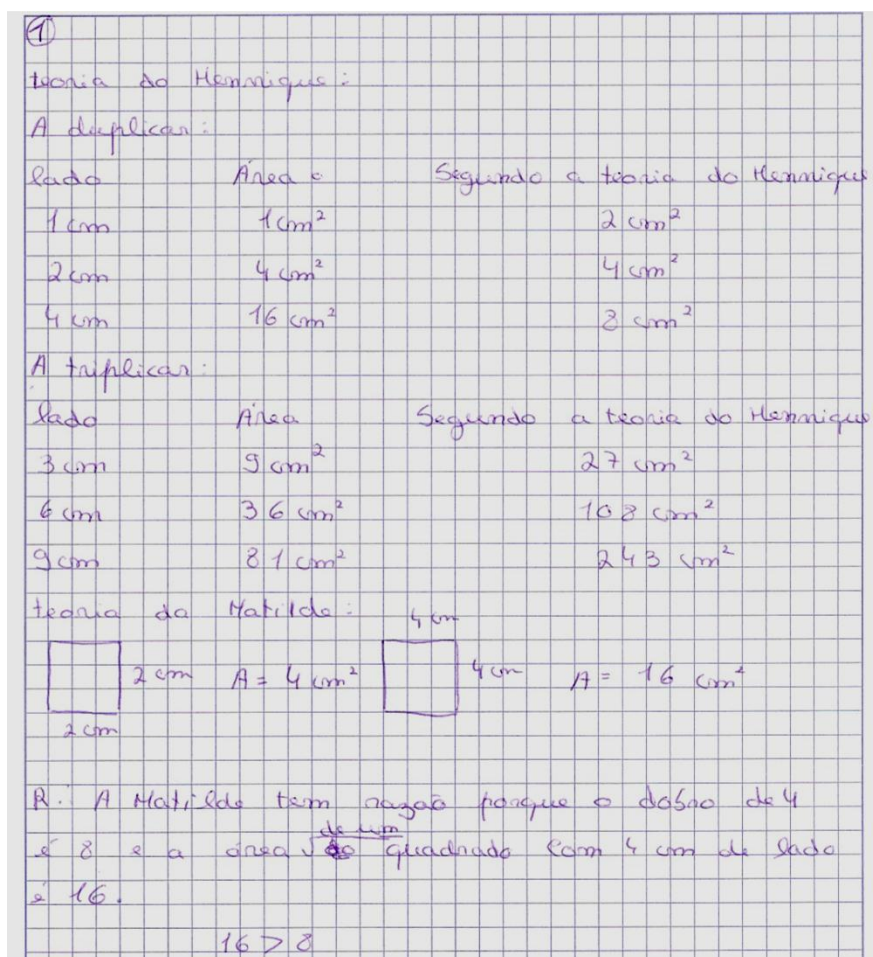


Figura 6: Aluno do 9.º ano de escolaridade.

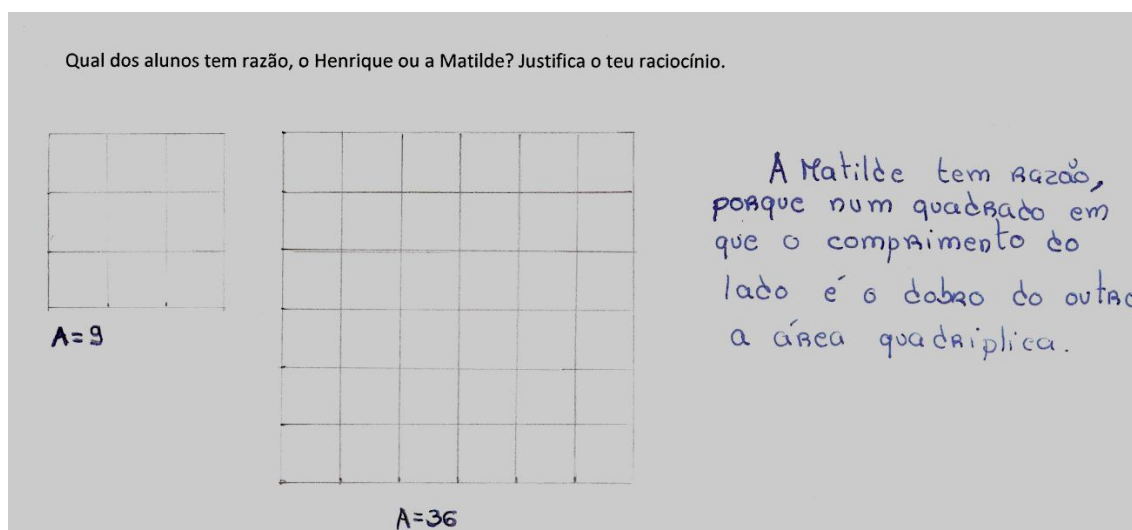
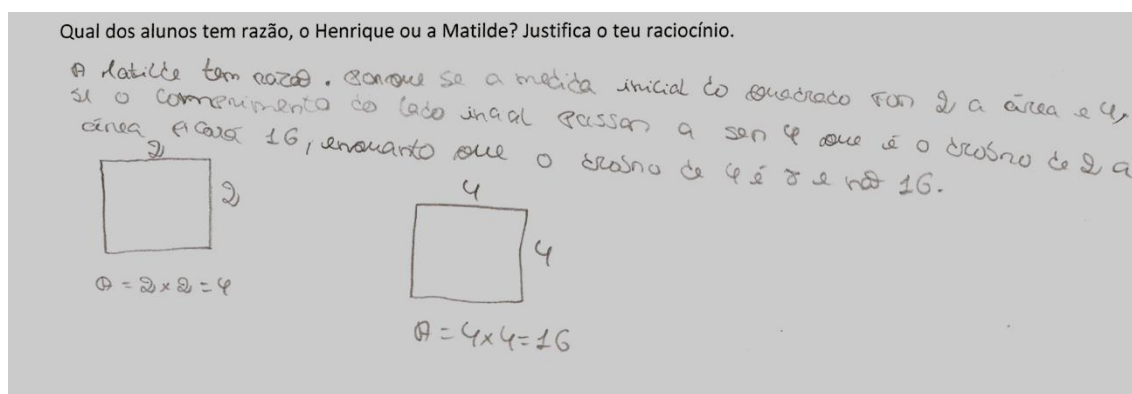


Figura 7: Aluno do 9.º ano de escolaridade.



No entanto, nenhum grupo de alunos, em qualquer dos anos de escolaridade, apresentou um raciocínio sem recurso a exemplos concretos, salientando-se o papel fundamental do professor na discussão e exploração da tarefa. A argumentação é uma parte integrante do raciocínio, essencial à construção do pensamento matemático. É durante a discussão, em plenário, que o docente tem a oportunidade de se colocar no lugar do aluno e entender as suas estratégias. Para além de procurar saber as conclusões, devidamente justificadas, a que os alunos chegaram, deve conduzir a discussão coletiva para a turma conseguir tirar implicações interessantes ainda não mencionadas. A prova matemática é um dos processos que os alunos manifestam maior dificuldade, não sentindo frequentemente a necessidade de provar uma ideia. A prova é uma sequência de ideias e de conhecimentos que visam alcançar a compreensão matemática (Hanna 2000), ou seja, é mais do que uma sequência de passos corretos. Os alunos devem saber se uma afirmação é verdadeira, mas também o motivo dessa veracidade. A prova matemática deve ser promovida pelo professor.

A segunda parte da tarefa (figura 8) foi desenhada para o 3.º ciclo do ensino básico com a duração de 45 minutos, sobre proporcionalidade direta. Neste caso, recorreu-se ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra* e dividiram-se os alunos em pares, de modo a que cada par tivesse acesso a um computador. De forma



semelhante à primeira, a segunda parte foi dividida em dois momentos: primeiro, exploração da tarefa com recurso ao *Geogebra* e segundo, apresentação oral e discussão em grande grupo das conclusões. A tarefa consistia na construção de um quadrado [ABCD] e na criação de um ponto E pela relação  $(a, 4a)$ , em que  $a$  correspondia à medida do comprimento do lado do quadrado. Depois os alunos deveriam alterar o comprimento do lado e registar os dados numa tabela, obtendo uma representação gráfica desta relação.

Figura 8: Parte da tarefa apresentada na oficina de formação de formadores do novo PMEB 3.º ciclo – Álgebra, proposta pela DGIDC.

## II Parte

### 1.

1.1. Abre o GeoGebra e, no menu Exibir, faz aparecer na janela de visualização os eixos coordenados e o quadriculado.

1.2. No quinto ícone da barra de ferramentas selecciona a opção Polígono Regular

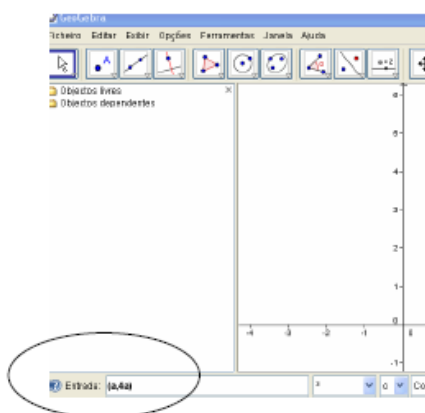
1.3. Desenha um lado, seleccionando dois vértices à tua escolha, e confirma que o número de lados do polígono regular é 4.

*O GeoGebra cria o quadrado ABCD, cujos lados são os segmentos de recta a, b, c e d.*

1.5. Dado que se trata de um quadrado, indica a relação entre a, b, c e d.

1.6. Já estudaste na primeira parte a relação entre o perímetro ( $y$ ) de um quadrado e o comprimento do seu lado ( $x$ ). Se o comprimento do lado é  $a$ , qual será o perímetro desse quadrado?

1.7. Escreve no campo de entrada  $(a, 4a)$ .



*O GeoGebra cria um ponto E (para o visualizares podes ter de utilizar o ícone  
folha do desenho )*



e arrastar a

Esperava-se, pela exploração desta tarefa, que os alunos determinassem o perímetro de polígonos regulares, identificassem e assinalassem pares ordenados no plano cartesiano, analisassem situações de proporcionalidade direta como funções do tipo  $y = kx$ , com  $k \neq 0$ , compreendessem o conceito de função como relação entre variáveis, desenvolvessem as capacidades transversais.

A tarefa foi aplicada nos três anos de escolaridade do 3.º ciclo do ensino básico. Todos os alunos estiveram envolvidos, demonstrando interesse durante a realização da tarefa, menos saliente nos alunos do 9.º ano de escolaridade, evidenciando-se ainda alguma facilidade para os alunos trabalharem com o programa de geometria



dinâmica. Das dúvidas levantadas pelos alunos, salientam-se as dificuldades sentidas na compreensão de expressões com variáveis, mais pertinente no 7.º ano de escolaridade, alguma confusão entre as noções de perímetro e área, e dificuldades em compreender o significado do ponto E. Apresenta-se um exemplo de um diálogo entre a professora (P) e um par de alunos (A e B) sobre o ponto E, assim como a resposta que este par deu à questão 2. (figura 9)

A — O ponto E onde está?

B — Aumenta o zoom.

A — Não tem nada ...

P — Já criaram o ponto E? Ah! Está aqui. (pausa) Afinal ainda não o criaram. Têm de fazer *Enter*. Já têm o ponto E.

(Os alunos ficaram calados a olhar para a professora)

P — Onde estará o ponto E? Quais são as suas coordenadas? (pausa) Ora lê aqui. Quais são as suas coordenadas?

A — 4 ... 16.

B — O ponto E está lá para cima.

P — Exatamente. Vês o que ele está a fazer.

A — Está ali! Já o vi!

P — Vamos deslocar para aqui. Com esta tecla desloca ...

(Os alunos leem a questão 2)

P — Qual é a abcissa do ponto E?

A — É 4.

P — Se a abcissa do ponto E é 4 qual terá de ser a ordenada? (pausa) Como construíram o ponto E? O que escreveram no campo de entrada?

A — (a, 4a).

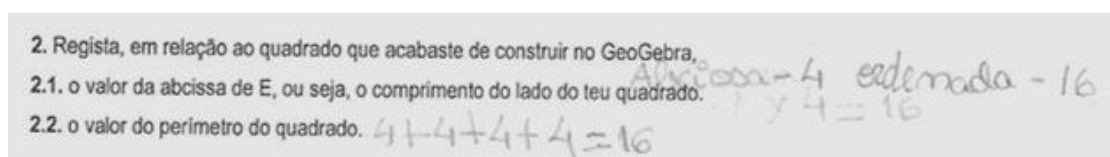
P — Se a é igual a 4 então qual é o valor da ordenada?

A — 16 porque  $4 \times 4$  é 16.

(O aluno B fica pensativo)

B — Que corresponde ao perímetro (responde euforicamente).

Figura 9: Exemplo de uma resposta dada pelos alunos.



Após a compreensão do que era o ponto E, os alunos deveriam alterar o comprimento do lado do quadrado, arrastando um dos vértices na base da construção do quadrado inicial, fazendo surgir novos quadrados e os respetivos pontos no gráfico, obtendo assim uma representação gráfica desta relação através do *Geogebra*. A forma como o ponto E foi construído permitiu que os alunos visualizassem, de uma forma dinâmica, que o gráfico que representa a relação entre as variáveis é um conjunto de pontos que se situa sobre uma reta que passa na origem do referencial, confirmado por eles ao introduzirem a expressão algébrica  $y=4x$  no campo de entrada deste *software*. A representação gráfica desta função sobrepõe-se assim aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Verificando que numa situação de

proporcionalidade direta, a função correspondente apresenta uma representação gráfica de uma reta que passa na origem do referencial.

Após os diferentes registos, os alunos deveriam refletir sobre o gráfico que tinham acabado de construir. Através desta tarefa procurou-se que os alunos reforçassem a compreensão do conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, a capacidade de utilizar a notação apropriada, representassem algebricamente situações de proporcionalidade direta, relacionassem uma função linear com a proporcionalidade direta, traduzissem relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.

Esta tarefa poderia ser resolvida sem recurso a um programa de geometria dinâmica, usando apenas papel e lápis, mas esta ferramenta educativa contribuiu para uma construção de uma visão mais dinâmica do gráfico de uma função linear, num contexto de inter-relação entre a Geometria e a Álgebra.

## 6. Discussão dos resultados

O professor deve proporcionar tarefas matemáticas apropriadas ao conhecimento dos alunos de acordo com a faixa etária, o nível de escolaridade e os pré-requisitos necessários à sua resolução, mas estas tarefas devem ser mais que simples resoluções de exercícios, devem ser desafiantes de forma a promoverem a capacidade de comunicação e argumentação dos alunos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Deste modo, na formação de formadores de Matemática, promovida pela DGIDC, os professores tiveram de elaborar tarefas matemáticas que foram analisadas e discutidas por um conjunto de especialistas na área (20 professores de Matemática do 3.º ciclo – formandos – e 2 professores de Educação Matemática do ensino superior – formadores). No entanto, apesar de importantes, não são as tarefas por si só que produzem alterações na aprendizagem dos alunos. A ação do professor de Matemática pode encorajar ou inibir os alunos a desenvolverem a comunicação matemática, fomentando ou não uma discussão rica e argumentativa dos raciocínios de cada um (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998). Deste modo, a aplicação da tarefa apresentada nesta pesquisa implicou sempre uma alternância entre a apresentação da tarefa por parte do professor, o trabalho de grupo desenvolvido pelos alunos, a apresentação oral dos raciocínios elaborados por cada grupo de alunos e a sua discussão em plenário, já com orientações específicas do professor.

A resolução de problemas é uma das capacidades transversais explícitas no PMEB, devendo ser explorada pelo professor nas suas aulas. Este processo de fazer Matemática pode ser assumido ainda como uma metodologia de ensino, contribuindo para a criação de alunos reflexivos. Esta metodologia de trabalho pode incentivar o raciocínio, a comunicação e a justificação (Boavida, 2008). Neste caso, “o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos” (Onuchic & Allevato, 2011, p. 81).

Em traços gerais, os objetivos desta formação prendiam-se com a criação de tarefas matemáticas desafiantes por parte dos professores, a sua aplicação em contexto de sala de aula segundo uma metodologia de trabalho mais centrada na exploração das ideias desenvolvidas pelos alunos, no sentido de se promoverem alterações nas práticas letivas dos docentes. O desenvolvimento profissional docente é um processo contínuo que envolve reflexão da prática. Este processo deve ser contextualizado e contribuir para o desenvolvimento das competências profissionais dos professores através das suas experiências (Marcelo, 2009). Há uma ligação forte entre o desenvolvimento profissional e a formação contínua dos professores (Bolan & McMahon, 2004; Terigi, 2007) e, neste sentido, através desta formação pretendia-se que os professores assumissem a resolução de problemas como uma metodologia. Pela criação e adaptação de diversos problemas, resolução e discussão em plenário, sua aplicação em contexto de sala de aula, reflexão da sua aplicação e propostas de melhoria, a formação visava consciencializar os professores das potencialidades da resolução de problemas e, neste caso, como estes docentes também teriam de replicar esta formação nas suas escolas, através das suas experiências, esta formação ganhava um poder de atuação nos professores muito maior que apenas os que estavam diretamente envolvidos.

O PMEB reforça a ideia de resolução de problemas associada às TIC, já que a utilização de recursos tecnológicos que favoreçam/facilitem a resolução de problemas poderá promover o pensamento matemático. Neste sentido, os professores foram induzidos a integrarem as TIC nas suas aulas. Na tarefa apresentada uma parte recorreu à exploração do *Geogebra*. O uso de programas de geometria dinâmica permite estimular a descoberta pela experiência, apresentando-se como um meio de verificação de conjeturas e de construção de contraexemplos para conjeturas falsas (De Villiers, 2003). A descoberta de forma autónoma é reforçada pelo uso destes ambientes de geometria dinâmica porque permite aos alunos que constatem um facto antes da sua demonstração (Keyton, 2003). A utilização destes *softwares* com tarefas adequadas, previamente construídas e/ou selecionadas pelos professores, encorajam os alunos a formular conjeturas, podendo constituir uma oportunidade para estes apreciarem a natureza e a finalidade da prova matemática.

## 7. Considerações finais

Os professores de Matemática devem refletir constantemente sobre a sua prática docente e, neste sentido, a formação contínua desempenha um papel de destaque. Pela partilha de experiências, abertura a novas metodologias, tornando a atividade prática compreensiva pela visualização de possibilidades e limitações dos conteúdos que são explorados em contexto de sala de aula. Através da criação de tarefas matemáticas e sua aplicação, pretendeu-se refletir sobre as capacidades transversais, tão fundamentais no PMEB, tentando promover o desenvolvimento do pensamento matemático nos alunos e simultaneamente o desenvolvimento profissional dos professores.

Apresenta-se uma reflexão sobre uma tarefa matemática criada e aplicada no âmbito da formação contínua de professores de Matemática segundo o tema Álgebra, dando bastante relevo à resolução de problemas, capacidade transversal do PMEB, e integração da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem. Trata-se de uma experiência de formação bastante rica pela partilha de experiências e criação de materiais para a sala de aula.

Espera-se que a resolução de problemas venha a incorporar a prática docente dos professores que frequentaram a formação assim como, através da replicação da formação por estes, na prática letiva de muitos outros professores.

## Referências

- Andrade, S. (1998). *Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula*. Rio Claro: IGCE, UNESP.
- Boavida, A. (Coord.), Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.
- Bolam, R., & McMahon, A. (2004). Literature, definitions and model: towards a conceptual map. In C. Day (Ed.), *International Handbook on the Continuing Professional Development of Teachers* (pp. 33-60). Berkshire: McGraw-Hill Education.
- Caldas, M. (2011). *A Integração Curricular das TIC: Estudo de Caso tomando como exemplo a Geometria no Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Braga).
- Dante, L. (2003). *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Atlas.
- Day, C. (1999). *Developing Teachers. The Challenges of Lifelong Learning*. London: Falmer Press.
- Day, C. (2007). A Liderança e o impacto do Desenvolvimento Profissional Contínuo de professores. In J. Morgado & M. Reis (Org.), *Formação e Desenvolvimento Profissional Docente: Perspectivas Europeia* (pp. 30-39). Braga: Universidade do Minho, Cadernos CIED.
- De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with geometer's sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Felício, C., & Rodrigues, M. (2010). A natureza da tarefa e os desafios da gestão curricular. In *ProfMat 2010*. Lisboa: APM.
- Fernandes, A. (2011). *As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga)
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237–273). Roterdão: Sense.

- Garcia, C. (1999). *Formação de professores – para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.
- Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: A survey. In M. Saraiva *et al.* (Eds.), *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática – IX EIEM* (pp. 75-104). Fundação: SPCESEM,
- Heideman, C. (1990). Introduction to staff development. In P. Burke *et al.* (Eds.), *Programming for staff development* (pp. 3-9). London: Falmer Press.
- Huete, J., & Bravo, J. (2006). *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.
- Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria dinâmica: selecção de textos do livro Geometry turned on!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.
- Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. *Sísifo – Revista de Ciências da Educação*, 8, 7-22. Disponível em <http://sisifo.fpce.ul.pt> (consultado a 02/02/2013).
- Mota, J. (2004). *O Geometer's Sketchpad e o ensino/aprendizagem da geometria: Um estudo em duas turmas do 9º ano de escolaridade numa escola dos Açores*. (Tese de Mestrado, Universidade dos Açores).
- NCTM (1991 [1989]). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (tradução portuguesa). Lisboa: APM & IIE.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática escolar* (tradução portuguesa). Lisboa: APM.
- Nóvoa, A. (1992). O passado e o presente dos professores. In A. Nóvoa (Org.), *Profissão Professor*. Porto: Porto Editora.
- Oliveira, H., Segurado, M. & Ponte, J. (1998). Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In *VI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 107-125). Portalegre: SPCE-SEM.
- Onuchic, L. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In M. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.
- Onuchic, L., & Allevato, N. (2011). Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, 5 (41), 73-98.
- Piteira, G. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
- Polya, G. (2003 [1945]). *Como resolver problemas* (tradução portuguesa). Lisboa: Gradiva.
- Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70.
- Ponte, J., Oliveira, H., & Varandas, J. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 159-192). Campinas: Mercado de Letras.



- Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.
- Ponte, J., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.
- Sampaio, P. (2006). *Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário: contributo da webquest "Escher e a procura do infinito"*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga)
- Sampaio, P., & Coutinho, C. (2011). Formação contínua de professores: integração das TIC. *FAED – Revista da Faculdade de Educação*, 9(15), 139-151.
- Silva, J. (Coord.), Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *MATEMÁTICA A 10.º ANO*. Lisboa: ME, DES.
- Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Terigi, F. (2007). Desarrollo profesional continuo y carrera docente en América Latina. In *Desarrollo profesional docente en América Latina*. Lima.

**Patrícia Sampaio:** Licenciada em Matemática e mestre em Tecnologia Educativa pela Universidade do Minho (Portugal). Formadora reconhecida pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua. Colaborou nos projetos de investigação CIED: “Aprendizagem, formação e investigação na Web” e “Aprender em ambientes emergentes”. Atualmente é bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia com um projeto sobre a integração da tecnologia no ensino da Matemática.

Contato:

Patrícia Sampaio

[patisampaio@gmail.com](mailto:patisampaio@gmail.com)

Av. Con de Margaride, 690

4835-073 Guimarães

Portugal

Tel: 967449703

Autor:

Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio

[patisampaio@gmail.com](mailto:patisampaio@gmail.com)

Instituto de Educação, Universidade do Minho

Bolseira da Fundação para a Ciência e Tecnologia