LA TRANSICIÓN EN MATEMÁTICAS DESDE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA A LA UNIVERSIDAD: ¿ENTIENDEN LOS UNIVERSITARIOS LOS CONCEPTOS ABSTRACTOS?

Nagel, Kathrin[a] y Reiss, Kristina[b]

TUM School of Education, Technische Universität München; kathrin.nagel@tum.de, kristina.reiss@tum.de

Resumen

La transición en matemáticas desde la educación secundaria a la universidad es difícil para universitarios. Especialmente el entendimiento de conceptos abstractos, que es una de las premisas para razonar matemáticamente, causa problemas. En un estudio empírico con N=200 universitarios hemos analizados dos cuestiones: (1) ¿Cómo es la comprensión de conceptos? (2) ¿Hay diferencias de entendimiento entre los conceptos? Las probabilidades de acierto y el coeficiento de Alfa de Cronbach podrían enseñar que el conocimiento conceptual de los conceptos abstractos no es tan profundo como el de los concretos. Estos resultados muestran que la educación secundaria intenta tratar conceptos que aparentemente los estudiantes no pueden entender en profundidad, lo que haría necesario una cambio en el modo de impartir las clases en la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *transición, formación inicial del profesorado, conocimiento conceptual*

ENTENDIMIENTO DE CONCEPTOS ABSTRACTOS AL ENTRAR A LA UNIVERSIDAD

La transición e incorporación desde la educación secundaria a la universidad en matemáticas resulta difícil para muchos universitarios (Hoyles, Newman & Noss, 2001). Especialmente el razonamiento en matemáticas les causa problemas y por lo tanto es necesario analizarlo en detalle. Una premisa de razonamiento es el conocimiento conceptual (Healy & Holyes, 2000) que es el centro de esta investigación. Los conceptos nuevos de la matemática académica generalmente parecen abstractos para algunos universitarios y por eso les es más difícil entenderlos. En la literatura hay diferentes interpretaciones de la abstracción matemática. Aquí usamos la interpretación que dice que existe una dualidad entre el *proceso conceptual* y el *objeto conceptual* (Sfard, 1991). Tanto el proceso como el objeto son partes de un mismo concepto, pero lo describen desde perspectivas diferentes: el proceso conceptual describe una entidad potencial que existe cuando hay una secuencia de acciones y por eso tiene un carácter concreto. El objeto conceptual describe una entidad actual que incluye relaciones con otros objetos y es más estructural y por eso tiene un carácter más abstracto (Sfard, 1991). En esta investigación son conceptos concretos los que son entendidos desde la perspectiva del proceso conceptual y conceptos abstractos los que son entendidos desde la perspectiva del objeto conceptual. Hasta que los universitarios no entiendan los conceptos desde las dos perspectivas no podrán trabajar con éstos flexiblemente como en el caso de problemas de razonamiento.

Según Vinner (1991, p. 68) un concepto tiene dos partes: el "concept image" y el "concept definition". El "concept image" describe la estructura cognitiva que está conectada a un concepto e incluye todas sus imagénes, experiencias y modelos mentales (Tall & Vinner, 1981). El "concept definition" consiste en las palabras formales que caracterizan y describen ese concepto (Tall & Vinner, 1981). El "concept image" está conectado con el proceso conceptual, ya que ambos pueden visualizar el concepto y pueden hacerlo más palpable. Por otro lado el "concept definition" está conectado con el objeto conceptual, ya que ambos son más abstractos e incluyen las propiedades formales de un concepto. La combinación de "concept image" y "concept definition" no es fácil, especialmente para conceptos abstractos: aquí puede faltar inicialmente el “concept image” y tan sólo existir la definición formal. Una reducción del nivel de abstracción es necesaria para crear el “concept image” y combinarlo con el proceso conceptual.

En primeros niveles de la enseñanza secundaria los objetos matemáticos son concretos; por el contrario en niveles más avanzados éstos se vuelven más abstractos. Para aprobar los exámenes por lo general es necesario el uso de algoritmos conocidos, como desde la perspectiva de un proceso conceptual (Arias Tenico & Rodríguez Ramírez, 2014). Ésto se puede convertir en un problema en la universidad, ya que aquí para resolver problemas matemáticos no es suficiente un proceso conceptual. En la universidad es necesaria una profunda comprensión de conceptos ya que en caso contrario influirá negativamente en el razonamiento matemático.

Bruner (1966) propone una teoría con tres modos básicos de representación: actuante (“en-activo”), icónico y simbólico. Aquí se sugiere que el entendimiento de conceptos es más fácil si se aprende siguiendo los modos de representación en ese orden, de actuante a icónico y después a simbólico. Es decir, en general es más fácil para un estudiante explorar un concepto activamente con sus manos que aprenderlo al principio sólo con imágenes. Cuando está familiarizado con un concepto, puede seguir con el modo icónico: en este nivel el concepto está representado con imágenes y es un poco más abstracto. Después puede entenderlo a nivel simbólico, donde el símbolo representante podría incluso no ser similar al concepto.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y HIPÓTESIS

Hasta ahora no existen muchos estudios que traten el conocimiento conceptual de universitarios. Resultados de estudios con estudiantes de los primeros niveles de enseñanza secundaria demuestran que ellos no entienden los conceptos profundamente (Healy & Hoyles, 2000). Pero al llegar a la universidad los estudiantes pueden haber adquirido durante los niveles mas altos de la enseñanza secundaria un nivel más profundo de comprensión que les hace posible poder combinar el proceso conceptual con el objecto conceptual y comprender mejor los conceptos. Por eso nos interesa (1) ¿cómo es la comprensión de conceptos de los universitarios?

Además creemos que los conceptos abstractos, no son tan bien entendidos como los conceptos concretos, porque es más difícil crear y combinar “concept image” y “concept definition”. Por eso nos interesa también la cuestión: (2) ¿Hay algunas diferencias en el entendimiento de los conceptos?

METODOLOGÍA: ESTUDIO EMPÍRICO DE UNIVERSITARIOS

Fue realizado un estudio en el marco de una tésis de un doctorado. Éste estudio contiene conceptos de la enseñanza secundaria, que son partes del curriculum obligatorio. Por lo tanto todos los participantes teoréticamente pueden resolver los ítems.

PARTICIPANTES

En el estudio participaron 200 universitarios del primer semestre (76 femininos) de los estudios de matemáticas y educación matemática de dos universidades en Alemania, donde los cursos eran los mismos para ambos estudios. Los universitarios tienen un título escolar equiparable, que habilita para estudiar en las universidades alemanas. La media de su edad fue de 19.7 años (*DT*=2.46) y su nota media en la enseñanza secundaria fue de 2.0 (*DT*=0.62), que es un poco más alto que la media alemana general. En Alemania las notas se imparten desde 6 hasta 1, siendo 1.0 la mejor nota.

DISEÑO E ITEMS

El estudio transversal consistió en una prueba de aptitud y tuvo cinco ejercicios. Cada uno de éstos a su vez con cuatro ítems conectados con cuatro conceptos matemáticos de geometría: mediatriz, triángulo isósceles, vector/representante y dependencia lineal.

Los dos primeros conceptos (mediatriz, triángulo isósceles) provienen de los primeros niveles de la enseñanza secundaria. A estos niveles los estudiantes tratan los conceptos de una forma práctica por medio de ejercicios y ejemplos. Es decir domina el proceso conceptual y por eso los podemos denominar “concretos”.

Los dos otros conceptos (vector/representante, dependencia lineal) se tratan en los niveles posteriores de la enseñanza secundaria, donde se introducen ya definiciones formales. Es decir en este caso domina el objeto conceptual y por eso los podemos denominar conceptos “abstractos”.
Los primeros tres ejercicios (E1, E2, E3) del estudio transversal miden el conocimiento conceptual (señalar un ejemplo, delimitar con referencia otros conceptos, conocer propiedades). Si un universitario resuelve un ítem correcto, recibe un punto; en caso contrario no recibe puntos. Los otros ejercicios siguientes (E4 y E5) analizan el razonamiento matemático (señalar un ejemplo de un teorema conocido, justificar una teorema conocido).

A causa de restricciones de tiempo (30 min) se eligió un diseño rotatorio: cada universitario resolvió sólo tres de cuatro ítems de cada ejercicio. De esta forma los ítems de mediatriz fueron trabajados por 156 universitarios, los del tríangulo isósceles por 135, los del vector/representante por 155 y los de la dependencia lineal por 154. Los ejercicios E1, E3 y E4 constaron de preguntas de elección múltiple (con cuatro o séis respuestas posibles). Los ejercicios E2 y E5 eran abiertos. El análisis de los resultados aún no ha concluido, por eso aquí sólo presentaremos resultados de los ejercicios: E1, E2 y E3.

Tabla 5. Ejercicios E1, E2 y E3 del estudio

Ejercicios	*E1*	*E2*	*E3*
Definición	Elige el ejemplo o los ejemplos correcto(s) que simboliza(n) el concepto buscado.	Explica porque el ejemplo dado no representa el concepto buscado.	Elige la respuesta o las respuestas correcta(s), que se refiere(n) a las propiedades del concepto buscado.
Ejercicios parciales	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal	a. Mediatriz b. Triángulo isósceles c. Vector/representante d. Dependencia lineal

Ejemplo del ejercicio E3a véase figura 1.

Elige la respuesta o las respuestas correcta(s), que se refiere(n) a las propiedades de ...

a) mediatrices de un triángulo:

□ Siempre son ejes de simetría del triángulo.
□ Siempre dividen el triángulo en dos triángulos de igual área.
□ Siempre biseccionan los ángulos opuestos.
□ Siempre forman un ángulo recto con los lados del triángulo.
□ Siempre biseccionan los lados del triángulo.
□ Siempre pasan por un vértice del triángulo.

Figura 18. Ejemplo del ejercicio E3

RESULTADOS PRELIMINARES

Cada uno de estos conceptos fue analizado con diferentes procedimientos que arrojan interesantes resultados: las frecuencias de acierto son altas en los ejercicios de conceptos concretos (74.4%) y más bajas en los de abstractos (44.8%). Véase figura 2 con los resultados completos.

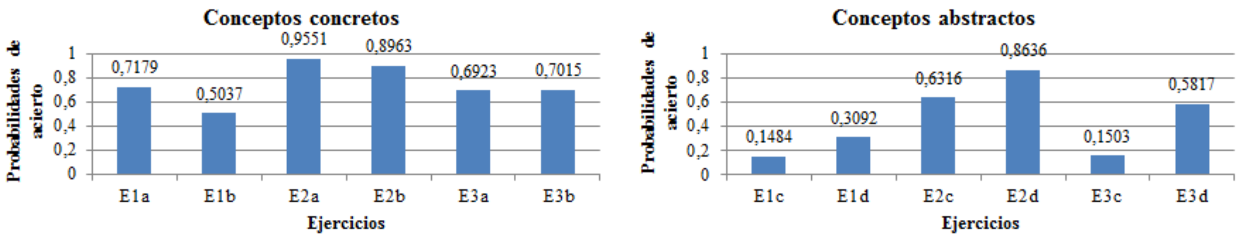

Figura 19. Frecuencias de acierto de los ejercicios de conceptos concretos y abstractos

La prueba U de Mann-Whitney confirma así mismo una diferencia entre las frecuencias de acierto de los conceptos concretos y abstractos (p=.065).

Especialmente el ejericio E2 fue fácil para los universitarios. Por el contrario en los ejercicios E1 y E3 el resultado fue bueno en el caso de conceptos concretos y peor en el de conceptos abstractos. Las probilidades de acierto en los ejercicios parciales E1c y E3c fueron incluso menos del 16%. El Alfa de Cronbach señala que la fiabilidad de las cuatro escalas en los tres ejercicios para el análisis de conceptos concretos (α=.61, α =.51) es aceptable, sin embargo no lo es en las de los conceptos abstractos (α =.38, α =.17), véase tabla 2.

Tabla 6. Resultado de Alfa de Cronbach (α) de las escalas de conceptos concretos y abstractos

		α
Conceptos concretos	Mediatriz	0.61
	Triángulo isósceles	0.51
Conceptos abstractos	Vector/representante	0.38
	Dependencia lineal	0.17

DISCUSIÓN

Los resultados preliminares corroboran que en general los universitarios disponen de una profunda comprensión de conceptos concretos, donde la probabilidad de acierto fue superior al 0.50 en todos los ítems y tienen problemas con los ejercicios de los conceptos abstractos, especialmente con E1c, E1d y E3c, donde la probabilidad de acierto fue menor al 0.31. La diferencia de probabilidades de acierto entre los ítems de conceptos concretos y abstractos no fue singnificativa, pero todavía visible. Los resultados de los ejercicios E1c y E1d muestran que los universitarios no estuvieron seguros de que ejemplos representaban los conceptos vector/representante o dependencia lineal de vectores dados. La respuesta del ejercicio E3 no sólo contenía propiedades necesarias para la definición del concepto preguntado sino también propiedades relacionadas con otros conceptos. Por eso para la respuesta de este ejercicio se necesita un mayor nivel de conocimiento conceptual.

Aparentemente los universitarios tienen un déficit en los conocimientos conceptuales de éstos conceptos. La probabilidad de acierto del ejercicio E2 fue más alta, también para los conceptos abstractos (más del 0.63). Ésto muestra que los universitarios ya poseen un conocimiento conceptual básico de los conceptos.
Los diferentes resultados de los ejercicios E1, E2 y E3 podrían ser causa del diseño: E1 y E3 son ejercicios de elección múltiple y por ello más difícil de resolver correctamente ya que las respuestas posibles contienen también representaciones falsas de los conceptos.
Para resolver los ejercicios E1 y E3 es necesario un conocimiento conceptual profundo. Aparentemente los universitarios poseen un conocimiento profundo de conceptos concretos, aúnque el objeto conceptual de estos conceptos no se implemente explicítamente en la enseñanza secundaria. Parece que los universitarios desarrollan su conocimiento conceptual de los conceptos mediatriz y triángulo isósceles durante la escuela, aúnque inicialmente sólo se trabajen de una forma visual. Este resultado podría señalar que sería mejor indcluir conceptos (también los abstractos) de perspectiva del proceso y con aplicaciones, también en sentido de Bruner en los niveles altos de la enseñanza secundaria.
El coeficiente del Alfa de Cronbach disminuye con los conceptos abstractos. Generalmente hay que ser cauteloso con estos resultados, porque las escalas de los coeficientes del Alfa de Cronbach sólo constan de tres ítems. Sin embargo los resultados podrían indicar que los tres ítems (E1c, E2c, E3c respectivamente E1d, E2d, E3d) no miden lo mismo y la fiabilidad entre ellos es baja. Una explicación posible es que los universitarios no tengan la misma comprensión de conceptos que los que eligieron los ítems para el estudio. Los universitarios aparentemente no tienen un conocimiento conceptual profundo suficiente sobre los ítems del estudio.
Para mejorar el conocimiento conceptual de universitarios y estudiantes sería suficiente introducir conceptos nuevos (concretos y abstractos) desde la perspectiva del proceso. Universitarios y estudiantes deberían trabajar con éstos activamente y la estructura más abstracta de estos conceptos debería de introducirse más tarde. En los primeros niveles de la enseñanza secundaria el contenido ya está implementado de una forma intuitiva. Esta forma intuitiva debería de introducirse tambien en niveles altos de la enseñanza secundaria y/o en la universidad. De otra forma resultará dificil llegar a conocimientos nuevos si no se dominan los básicos.

Referencias

Arias Tenico, F., & Rodríguez Ramírez, K. (2014). Formación matemática en la educación secundaria desde la perspectiva de los estudiantes que inician estudios en la Universidad de Costa Rica. Paradigma, 35(2), 129-154.

Bruner, J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Harvard University Press.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 396–428.

Hoyles, C., Newman, K., & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(6), 829-845.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics. 12(2), 151-169.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.