DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO CON APOYO DE TECNOLOGÍA

Jaime Israel García-García
jaime.garcia@ulagos.cl
Elizabeth-H. Arredondo
elizabeth.hernandez@ulagos.cl
Maximina Márquez Torres
maximina.marquez@ulagos.cl
Universidad de Los Lagos, Chile

Recibido: 15/07/2018 **Aceptado:** 25/10/2018

Resumen

El presente trabajo explora la evolución de la noción de distribución binomial B(2, ½) en 46 estudiantes de bachillerato en México, antes y después del uso de tecnología, en particular, al desarrollar actividades guiadas y de reflexión con un software educativo de estadística (Fathom). El análisis de tipo cualitativo se apoya en la taxonomía SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome*) con la que se construyen jerarquías de comprensión de esta noción, con relación a una tarea de predicción y otra de distribución de probabilidad, a saber, preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional. Dentro de los resultados obtenidos tenemos que el uso del software apoya el cambio de esta noción, antes de la exploración con la computadora ubica a gran parte de los estudiantes en el nivel uniestructural, donde se identifica que éstos recuperan información de la forma que guarda dicha distribución y de sus probabilidades teóricas, dejando de lado un elemento fundamental de pensamiento estadístico, la variabilidad. Sin embargo, mientras los estudiantes exploran con el software, la idea de la variabilidad emerge apoyada en su dinamismo, aportando en ellos la experimentación inmediata del fenómeno explorado. No obstante, siguen presentes nociones del conocimiento teórico aprendido en los cursos tradicionales de estadística.

Palabras clave: Distribución binomial, predicción, distribución, variabilidad, tecnología

DEVELOPMENT OF THE NOTION OF BINOMIAL DISTRIBUTION SUPPORTED BY TECHNOLOGY IN HIGH-SCHOOL STUDENTS

Abstract

The present work explores the evolution of the notion on binomial distribution B (2, ½) that 46 high-school students in Mexico have before and after the use of technology, especially when carrying out guided and reflection tasks using educational statistics software (Fathom). The qualitative analysis was supported by the SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) taxonomy with which the understanding hierarchies of this notion are constructed in relation with a prediction task and another one related to probability distribution (prestructural, unistructural, multistructural, and relational). Among the results obtained, we found that the use of software promotes the change of the notion. Before the exploration using the computer, many students' thinking is located at the unistructural level: students retrieve information according to the distribution and its theoretical probabilities, ignoring variability, a fundamental element of statistical thinking. However, while students explore using software, the notion of variability arises supported by its dynamism, providing students with the immediate experience of the phenomenon explored. However, the notions of theoretical knowledge learned in traditional statistics courses remain.

Key words: Binomial distribution, prediction, distribution, variability, technology

Introducción

Uno de los objetivos importantes de la educación matemática en los niveles básicos y de bachillerato es el desarrollo del razonamiento probabilístico y del pensamiento estadístico de los estudiantes (Jones, Langrall y Mooney, 2007; Chance, 2002; Wild y Pfannkuch, 1999). En este sentido, las investigaciones en didáctica de la probabilidad y la estadística se han centrado en alguno de los conceptos que forman estos campos de estudio (aleatoriedad, espacio muestral, enfoque clásico y enfoque frecuencial de probabilidad, combinatoria, distribución, entre otros) y demostrado que el conocimiento del concepto y la forma de calcularlo no garantiza la interpretación adecuada del mismo (Garfield, Hogg, Schau, y Whittinghill, 2002; Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran, 2000); no obstante, pocos estudios han tomado como punto central la distribución binomial, considerada como una de las distribuciones discretas más importantes en probabilidad, debido a que da lugar a gran número de problemas interesantes, a sus múltiples aplicaciones y a su relación con la distribución normal (García, Medina y Sánchez, 2014). Por su parte, otros autores (Doane, 2004; Wood, 2005) han abordado la importancia del uso de la tecnología, mediante simulaciones, para la interpretación de aspectos conceptuales y teóricos de probabilidad y estadística.

Problematización

La distribución binomial es el modelo de probabilidad de un gran número de experiencias aleatorias, en particular, la de lanzar dos monedas (o equivalentemente dos veces una moneda) y observar el 'número de caras' que ocurren; este caso es el más simple de la binomial, cuyos parámetros n y p son 2 y ½, respectivamente. En la enseñanza tradicional sobre la fórmula binomial se pone énfasis en el cálculo de probabilidades individuales, y no en su noción como distribución. En la actualidad, con el uso de la tecnología se pueden proponer actividades en las que el objeto sea la distribución, ya que el cálculo de probabilidades o frecuencias pueden procesarse con el software. Con este recurso, se puede considerar a la variabilidad como una relación entre lo que prevé la distribución teórica de una variable aleatoria y lo que ocurre en una serie de experimentos de esa variable, ya que estos pueden ser simulados en el ambiente computacional.

En esta investigación se plantea observar y describir la manera en que modifican los estudiantes de bachillerato su noción de la distribución binomial después de realizar actividades de simulación computacional, es decir, el desarrollo de esta noción desde sus formas más simples a las más complejas, involucrando las nociones de distribución y variabilidad. Este interés emerge de una de las once líneas de acción para el desarrollo de la noción de distribución planteadas por Pfannkuch y Reading (2006): ¿Cómo se desarrolla el razonamiento acerca de distribuciones desde sus formas o aspectos más simples a unos más complejos? Con este estudio se busca dar respuesta parcial a dicha pregunta, tomando como referencia la distribución binomial. Con base en el objetivo anterior, se establecen las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué nivel de percepción de la distribución binomial tienen los estudiantes de bachillerato frente a una situación-problema en la que esta subyace? ¿De qué manera se modifican sus nociones sobre la distribución binomial con el uso de tecnología? Para contestarnos estas interrogantes, se diseñó una situación-problema que involucra la binomial y una actividad guiada para llevarse a cabo con un software educativo de estadística (Fathom).

Para hacer un uso inteligente de la tecnología en la estadística, es conveniente detenerse a reflexionar sobre el apoyo que puede tener este recurso en la práctica educativa. Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) identifican seis aspectos en los que la tecnología computacional apoya el aprendizaje del estudiante en la estadística, a saber: 1) en la automatización de cálculos y gráficas; 2) en la exploración de los datos; 3) en la visualización de conceptos abstractos; 4) en la simulación de fenómenos aleatorios; 5) en la investigación de problemas reales; y/o 6) en proporcionar herramientas de colaboración entre estudiantes. En este sentido, la tecnología permite aumentar algunas de nuestras competencias permitiendo hacer más de lo que sin ella hacíamos, de manera más rápida y con mayor precisión; además de reorganizar y transformar las actividades de modo que propicien cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes. En nuestro estudio, el uso de la tecnología crea la posibilidad de que los estudiantes entiendan de manera profunda la noción de la distribución binomial.

Antecedentes

El contenido que se explora en este estudio es la noción de distribución binomial que abarca el de distribución y variabilidad. Jones, Langrall y Mooney (2007) señalan que el concepto de distribución se suele introducir en el currículo de probabilidad y estadística del nivel bachillerato; en particular, el concepto de distribución binomial. No obstante son escasos los trabajos de investigación didáctica que se refieren a la binomial; entre ellos podemos mencionar los de Abrahamson (2009b, 2009c) y Flores, García y Sánchez (2014) que se ubican en el nivel básico; los de Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003), Bill, Watson y Gayton (2009) y García, Medina y Sánchez (2014) en el bachillerato; y los de Alvarado y Batanero (2007), Abrahamson (2009a) y Maxara y Biehler (2010) en el nivel universitario.

En algunas investigaciones sobre el concepto de distribuciónse ha expuesto una idea fundamental en estadística, la de concebir a un conjunto de datos como un agregado y no como un conjunto de elementos aislados. Bakker y Gravemeijer (2004) sostienen que una característica esencial del análisis estadístico de datos es describir y predecir 'propiedades globales' de un conjunto de datos; se entiende por 'propiedades globales' a las propiedades que no son de un valor particular, sino que dependen de una u otra forma de todos los valores del conjunto. Sin embargo, los estudiantes tienden a concebir un conjunto de datos como una colección de valores individuales en lugar de un 'agregado' que tiene ciertas propiedades. En este sentido, deben desarrollar una noción de distribución, ya que ésta es una estructura conceptual de organización con la cual se puede concebir el agregado en lugar de sólo los valores individuales (Cobb, 1999; Petrosino, Lehrer y Schauble, 2003).

La importancia de incluir el análisis de la variabilidad en estudios de didáctica de la probabilidad y estadística fue señalada inicialmente por Green (1993). Más tarde, Shaughnessy (1997) llama a los educadores a poner atención en lo que denominan variación; observó que en la literatura de investigación didáctica sobre el aprendizaje de nociones estadísticas no había informes que dieran cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión, variación y variabilidad. La observación fue notable ya que en la perspectiva de los estadísticos la variación está en el centro de la disciplina. Por ejemplo, Moore (1990) propuso cinco ideas fundamentales de la estadística, y la variación encabeza su lista, señalando que el pensamiento estadístico es ante todo conciencia de la variabilidad. Otras referencias de trabajos didácticos relacionados con la variabilidad se pueden encontrar en Sánchez, Borim y Coutinho (2011).

Referente teórico

Una manera de describir los razonamientos de los estudiantes ha sido mediante jerarquías de razonamiento. La taxonomía SOLO (acrónimo de *Structure of the Observed Learning Outcome*) desarrollada por Biggs y Collis (1982, 1991) ha sido la base para construir jerarquías de comprensión o razonamiento en probabilidad y estadística, incluso frecuentemente se ha aplicado para el análisis o evaluación de diferentes conceptos (e.g. García-García, 2017; Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez y Opazo, 2017; García, Medina y Sánchez, 2014; Mayén, Salazar y Sánchez, 2013; Sánchez y Landín, 2011; Watson, 2006). En este trabajo se utiliza para analizar y organizar las respuestas de los estudiantes, y con ello, describir sus razonamientos frente a una tarea binomial simple.

"Esta jerarquía nos dice qué tanto el aprendizaje ha progresado hacia la pericia […] y puede por lo tanto ser utilizada para clasificar los resultados del aprendizaje dentro de cualquier modo" (Biggs y Collis, 1991, p. 64), por esta razón se le llama Taxonomía SOLO. Ésta postula cinco niveles estructurales, en función de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución por parte del estudiante: a) preestructural, se realiza la tarea pero el estudiante se distrae o se desvía con un aspecto irrelevante e inadecuado; b) uniestructural, el estudiante está enfocado en el dominio relevante y toma sólo un aspecto de la tarea para trabajar, de manera excluyente; c) multiestructural, el estudiante toma dos o más aspectos relevantes o características correctas, pero no las integra de manera adecuada; d) relacional, el estudiante integra cada aspecto con los otros de la tarea, de manera que el todo tiene una estructura coherente y significado; y e) abstracto extendido, el estudiante generaliza la estructura para tomar más y nuevas características abstractas, representando un nuevo y más alto modo de operación.

En didáctica de la probabilidad, un ejemplo importante de aplicación de la taxonomía SOLO lo constituye el trabajo de Watson (2006, p. 13), quien comenta que "es un instrumento para clasificar las respuestas de los estudiantes a alguna tarea; enfatiza lo que es observado en dichas respuestas y no en lo que el observador cree que los estudiantes pudieran haber entendido".

Método

Se utilizó como método de investigación un estudio de tipo cualitativo descriptivo e interpretativo. Éste se enfoca en analizar las respuestas de los estudiantes a preguntas sobre posibles resultados de lanzamientos de monedas que reflejan el comportamiento de la distribución binomial, y se lleva a cabo utilizando la taxonomía SOLO para observar el avance en la calidad de las respuestas definidas de acuerdo a su complejidad estructural, después de actividades de simulación con tecnología.

Participantes

Participaron 46 estudiantes (17 – 18 años) de sexto semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente, de la Universidad Nacional Autónoma de México, quienes ya habían llevado un curso de probabilidad y estadística, enfocado en estadística descriptiva y nociones básicas de probabilidad; y el profesor titular, quien aplicó la situación-problema. Los estudiantes no recibieron información alguna respecto al propósito del estudio.

Instrumentos

Se elaboró un cuestionario y una actividad guiada para trabajar con un software educativo de estadística (Fathom), a esta última denominamos simulación computacional. Cada uno de los instrumentos se elaboró con base en una situación-problema inscrita en el tema de distribución binomial, llamada "¿Quién decide?", que se expone en el Cuadro 1. Por limitaciones de espacio, en este informe sólo se expondrán y comentarán dos tareas: una de predicción, sobre el comportamiento de 1000 sorteos referentes a la variable X = 'número de caras' obtenidas en el lanzamiento de dos monedas [donde X se distribuye B(2, ½)], y otra de distribución, sobre la probabilidad de ocurrencia de cada valor de la variable X.

Cuadro 1. Situación-problema y tarea de estudio

Situación-problema: ¿Quién decide?	Tareas de estudio
Ana, Beto y Carlos juegan al lanzamiento de dos monedas para decidir qué programa de la televisión verán. Si no sale ninguna 'cara', gana Ana; si sale exactamente una 'cara', gana Beto; y si salen dos 'caras', gana Carlos. 	• Predicción: ¿Cuántas veces crees que gana Ana, Beto, y Carlos si el juego se repitiera 1000 veces? Número de veces que gana Ana: ___ Número de veces que gana Beto: ___ Número de veces que gana Carlos: ___ • Distribución: Asigna la probabilidad a cada evento: Probabilidad de que gane Ana (0 caras) = ___ Probabilidad de que gane Beto (1 cara) = ___ Probabilidad de que gane Carlos (2 caras) = ___

Es importante resaltar que las tareas de esta investigación no se enfocan el manejo adecuado del algoritmo de la distribución binomial; el espíritu del estudio es el descubrimiento de relaciones de tipo estructural que subyacen a una situación binomial por parte de los estudiantes.

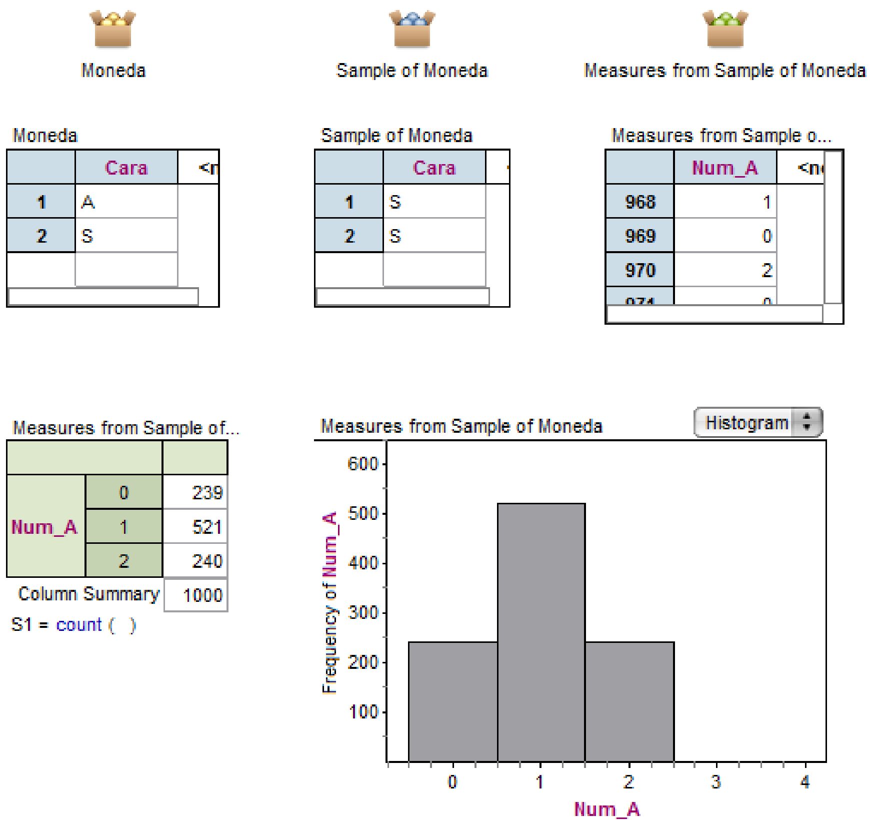
Procedimientos de aplicación

Los anteriores instrumentos se aplicaron en tres etapas, las cuales se describen a continuación.

1) Etapa previa: consistió en la aplicación del cuestionario de la situación-problema "¿Quién decide?", cuya finalidad primordial era explorar la manera de razonar de los estudiantes sobre la distribución binomial B(2, ½).

2) Etapa de simulación computacional: se aplicó la actividad de simulación computacional de la situación-problema "¿Quién decide?", cuya finalidad era que los estudiantes realizaran simulaciones del experimento utilizando el software estadístico Fathom. En parejas realizaron la actividad guiada para la elaboración de un programa en el software para simular la ocurrencia de la variable aleatoria. Inicialmente simulaban el lanzamiento de dos monedas, con el objetivo de observar los elementos del espacio muestral: {AA, AS, SA, SS}; luego, determinaban el 'número de caras' que ocurren en el lanzamiento de dos monedas, correspondientes a la variable aleatoria binomial X ~ B(2, ½); y finalmente, simulan 1000 veces el experimento. En el cuadro "Column Summary" de la Figura 1, se representan las frecuencias absolutas de cada valor, en este caso 239, 521, 240; a lado de dicho cuadro se presenta la gráfica de barras correspondiente. Los estudiantes pueden repetir el sorteo de 1000 veces la variable de manera independiente las veces que quieran con sólo apretar un par de teclas conjuntas. El software actualiza los resultados en la pantalla. Esto permite a los estudiantes investigar el comportamiento de los resultados. Pueden ver por ejemplo, que la tendencia de las ternas en la tabla "Column Summary" es que las frecuencias varían alrededor del valor esperado.

Figura 1. Pantalla del ordenador de la simulación en Fathom de 1000 lanzamientos de 2 monedas



3) Etapa posterior: se les volvió a pedir a los estudiantes que respondieran las preguntas del cuestionario; cuyo propósito era valorar el avance en la calidad de las respuestas definidas de acuerdo a su complejidad estructural, después de la actividad de simulación con tecnología.

La actividad previa y posterior se hizo en una sesión de 20 minutos cada una; mientras que la actividad de simulación computacional se realizó en una sesión de 100 minutos.

Análisis de datos

Las respuestas obtenidas se organizan de acuerdo a su complejidad estructural, bajo el supuesto de que entre mayor es ésta, mejor la calidad de la respuesta. Para hacerlo se ha tenido como guía la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991). Mediante un análisis comparativo de los datos, se identifican los elementos y/o procedimientos que emplean en su resolución; es decir, los componentes estructurales de cada tarea, los cuales se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Componentes estructurales de cada tarea de estudio

Tarea de predicción [Considere X a la variable aleatoria de la distribución binomial B(2, ½)]	Tarea de distribución
• Coherencia: la suma de las tres frecuencias es 1000. • Forma de la distribución: la frecuencia del valor X = 1 es mayor que la frecuencia de los valores X = 0 y X = 2. • Variabilidad: las frecuencias son distintas a los valores esperados; es decir, frecuencias que se presentan de manera desordenada. • Ausencia de variabilidad: las frecuencias de X = 0 y X = 2 son iguales; esto incluye la respuesta: 250, 500 y 250 (frecuencias esperadas).	• Coherencia: la suma de las probabilidades es 1 o 100%. • Patrón de la distribución teórica de probabilidad: valores adecuados con relación a la forma de la distribución (1, 2, 1). • Enfoque frecuencial: expresan probabilidades indicando que sólo son una aproximación: “alrededor de ¼, ½, ¼” o “¼, ½, ¼ aproximadamente”. • Probabilidad teórica: presentan la distribución teórica de probabilidad
Las ‘frecuencias esperadas’ son números de referencia alrededor de los cuales estarán las frecuencias reales obtenidas de la realización efectiva de los 1000 sorteos; por lo que: 250 es la frecuencia esperada de 0, 500 la frecuencia esperada de 1 y 250 la frecuencia esperada de 2.	

Con base en la identificación de tales componentes, se definen niveles crecientes de complejidad estructural aplicando el esquema expuesto en el marco conceptual. La Tabla 2 presenta los niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO, y la descripción de cada uno de ellos.

Tabla 2. Niveles jerárquicos para cada tarea del estudio

Tarea de predicción		Tarea de distribución	
Nivel	Descripción	Nivel	Descripción
Preestructural	Si una respuesta es incoherente, o bien, no cumple con las condiciones de la forma de la distribución y de la variabilidad.	Preestructural	Si la respuesta es incoherente, o bien, refieren a elementos extraños a la situación o son incomprensibles.
Uniestructural	Si satisface la condición de la forma de la distribución, pero no de variabilidad; o bien, de variabilidad, pero no de la forma de la distribución.	Uniestructural	Si la respuesta presenta conocimiento o ausencia del patrón de la distribución teórica de probabilidad.
Multiestructural	Si la respuesta satisface la forma de la distribución, pero muestran una variabilidad muy amplia.	Multiestructural	Si la respuesta satisface el enfoque frecuencial de la probabilidad.
Relacional	Si la respuesta satisface adecuadamente el patrón de distribución y la variabilidad; es decir, las frecuencias de 0, 1 y 2 caen respectivamente dentro de los rangos de 250 ± 25, 500 ± 25 y 250 ± 25.	Relacional	Si la respuesta presenta la distribución teórica de probabilidad.
Nota: Mediante una simulación estadística en Fathom, se generan 1000 valores de la variable aleatoria y se cuenta la frecuencia de cada resultado (0, 1, 2) observando sus diferencia con las frecuencias esperadas. Este proceso se repite un gran número de veces (digamos 1000 otra vez) y se observa la distribución de las diferencias. Se toma un valor en el que el 80% de las veces el intervalo, con centro la frecuencia esperada y radio el valor tomado, contenga a las frecuencias reales; por lo que consideramos adecuada una desviación de 25.			

Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos en nuestro estudio. La Tabla 3 muestra, a manera de ejemplificación, el tipo de respuestas dadas por algunos de los estudiantes en cada tarea y su clasificación en la taxonomía SOLO, seguida de una breve justificación.

Tabla 3. Ejemplificación de acuerdo a nivel de jerárquico para cada tarea del estudio

Tarea de predicción		Tarea de distribución	
Nivel / Respuesta del Estudiante	Justificación	Nivel / Respuesta del Estudiante	Justificación
Preestructural: *334, 333, 333* *Porque solo se suman las posibilidades que están solicitando*	Proporciona frecuencias que no cumple con la condición de la forma de la distribución y de la variabilidad	Preestructural: *20%, 75%, 25%* *Es más probable el que caiga una cara*	Proporciona probabilidades cuya suma no corresponde al 100%
Uniestructural: *250, 500, 250* *Al lanzar 2 monedas puede ser* *CC , CS , SC , SS* *250 500 250*	Proporciona las frecuencias esperadas para cada miembro de la familia, sin mostrar sentido de la variabilidad	Uniestructural: *20, 50, 30* *La probabilidad da en su total el número de caras*	Proporcionan números enteros cuya suma es 100, presenta conocimiento del patrón de la distribución teórica de probabilidad, sin embargo, dan valores muy alejados a la proporción (1, 2, 1)
Uniestructural: *100, 200, 700* *La frecuencia es el número de veces que cae águila*	Manifiesta percepción de la variabilidad al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados, pero no reflejan la forma de la distribución	Uniestructural: *0, 0.3333333, 0.666666* *La probabilidad se obtiene con $\#CF/\#CP$ y la suma de estas da igual a 1*	Proporciona probabilidades, pero no son proporcionales a (1, 2, 1), por lo que no cumplen con el patrón de la distribución de probabilidad
Multiestructural: *50, 550, 400* *Hay más probabilidades de que salga una cara que las demás*	Se observa la consideración tanto de la condición del patrón de distribución, como de la variabilidad, pero el estudiante no logra relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan	Multiestructural: *0.25 aprox., 0.50 aprox., 0.25 aprox. Porque hay solo aproximaciones a los resultados teóricos, pues con la experimentación van a variar.*	Proporciona las probabilidades teóricas, pero indica que sólo son una aproximación, dando indicios de un enfoque frecuencial
Relacional: *250, 500, 250* *Hay aproximadamente 250 de frecuencia para que salgan 0 caras, aproximadamente 500 de frecuencia para que salga 1 cara y aproximadamente 250 de frecuencia para que salgan 2 caras*	Proporciona las frecuencias esperadas, pero indicando que son una aproximación	Relacional: *0.25, 0.5, 0.25* *$P(X=0) = P(SS) = ¼$* *$P(X=1) = P(SC)+P(CS) = ½$* *$P(X=2) = P(CC) = ¼$*	Proporciona los valores correspondientes a la probabilidad teórica de cada evento

En la Tabla 4 se presentan las frecuencias de respuestas por cada nivel jerárquico a las tareas en cada una de las etapas del estudio, y se presentan los índices de respuestas. Éstos se calculan asignando los valores 0, 1, 2 y 3 respectivamente a cada nivel estructural (Preestructural: 0, Uniestructural: 1, etc.) y calculando la media ponderada de las frecuencias; en consecuencia, estos índice son números entre 0 y 3.

Tabla 4. Frecuencias de las respuestas de los estudiantes a las tareas de acuerdo a los niveles de razonamiento y por etapa de estudio

Etapa de estudio	Tarea de predicción						Tarea de distribución					
	Nivel jerárquico				Total	Índice de respuesta (μ)	Nivel jerárquico				Total	Índice de respuesta (μ)
	P	U	M	R			P	U	M	R		
Actividad previa	17	27	2	0	46	0.67	17	6	0	23	46	1.63
Actividad posterior	10	20	2	14	46	1.43	0	8	8	30	46	2.47

Nota: P = Preestructural, U = Uniestructural, M = Multiestructural, R = Relacional

Con respecto a la tarea de predicción, en la Tabla 4 podemos observar que en la actividad previa, 27 de 46 respuestas se ubican en el nivel uniestructural, presentan las frecuencias esperadas para cada niño (250, 500, 250), sin mostrar sentido de la variabilidad; 17 de 46 en preestructural, expresan frecuencias cuya suma es diferente de 1000 o bien, refieren a elementos extraños de la situación o son incomprensibles; y sólo 2 respuestas en multiestructural, muestra frecuencias en donde se observa la consideración de la distribución y la variabilidad, pero sin relacionarlas de manera adecuada.

Después de realizar la simulación computacional, en la actividad posterior el nivel uniestructural muestra una disminución de 7 unidades, mientras que el nivel relacional presenta un aumento considerable, con respecto a la previa, esto quiere decir que la simulación computacional facilitó a varios estudiantes a entender la forma de la distribución, pero además, que los resultados varían razonablemente de las frecuencias esperadas, cuyo argumento se encuentra acompañado de las palabras “alrededor de” o “aproximadamente”; revelando que es un problema difícil para los estudiantes poder cuantificar el rango en que pueden variar las frecuencias alrededor de las esperadas, aunque hayan tomado un curso de probabilidad y estadística.

Con relación a la segunda tarea, en la Tabla 4 observamos que en la etapa previa la mayoría de las respuestas se concentra en dos niveles: preestructural (17 de 46), prevalecen aquellas respuestas en las que los estudiantes proporcionan posibilidades con números enteros con proporciones no adecuadas o cuyos valores no suman 1 o 100%, y relacional (23 de 46), proporcionan la probabilidad teórica. En la actividad posterior, el 65% de las respuestas se concentra en el nivel relacional, y sólo 8 estudiantes proporcionan las probabilidades teóricas, pero indican que sólo son una aproximación, dando un enfoque frecuencial.

De manera sucinta, se observa un mejoramiento en el desempeño de la actividad posterior a la previa después de realizar actividades de aprendizaje con apoyo de tecnología. Los índices de respuesta para ambas tareas en la actividad posterior son más altos con relación a los de la previa; por lo tanto, conviene señalar que se puede atribuir la influencia del avance a la realización de la actividad de simulación computacional.

Conclusión y discusión

En la actividad computacional que realizaron los estudiantes no se les enseñó el concepto de distribución binomial ni se les decía cómo responder a las preguntas, sino sólo se les daban indicaciones de cómo llevar a cabo acciones con el software (Fathom) y, con lo observado, se les pedía responder las preguntas que estaban formuladas en la actividad posterior. En general, se puede concluir que en el proceso de simulación los estudiantes pueden constatar el patrón binomial y notar cómo los valores son cercanos a las frecuencias esperadas pero sin ser iguales y cómo varían en cada muestra de 1000 sorteos del experimento. Estos conocimientos, aunados a las probabilidades formales, pueden constituir la base para que desarrollen su noción sobre la distribución binomial.

La tarea 1 consistía en pedir a los estudiantes que dijeran lo que ocurriría si se repetía el experimento 1000 veces, en términos de frecuencias de 0, 1 y 2. En ambas etapas, se puede observar que el nivel que tiene mayor incidencia de respuestas es el uniestructural; una razón es que en este nivel se clasificaron las respuestas que consistieron en dar las frecuencias esperadas que formaban una parte de los tipos de respuesta que se clasificaron en dicho nivel. Esta tendencia ya había sido informada por Shaughnessy, Watson, Moritz y Reading (1999) quienes encontraron que en el problema de los dulces la mayoría de los estudiantes daban como respuesta el valor esperado y muchos de ellos respondían sin considerar la variación cuando se les decía que predijeran cada vez lo que ocurriría si se repetía el experimento 5 veces. En el presente estudio, varios estudiantes lograron percibir la variabilidad, por lo que hubo un progreso.

La tarea 2 consistía en pedir a los estudiantes que describieran la distribución de probabilidad de la situación binomial, es decir, que indicaran la probabilidad de 0.25, 0.50, 0.25, para los valores de la variable 0, 1, 2 respectivamente. Se puede observar que aparte de que el desempeño en la etapa previa fue bueno, este mejoró aún más después de la actividad de simulación computacional. Las respuestas clasificadas en preestructural pasaron de 17 a 0, mientras que las clasificadas en relacional de 23 a 30. Es notorio que los estudiantes proporcionan los valores teóricos de la distribución de probabilidad binomial, esto por la influencia de sus conocimientos previos del curso de probabilidad y estadística que habían tomado antes.

Es importante enfatizar el uso de Fathom como herramienta tecnológica de simulación de una gran cantidad resultados, proporcionando una nueva forma de representación de objetos probabilísticos, de una manera que permite a los estudiantes obtener resultados probabilísticos (declaraciones de certeza) "es muy probable que las frecuencias de 0, 1 y 2, sean alrededor de 250, 500, 250, respectivamente", resultados que serían prácticamente inaccesibles sin tal herramienta. En conclusión, el uso de la tecnología facilita un aprendizaje situado en la realidad del estudiante, propicia la realización de actividades de un nivel superior al que se realiza en ambientes tradicionales, permitiendo expresar y procesar los datos en diferentes representaciones a un mismo tiempo y, todo ello, crea y privilegia nuevos objetos de enseñanza de la estadística.

Referencias

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction, 27* (3), 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher’s lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 195-226.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 67,* 1-7.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Batanero, C., Garfield, J., Ottaviani, M. G. y Truran, J. (2000). Research in statistical education: Some priority questions. *Statistical Education Research Newsletter, 1* (2), 2-6.

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO taxonomy*. Capítulo 2 (17-31). Nueva York: Academic Press Inc.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (57-76).Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bill, A., Watson, J. y Gayton, P. (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem in three different ways. *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1* (pp. 57-64). Tasmania: MERGA.

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education, 10* (3), 1-14.

Chance, B. L., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning. *Technology Innovations in Statistics Education Journal, 1* (1), 1-24.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1* (1), 5-43.

Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. y Opazo, M. (2017). Organización de las respuestas sobre tablas estadísticas por futuras maestras de educación infantil desde la taxonomía SOLO. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 7* (2), 193-211.

Doane, D. P. (2004). Using simulation to teach distributions. *Journal of Statistics Education, 12* (1), 1-16.

Flores, B., García, J.I. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (307-316). Salamanca: SEIEM.

García, J. I., Medina, M. y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

García-García, J.I. (2017). *Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial*. Trabajo de Tesis Doctoral. Cinvestav-IPN.

Garfield, J., Hogg, B., Schau, C. y Whittinghill, D. (2002). First courses in statistical science: The status of educational reform efforts. *Journal of Statistics Education, 10* (2), 1-14.

Green, D. (1993). Data Analysis: What research do we need? En L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Introducing Data Analysis in the Schools: Who Should Teach it?* (219-239). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (909-955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Slovenia: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mayén, S.; Salazar, A. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.) *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (409- 416). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (95–137). Washington, DC: National Academy Press.

Petrosino, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical Thinking and Learning, 5* (2&3), 131-156.

Pfannkuch, M. y Reading, Ch. (2006). Reasoning about distributions: a complex process. *Statistics Education Research Journal, 5* (2), 4-9.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (533-541) Ciudad Real: SEIEM.

Sánchez, E., Borim, S., y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En Batanero, C., Burril, G., Reading, C. (Eds.*). Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A joint ICMI/IASE Study* (211-221). New York: Springer.

Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education* (6-22). Rotorua, New Zeland: MERGA.

Shaughnessy, J.M., Watson, J., Moritz, J. y Reading, C. (1999). *School mathematics students' acknowledgement of statistical variation.* Paper presented at the research pre sessions of 77th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, San Francisco.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53* (2), 113-138.

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223-248.

Wood, M. (2005). The role of simulation approaches in statistics. *Journal of Statistics Education, 13* (3), 1-11.

Autores

Jaime Israel García-García[1, 2, 3]

jaime.garcia@ulagos.cl

Elizabeth-H. Arredondo[1, 2, 3]

elizabeth.hernandez@ulagos.cl

[1]Máster en Ciencias, Especialidad Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

[2]Doctorado en Ciencias, Especialidad Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

[3]Académico del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Chile

Maximina Márquez Torres[3]

maximina.marquez@ulagos.cl

Máster en Formación e Investigación Didáctica (Didáctica de la Matemática)

Doctora en Investigación Educativa, Universidad de Alicante, España