REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 115-133

Dinamización Matemática:

Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática

Julio Cesar Barreto García

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 7/06/2013

Resumen	En este artículo deduciremos geométricamente los productos notables que se construyen y se visualizan en el espacio tridimensional, los cuales generan un volumen por integración o suma de diversas áreas de figuras geométricas planas, formando un sólido en el espacio. Esto se realiza partiendo de conceptos y proposiciones de la geometría plana, en donde se parten de figuras geométricas básicas como son algunos polígonos regulares o irregulares. Dentro de estos productos notables deduciremos el cuatrinomio cubo perfecto que se genera del cubo de una suma y de una diferencia de un binomio, además deduciremos geométricamente los productos notables que generan la suma y la diferencia de cubos. **Palabras clave**: Espacio Tridimensional, Volumen, Productos Notables.
Abstract	In this article we will deduct geometrically the notable products that are built and displayed in three-dimensional space, which generate a volume by integration or sum of several areas of plane geometric figures, forming a solid in space. This is done using concepts and propositions of plane geometry, where you start from basic shapes like some regular or irregular polygons. Within these notables products will be deducted the cuatrinomio cube perfecto that is generated from sum and a difference the cube to a binomio, and also geometrically will be deducted the notables products that generate the sum and difference of cubes. **Keywords**: Tri-dimensional space, volume, Notable Products.
Resumo	Neste artigo iremos deduzir geometricamente os produtos notáveis que são construídos e exibidos em um espaço tridimensional, que geram um volume por integração ou soma de diversas áreas de figuras geométricas planas e formar um sólido no espaço. Isso é feito usando conceitos e proposições de geometria plana, onde você começa a partir de formas básicas como alguns polígonos regulares ou irregulares. Dentro destes produtos notáveis será deduzir o cuatrinomio cubo perfeito que é gerado a partir de soma e uma diferença o cubo para um binomio e geometricamente será deduzir o produto notável da soma e da diferença de binomios cubos. **Palavras-chave:** Espaço tridimensional, o volume, os produtos notáveis.

1. Introducción

El desarrollo de las acciones cognitivas también llamada *procesos cognitivos* dadas en el campo de la *Didáctica de la Matemática,* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de sólidos en función de la idea de volúmenes y les permitirá deducir geométricamente alguno de los productos notables que se originan al desarrollar, por ejemplo, la factorización del cubo de una suma o de una diferencia de un binomio que nos genera un cuatrinomio cubo perfecto, el cual es el cubo del primero más (o menos) el triple producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más (o menos) el cubo del segundo, así mismo deduciremos geométricamente los productos notables de la suma y de la diferencia de cubos.

Los *procesos cognitivos* se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por (Duval, 1998) y desarrollados por (Torregrosa y Quesada, 2007), en donde la *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración geométrica y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, tomando en consideración la idea de volumen que encierran las diferentes figuras geométricas solidas involucradas en el espacio tridimensional. La coordinación de estos *procesos cognitivos* permitirá a nuestros estudiantes *construir* desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables que estén en el espacio que involucran sólidos, tomando en cuenta lo propuesto por (Duval, 1998) que restringe el concepto de *visualización* al de *aprehensión* en el cual "*Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar*" según el Diccionario de la RAE (Real Academia Española, 2001).

En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo una *aprehensión operativa de reconfiguración* o una *aprehensión operativa de cambio figural* y después de acuerdo con un *razonamiento discursivo como un proceso natural* (El cual es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación), logran que ellos lleguen a las conclusiones que se pueden usar para deducir otras proposiciones o teoremas que les permitan desarrollar toda la teoría. Esto se puede lograr usando figuras o sólidos construidas en cartulinas de colores que nuestros estudiantes puedan además de construir también manipular.

2. Marco teórico

En (Barreto, 2008b, 2009a, 2009b) se dedujo el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de la suma de dos cantidades, el cual puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos usando los siguientes pasos: Se construyen dos cuadrados, uno de a unidades de lado y otro de b unidades de lado, además de dos rectángulos congruentes que tengan de largo a y ancho b unidades, como veremos en la siguiente figura 1:

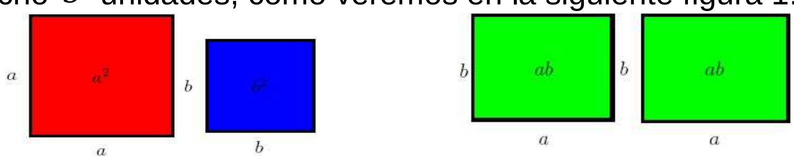
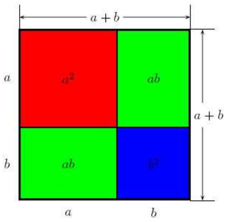


Figura 1. Acepción geométrica de las figuras para deducir el producto notable que se origina de la factorización cuadrado de la suma de dos cantidades.

Uniendo estas cuatro figuras, de acuerdo con una *aprehensión operativa de reconfiguración*[1], formamos un cuadrado de lado ($a+b$) unidades, según la figura:



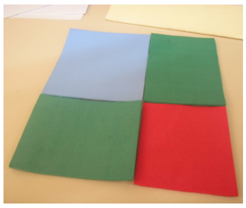


Figura 2. A izquierda vemos la acepción geométrica del producto notable que se genera del desarrollo de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio con los polígonos de figura 1 y a la derecha se muestra una foto[2] realizada con figuras en foami.

El área de este cuadrado es $(a+b).(a+b)=(a+b)^2$, como puede verse en la figura 2, el área está formada por un cuadrado rojo de área a^2, un cuadrado azul de área b^2, y dos rectángulos verdes de área ab cada uno o sea $2ab$. (Los rectángulos son *conjuntos elementales*[3]). Luego, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*[4] se cumple que: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$.

<u>Conclusión:</u> Elevar una suma de un binomio al cuadrado o a una potencia dos desde un punto de vista geométrico, significa sumar dos cuadrados que tienen la longitud de cada uno de los términos del binomio más dos rectángulos que tienen por longitud los lados del binomio. Veamos durante el desarrollo de este artículo, con ayuda de quien y hasta qué punto se generaliza esto a potencia de orden n.

<u>Nota Histórica (El Gnomon):</u> Los griegos antiguos usaron el "gnomon", el cual es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño. Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general. Aristóteles decía que el gnomon es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma según se ve en la figura 2 a la izquierda, para deducir el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, donde tenemos que los rectángulos verdes y el cuadrado rojo dado algebraicamente por: $ab+ab+a^2=2ab+a^2$ es la parte llamada gnomon.

Ahora, usaremos un gnomon para deducir el desarrollo de la suma de un trinomio al cuadrado como el siguiente $(x+a+b)^2$, haciendo una configuración como en la figura 3:

---

[1] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según el Diccionario de la Real Academia Española.

[2] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.

[3] El área de un conjunto elemental es aditiva (Axioma).

[4] Esta permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples de la aprehensión operativa de cambio figural (Es cuando se añaden, o quitan, a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones). Conduce a la solución de un problema.

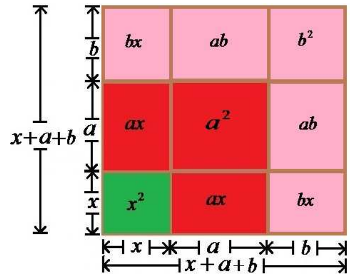


Figura 3: Acepción geométrica para el cuadrado de una suma al tener un trinomio. En esta configuración le agregamos a la Figura 2 un gnomon rosado y notamos que efectivamente como decía Aristóteles se sigue formando un cuadrado aún más grande.

De acuerdo con la configuración geométrica de la figura 3 cambiando de un *anclaje visual al anclaje discursivo*[5] , tenemos que desarrollando la factorización obtenemos el producto que por su forma particular se denomina notable:

$$\begin{aligned}(x+a+b)^2 &= x^2+ax+ax+a^2+bx+bx+ab+ab+b^2\\ &= x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Es decir, geométricamente ocurre que para calcular el trinomio de una suma al cuadrado se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de los productos de cada posible par de términos. O bien, se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de la suma de los productos de cada posible par de términos como veremos en la siguiente ecuación:

$$(x+a+b)^2 = x^2+a^2+b^2+2(ax+bx+ab) \qquad (2).$$

Ejercicio**:** Hallar el desarrollo de $(2u+3v+5w)^2$.

Respuesta**:** Haciendo $x = 2u,$ $a = 3v$ y $b = 5w,$ de acuerdo con la ecuación (2) nos queda: $(2u+3v+5w)^2 = 4u^2+9v^2+25w^2+12uv+20uw+30vw.$

Nota**:** En general para elevar cualquier polinomio al cuadrado, como por ejemplo el trinomio al cuadrado $(x+a+b)^2$, según la figura 3 donde se cumple que: $(x+a+b)^2 = x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2,$ tenemos que la parte $2ax+a^2+2bx+2ab+b^2$ es la que efectivamente corresponde al gnomon en el plano.

Ahora usando los cuadrados rojos y azul, junto a los rectángulos verdes, teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración* podemos ver geométricamente el cuadrado de la diferencia de de dos cantidades en la figura 4:

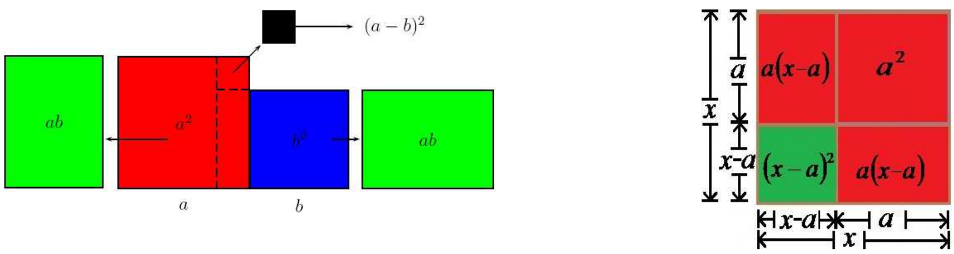


Figura 4: Dos perspectivas geométricas del cuadrado de una diferencia de un binomio. En ambas se nota que aparece lo que denominamos como un gnomon en el plano.

[5] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

Y notemos que, el área de este cuadrado es $(a-b)(a-b)=(a-b)^2$, y como puede verse en la figura anterior, el área está formada por un cuadrado rojo de área a^2, un cuadrado azul de área b^2 y le quitamos dos rectángulos verdes de área ab cada uno o sea $2ab$. Luego, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (3).$$

¿Qué conclusión se obtiene de este producto notable que se obtiene de desarrollar la factorización, con respecto al gnomon en función de lo discutido anteriormente?

Ejercicios propuestos:

a) Generalizar geométricamente usando gnómones: $(x+a+b+c+\cdots+z)^2$.

b) Hacer configuraciones geométricas para los casos: $(x-a+b)^2$ y $(x+a-b)^2$.

Veamos si también se puede generalizar este producto notable que se genera de esa factorización de una suma y de una diferencia de un binomio a una potencia de orden n.

Antes que todo debemos tomar en cuenta que estamos en el plano o en dos dimensiones, ahora bien si colocamos la potencia 3 o al cubo tenemos la tercera dimensión o el espacio tridimensional y por tanto en vez de áreas tenemos son volúmenes de sólidos. Así, debemos pasar a la geometría del espacio, geometría espacial o geometría de los cuerpos sólidos la cual es la rama de la geometría que se encarga del estudio de las figuras geométricas voluminosas que ocupan un lugar en el espacio. Esta geometría amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas.

3. Volúmenes de sólidos

La teoría de áreas de figuras geométricas planas parte de las siguientes definiciones y propiedades dadas en el siguiente orden según (Barreto, 2008a):

Definición 1 (Línea Poligonal): Es la figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común. Veamos los segmentos A, B y C no alineados de la siguiente figura:

Figura 5. Línea poligonal.

Si cada vértice pertenece a dos lados, entonces la poligonal se llama cerrada.

Definición 2 (Polígono): Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Esta figura es compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos.

Y podemos definir una figura geométrica muy importante en toda la teoría:

Definición 3 (Cuadrilátero): Es un polígono de cuatro lados. Por consiguiente, el cuadrilátero posee también cuatro ángulos interiores, formado por cada dos lados consecutivos. Además, los vértices son la intersección de cada dos lados y llamaremos vértices opuestos a aquellos que no están situados sobre el mismo lado. La diagonal de un cuadrilátero son los segmentos determinados por cada dos vértices opuestos. Son llamados cuadrángulos, o sea polígonos de cuatro ángulos.

Definición 4 (Paralelogramo): Es un tipo especial de los cuadriláteros, es decir, un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos.

Partiendo del cálculo de áreas se puede desarrollar a priori la idea de Medida, usando hechos primitivos conocidos por los griegos, tales como lo eran:

i) El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab.

ii) El área de un rectángulo es invariante por traslación.

En donde el rectángulo en cuestión se muestra en la siguiente figura:

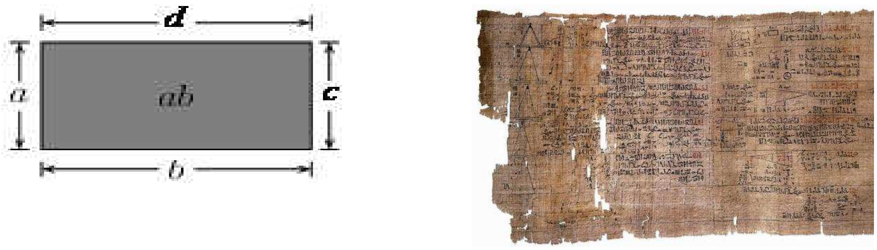


Figura 6. A la izquierda vemos un rectángulo de lados a = b y b=d, a la derecha vemos un papiro, llamado papiro de Rhind, donde hacen referencia al rectángulo.

Nota Histórica: En la figura anterior, a la derecha vemos un papiro, llamado papiro de Rhind (manual de cálculo del escribiente Ahmès) que tiene fecha de 1700 a 2000 años antes de J.C. aquí el área de un cuadrilátero de lados a, b, c y d era dada por la ecuación $\frac{(a+c)}{2} \bullet \frac{(d+b)}{2}$. Como ejercicio se pueden hacer los cálculos correspondientes y llegar a concluir que lo mostrado por los Griegos es equivalente a decir que el área es: $A_R = ab.$

Demos ahora la siguiente definición que nos permitirá deducir toda la teoría:

Definición 5 (Conjunto Elemental): Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental. Como veremos en la siguiente figura:

Figura 7. Conjunto elemental expresado como unión de un rectángulo y un triángulo. A la figura elemental la separamos en estas figuras, dividiéndolas en dos o más figuras planas cortándolas mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*[6].

Acá se cumple el Axioma 1, que es de aditividad para figuras planas:

Axioma[7] 1: El área de un conjunto elemental es aditiva.

[6] Es cuando se añaden (o se le quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones. Esta aprehensión brinda a la visión su poder heurístico en la solución de un problema.

[7] Son las afirmaciones que se aceptan sin ser demostradas. Estos se consideran “afirmaciones evidentes”.

Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales tal que A intersectado con B es vació, un punto o un segmento, entonces el área de A unión B es igual a la suma del área de A más el área de B.

Además a partir de lo anterior podemos deducir el área de un cuadrado que es un paralelogramo rectángulo de iguales lados, como lo veremos en la siguiente figura:

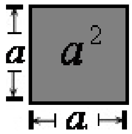


Figura 8. De acuerdo a los hechos primitivos anteriores tenemos que el área del cuadrado es igual al producto de sus lados y entonces su área se halla elevando este lado al cuadrado o la potencia dos.

Siguiendo este orden de ideas podemos estructurar en el espacio tridimensional toda la teoría de la siguiente manera:

<u>Definición 6</u> (Poliedro): Es un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito, de acuerdo con el sentido dado por la geometría clásica, que es la rema de la geometría que se basa en los Elementos de Euclides.

<u>Notas</u>:

- La palabra poliedro proviene del griego clásico πολύεδρον (*polyedron*), de la raíz πολύς (*polys*), "muchas" y de έδρα (*edra*), "base", "asiento", "cara".
- Los poliedros se conciben como cuerpos tridimensionales, pero hay *semejantes topológicos* del concepto en cualquier dimensión. Así, el punto o vértice es el semejante topológico del poliedro en cero dimensiones, una arista o segmento lo es en 1 dimensión, el polígono para 2 dimensiones; y el polícoro el de cuatro dimensiones. Todas estas formas son conocidas como politopos, por lo que podemos definir un poliedro como un *polítopo tridimensional.* Los poliedros son denominados de acuerdo a su número de caras. Su designación se basa en el Griego clásico, por ejemplo tetraedro (4-caras), pentaedro (5), hexaedro (6), heptaedro (7),…, icosaedro (20), etc.

<u>Definición 7</u> (Paralelepípedo): Es un poliedro de seis caras (al cual se le llama también hexaedro), en el que todas las caras son paralelogramos, paralelas e iguales dos a dos. El nombre proviene del latín *parallelepipĕdum*, y este del griego antiguo παραλληλεπίπεδον *parallēlepípedon* 'planos paralelos'. Un paralelepípedo tiene 12 aristas, que son iguales y paralelas en grupos de cuatro, y 8 vértices. Se pueden dar tres definiciones equivalentes de un paralelepípedo:

- Es un poliedro de seis caras (hexaedro), cada una de las cuales es un paralelogramo.
- Es un hexaedro con tres pares de caras paralelas.
- Es un prisma cuya base es un paralelogramo.

El paralelepípedo pertenece al grupo de los prismatoides, aquellos poliedros en los que todos los vértices se encuentran contenidos en dos planos paralelos. De acuerdo con la última definición equivalente, podemos definir lo siguiente:

Definición 8 (Prisma): Es un poliedro que consta además de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos. Las caras de un prisma no son todas semejantes a las otras.

En el caso en que las caras laterales sean rectangulares, se llama prisma rectangular. El *prisma rectangular* o *cuboide*, y el *prisma octagonal* se encuentran entre los tipos de prisma recto, con una base rectangular y octagonal, respectivamente. El volumen de un prisma recto es el producto del área de una de las bases por la distancia entre ellas (llamada altura), esto es: $V = A_{\text{base}} \bullet h.$

Tipos de paralelepípedos: Un paralelepípedo recto es aquel que tiene al menos alguna de sus aristas perpendicular a un par de caras. El paralelepípedo recto es a su vez un prisma cuyas bases son paralelogramos. Mientras que un paralelepípedo oblicuo es aquel en el que ninguna de las aristas es perpendicular a las caras.

Definición 9 (Ortoedro): Es un paralelepípedo en el que todas sus bases son rectángulos, y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre sí. Como caso particular tenemos el paralelepípedo recto, y lo podemos ver en la Figura 9:

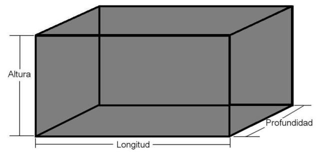


Figura 9. Un ortoedro en donde notamos que la base es un rectángulo.

Se puede calcular el volumen del ortoedro al igual que el de cualquier paralelepípedo, multiplicando el área de la base por la altura. Siendo el área de la base $A_{\text{base}} = ab$ y la altura $h = c,$ y de aquí tenemos su volumen: $V_O = abc.$

Definición 10 (Hexaedro regular): Es un paralelepípedo en el que todas sus bases son cuadrados. Más precisamente llamado cubo. Demos ahora la definición:

Definición 11 (Cubo): Es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes.

Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base. Frecuentemente un poliedro se cualifica por una descripción del tipo de caras presentes en él. Si todas sus caras son iguales se les denomina poliedro regular cuando es de caras regulares, de caras uniformes de vértices uniformes y de aristas uniformes. Así, el cubo es un hexaedro regular.

Nota Histórica (Sólidos Platónicos o Sólidos Pitagóricos): El cubo es uno de los llamados sólidos platónicos, los cuales son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras. Reciben este nombre en honor al filósofo griego Platón (*ca*. 427 adC– 347 adC), a quien se atribuye haberlos estudiado en primera instancia. También se conocen como cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos, poliedros de Platón o, con más precisión, poliedros regulares convexos. Los sólidos platónicos son además del cubo (o hexaedro regular) el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Esta lista es exhaustiva, ya que es imposible construir otro sólido diferente de los anteriores que cumpla todas las propiedades exigidas, es decir, convexidad y regularidad. Veamos un hexaedro regular o cubo:

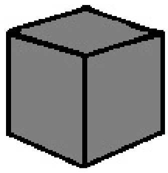


Figura 10. Un hexaedro regular o cubo, la base es un cuadrado de lado *l* y en general todos sus lados son cuadrados.

Se puede calcular el volumen del hexaedro regular o cubo al igual que el de cualquier paralelepípedo, multiplicando el área de la base por la altura. Siendo el área de la base $A_{\text{base}} = l^2$ y la altura l, entonces tenemos que: $V_C = l^2 \bullet l = l^3$.

4. Binomio de la suma y de la diferencia de dos cantidades al cubo

El cubo de la suma de dos cantidades puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos usando los siguientes pasos: Construimos dos cubos uno de a unidades, y otro de b unidades de lados.

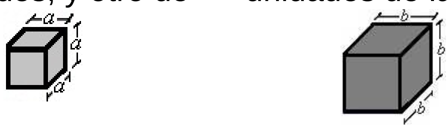


Figura 11. A la izquierda un cubos gris claro y a la derecha un cubo gris oscuro de *a* y *b* unidades de lado, los cuales tienen por volumen a^3 y b^3 respectivamente.

Construimos tres paralelepípedos que tengan el área en la base igual a $a.b$ y altura a. Además, construimos otros tres paralelepípedos que tengan el área en la base igual a $a.b$ y altura b, según se nos muestra en la figura:

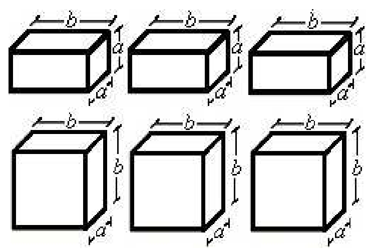


Figura 12: Tres paralelepípedos arriba de área en la base igual a *a.b* , altura *a* y volumen $a^2.b$ y abajo tres de área en la base igual a *a.b*, altura *b* y volumen $a.b^2$

Ahora, podemos hacer la siguiente reconfiguración:

Figura 13: En el lado izquierdo podemos colocar estos tres paralelepípedos y un cubo para tener un paralelepípedo que tendrán por volumen $a^3+2.a^2.b+a.b^2$ y en el lado derecho podemos colocar estos tres paralelepípedos y un cubo para tener un paralelepípedo más grande que tendrán por volumen $b^3+2.a.b^2+a^2.b$

Extendamos la definición de conjunto elemental al espacio tridimensional:

Definición 12 (Conjunto Sólido Elemental en el Espacio Tridimensional): Un conjunto sólido se llama elemental si se puede expresar como unión finita de paralelepípedos (Ortoedros o cubos) y las cuñas. Cualquier poliedro es un buen ejemplo de un conjunto elemental en el espacio:

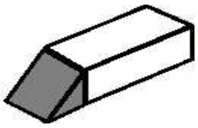


Figura 14. Conjunto sólido elemental que se expresa como unión de un ortoedro y una cuña, dividiéndolo en dos sólidos al cortarlos mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*. Podemos dividir un conjunto elemental en estas figuras.

Aquí se cumple de manera general el siguiente axioma de aditividad:

Axioma 2: El volumen de un conjunto elemental sólido es aditivo.

Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales sólidos tal que A intersectado con B es vació, un punto o un segmento, entonces el volumen de A unión B es igual a la suma del volumen de A más el volumen de B. Y tenemos la siguiente figura que nos ayudará a deducir el producto notable $(a+b)^3$:

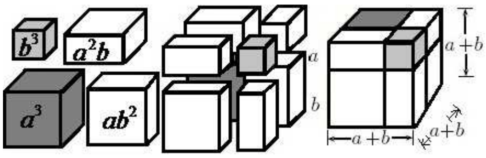


Figura 15. Se ve que podemos unir estas figuras mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* y obtenemos un cubo de lados $a+b$.

De la Figura anterior obtenemos pasando de un *anclaje visual al anclaje discursivo,* usando el Axioma 2 que: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 \qquad (5)$.

Ejercicio: Desarrollar la factorización $(3x+2y)^3$. (Use la ecuación 5).

Así, tenemos la configuración geométrica de la Figura 16, en donde se aprecia la descomposición geométrica y volumétrica que fue mostrada en la Figura 13:

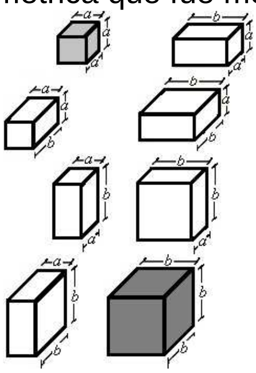


Figura 16. Descomposición volumétrica del binomio de una suma al cubo.

Por medio de modelos construidos de madera o de cartón podemos deducir, comprobar y explicar los procedimientos antes mencionados. Para hacer estas figuras con cartón o cartulinas de diversos colores podemos tomar en cuenta las siguientes figuras recortables, que son mostradas en la siguiente figura:

Figura 17. Figuras geométricas recortables, con la recortable de la izquierda podemos hacer un cubo y con la figura recortable de la derecha un ortoedro.

4.1. Gnómones en el espacio

Eurito solía representar los números con piedrecillas (origen de la palabra cálculo ya que en el latín calculus significa piedra), y por este procedimiento, obtuvo lo que hoy en día son los llamados números "*cuadrados*" y números "*oblongos*":

En efecto, si partimos de la unidad y le añadimos mediante un gnomon los números impares siguiendo el gnomon, obtendremos los números «*cuadrados*», mientras que si partimos del 2 y le añadimos mediante un gnomon los números pares, obtendremos los números «*oblongos*». Veamos la figura 18:

Figura 18. Las figuras a la izquierda nos muestra que la costumbre de representar los números o relacionarlos con la geometría ayuda a comprender por qué los pitagóricos consideraban las cosas como números y no sólo como numerables y transferían sus concepciones matemáticas al orden de la realidad material, lo cual vemos reflejado en el gnomon de la derecha.

La figura 18 a la derecha muestra un polígono de seis lados llamado hexágono y qua al ser además cóncavo (Son todas aquellas figuras en las que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180º) se le denomina hexágono cóncavo y es llamado más comúnmente como un gnomon.

Ejercicio propuesto: Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general, has una representación geométrica de la misma. Ahora, veamos la creación de un gnomon sólido en la figura 19:

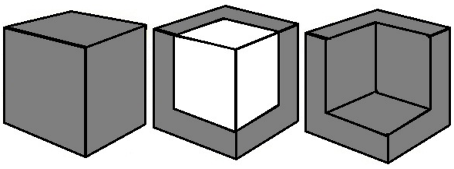


Figura 19. En la parte izquierda se muestra un cubo gris y en el centro se le quita al cubo gris un cubo blanco con lo que nos queda un gnomon por el espacio de color gris que queda hueco en la figura que está a la derecha.

Tomando en consideración la figura 4 a la derecha podemos hacer una configuración en el espacio para la diferencia de un binomio al cubo, partiendo de la diferencia de un binomio al cuadrado como vimos en la misma figura 4.

Si colocamos una altura de $x-a$ unidades, tenemos unos paralelepípedos con los siguientes volúmenes: $(x-a)^3, 2a(x-a)^2$ y $a^2(x-a)$. Formemos un cubo de lado

$x-a$, y tres ortoedros: Dos iguales de área de la base $a(x-a)$ y altura $x-a$, y uno de área de la base a^2 y altura $x-a$.

Ahora, si colocamos una altura de a unidades, tenemos unos paralelepípedos con volúmenes: $a^3, 2a^2(x-a)$ y $a(x-a)^2$. Formemos un cubo de lado a, y tres ortoedros: Dos iguales de área de la base $a(x-a)$ y altura a, y uno de área de la base $(x-a)^2$ y altura a. De donde desarrollando pasando de un *anclaje visual a uno discursivo* tenemos que algebraicamente lo que se cumple es que:

$$\begin{aligned}(x-a)^3 &= x^3-3a^2(x-a)-3a(x-a)^2-a^3\\ &= x^3-3a^2x+3a^3-3a\left(x^2-2ax+a^2\right)-a^3\\ &= x^3-3a^2x+3a^3-3ax^2+6a^2x-3a^3-a^3.\end{aligned}$$

De donde nos queda: $(x-a)^3 = x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \qquad (6).$

Ejercicio propuesto: Hacer las configuraciones para cada paralelepípedo. Una configuración puede estar dada en la siguiente figura:

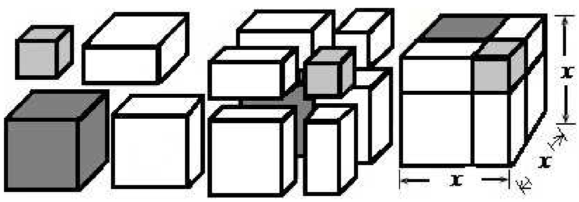


Figura 20. Configuración geométrica de la diferencia de binomios al cubo.

A la izquierda vemos un cubo gris de volumen $(x-a)^3$, otro cubo gris de volumen a^3, y dos ortoedros blancos de volumen $a^2(x-a)$ y de volumen $a(x-a)^2$. En el centro una configuración con todos los paralelepípedos que se van a extraer del cubo de la derecha de lado x.

Tomando en cuenta lo propuesto por los griegos, se puede generalizar lo planteado por Aristóteles y decir que el gnomon es la figura que añadida a un cubo aumenta sus lados pero no altera su forma según se ve en la siguiente figura:

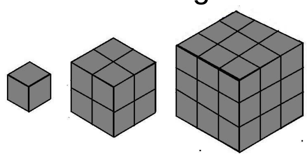


Figura 21. En la figura vemos que los cubos de los números naturales forman lo que denominamos una serie infinita.

La serie $C=\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots \text{cuyo término } i, C(i) = i^3\}$.

En la figura vemos los denominados derivados de notables de la serie C, los cuales se les conocen como los gnómones 1-sólido y vienen dados por: $D=\{1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, \ldots\}$. Los términos se forman a partir de las diferencias de cubos adyacentes, así: $D(i) = C(i) - C(i\text{-}1) = (i)^3 - (i\text{-}1)^3 = 3i(i\text{-}1)+1$.

Ejercicio propuesto**:** Tenga en cuenta lo antes desarrollado y verifique que esto también tiene una interpretación en 2D como la serie de hexágonos numéricos y que el degenerado primer término 1, es una característica de toda la serie de números figurado. Serie de números generados contando el número de puntos necesarios para construir los miembros sucesivos de un polígono específico. Veamos esto:

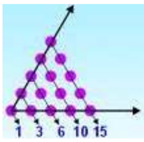


Figura 22. Los puntos arreglados en una serie de formas triangulares regulares pueden generar la secuencia 1, 3, 6, 10, 15, en tanto que puntos arreglados en la Figura 18 a la izquierda forma una serie de cuadrados que produce la secuencia 1, 4, 9, 16,….

Observe que 8 gnómones como el de la figura 19 a la derecha pueden ser utilizados para construir un cubo hueco, como se muestran:

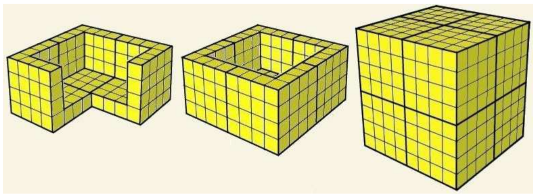


Figura 23. En la izquierda tenemos 3 de gnómones combinados, y en el centro un cuarto gnomon, se añade para formar una estructura similar a la cuenca. A la derecha cuando se copian, se invierten y se coloca en la parte superior de la figura del centro y se completa el cubo hueco. En esta figura de la derecha, el vacío interior tiene la geometría del sexto cubo.

El teorema de Pitágoras en el espacio se puede aplicar para calcular la medida de ciertos elementos de los cuerpos geométricos y para resolver situaciones de la vida real. Veamos la una acepción geométrica en el plano según la siguiente figura:

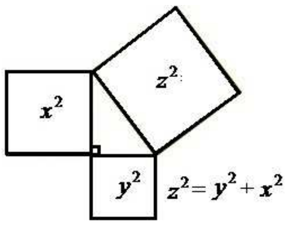


Figura 24. Acepción geométrica del teorema de Pitágoras.

En virtud del teorema de Pitágoras de acuerdo con (Barreto, 2010), tenemos que dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado sobre la longitud de la hipotenusa cuya área sea la suma entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, lo cual es ampliamente discutido en la referencia de (Barreto, 2008b, 2009a).

4.2. Diagonal en el plano y espacial

La diagonal espacial es la línea que une dos vértices opuestos del ortoedro. Basándonos en el teorema de Pitágoras, en particular en su extensión en el espacio por aplicaciones reiteradas de este teorema, deducimos el teorema de Pitágoras en el espacio. Calculemos la diagonal espacial del ortoedro de la siguiente figura:

Figura 25. A la izquierda la diagonal espacial de un ortoedro y a la derecha la diagonal de un rectángulo, el cual es una figura plana, es decir, que yace en un solo plano.

En donde según el triangulo ABC en la base de la figura anterior tenemos que la diagonal d tiene por longitud: $d^2 = m^2 + n^2$. Ahora tomando en consideración el triángulo gris CAE, que está en el espacio podemos aplicar de nuevo el teorema de Pitágoras y por tanto nos queda que: $D^2 = p^2 + d^2 = p^2 + m^2 + n^2$.

Además, podemos calcular la diagonal de un cubo como el de la figura:

Figura 26. El cubo es un ortoedro en el cual todas sus dimensiones son iguales, es decir que, $a = b = c$. A la izquierda la diagonal espacial de un cubo y a la derecha la diagonal de un cuadrado, teniendo en cuenta que esta es una figura geométrica plana.

Si aplicamos el resultado que hemos obtenido para el ortoedro, tenemos que:

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}.$$

Lo cual se puede enunciar de la siguiente forma: La diagonal de un cubo es igual a la raíz cuadrada del triple de su arista, o lo que es lo mismo, la diagonal de un cubo es el producto de su arista por la raíz cuadrada de 3.

Ejemplo: Si tenemos un cubo que tiene una arista de $a = 9\ cm$, entonces su diagonal espacial de acuerdo a lo anterior es $D = 9\ cm\sqrt{3} = 15{,}59\ cm$.

4.3. Otras formas de calcular las áreas de rectángulos y cuadrados

En el plano podemos expresar el área de un rectángulo y de un cuadrado en función de sus diagonales, veamos:

En el rectángulo de la derecha de la figura 25 que tiene largo de longitud l y ancho de longitud a, ocurre que de acuerdo con el teorema de Pitágoras que $d^2 = a^2 + l^2$, de donde de acuerdo con la diferencia de cuadrados según (Barreto, 2011) podemos tener que $a = \sqrt{d^2 - l^2}$ o bien $l = \sqrt{d^2 - a^2}$. Por tanto, el área de un rectángulo que se calcula $A_R = la$, puede ser escrita en función de su diagonal así $A_R = l\sqrt{d^2 - l^2}$ o $A_R = a\sqrt{d^2 - a^2}$. Y en el cuadrado de la figura 26 de la derecha que tiene lado de longitud l, ocurre que de acuerdo con el teorema de Pitágoras que

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow \frac{d^2}{2} = l^2$. Por tanto, el área de un cuadrado que se calcula $AC = l^2$, y escrita en función de su diagonal queda: $A_C = \frac{d^2}{2}$.

Áreas de paralelepípedos

El área total del ortoedro denotada A_O con a la longitud del ancho, b a la longitud su altura y c a la longitud de su profundidad es igual a la suma de las respectivas áreas de sus 6 caras que son rectángulos ya que estas son figuras geométricas planas y que al estar repetidas 2 a 2 se pueden calcular como:

$$A_O = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc).$$

Por su parte, el cálculo del área lateral será análogo, pero omitiendo las bases superior e inferior:

$$A_l = 2ab + 2bc = 2(ab + bc).$$

Ejercicio Propuesto: Calcular el área como el producto del perímetro de la base por la altura.

En el caso de un cubo su área denotada A_C al ser iguales la longitud del ancho, largo y profundidad y formar unos cuadrados digamos cada uno de área a^2, ocurre que: $A_C = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$.

5. Productos notables que generan la suma y de la diferencia cubos

Deduzcamos primero geométricamente el producto notable que se origina de la factorización de $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$, tomando en cuenta la *aprehensión operativa de cambio figural* dada en la figura 4. Veamos la siguiente figura:

Figura 27. En el lado izquierdo vemos una perspectiva geométrica de a^2-$a.b$+b^2.

Con una configuración de dos cuadrados uno de lado a y otro de lado b, al cual le podemos quitar un rectángulo de lados ab. A la derecha tenemos que mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* nos queda una especie de gnomon formado por un rectángulo de ancho $a-b$ y largo a, unido con un cuadrado de lado b. Ahora, al gnomon de la figura 27 a la derecha lo levantamos una altura $a+b$. Veamos esta configuración a la izquierda de la siguiente figura:

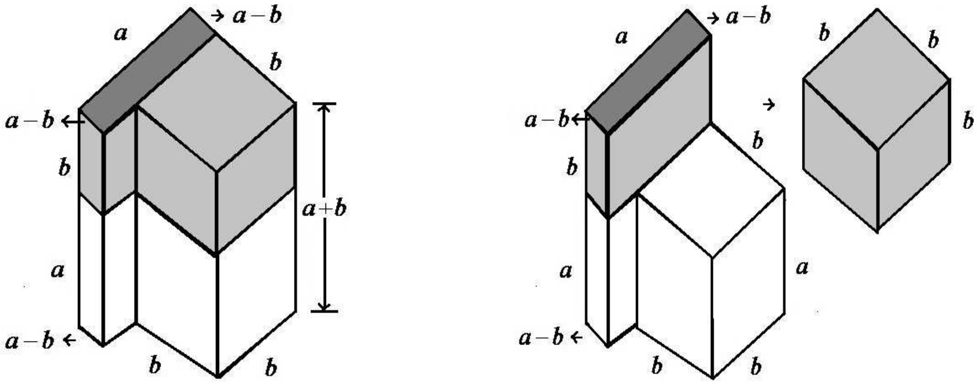


Figura 28. A la derecha notamos que podemos obtener un cubo de lado b y volumen b^3

Ahora, haciendo una *aprehensión operativa de reconfiguración* al paralelepípedo gris de la figura 28 a la derecha, podemos obtener un cubo como el de la figura 29 a la derecha reconfigurando las figuras de la izquierda, veamos:

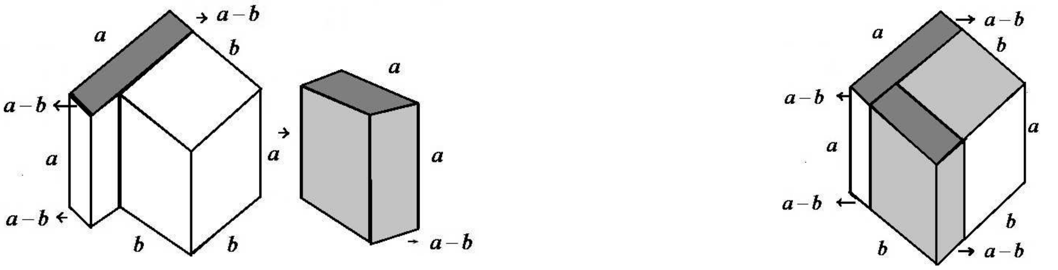


Figura 29. A la izquierda vemos las configuraciones que nos permiten formar el cubo de lado b de la derecha, el cual nos hace falta para tener una suma de cubos con el de la figura 28.

En la figura 28 de la derecha tenemos un cubo de volumen b^3, y en la figura 29 de la derecha tenemos mediante *aprehensión operativa de reconfiguración* un cubo de volumen a^3. Por tanto tenemos que partimos del producto de la suma del binomio por el cuadrado de uno de los nomios menos el productos de estos más el cuadrado del otro nomio, es decir algebraicamente tenemos el siguiente factorización: $(a+b)(a^2-ab+b^2)$, y que al hacer el producto notable obtenemos la suma de los cubos de estas cantidades, esto es, para hallar el producto notable debemos sumar esos dos cubos de volúmenes b^3 y a^3.

Así, nos queda pasando de un *anclaje visual* a un *anclaje discursivo* la siguiente expresión algebraica que nos permitirá realizar diversos cálculos:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (7).$$

Despejando la ecuación (5), es decir, obtenemos otra suma de cubos así:

$$(a+b)^3-3ab^2-3a^2b=a^3+b^3 \qquad (8).$$

De donde podemos operar con ellos y nos queda esto de la siguiente manera:

$$(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=a^3+b^3 \qquad (8').$$

Ahora de acuerdo con la ecuación (7) nos queda al simplificar lo siguiente:

$$(a+b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2 \qquad (9).$$

Ejercicios:

(a) Haga una configuración geométrica de la ecuación (9).

(b) Realice la factorización de $27x^3 + 8y^3$. Usando la ecuación (7).

Deduzcamos ahora geométricamente el producto notable que se obtiene al desarrollar la factorización de $(b-a)(b^2 + ba + a^2)$, tomando en cuenta la *aprehensión operativa de cambio figural* dada en la figura 4. Veamos la siguiente figura:

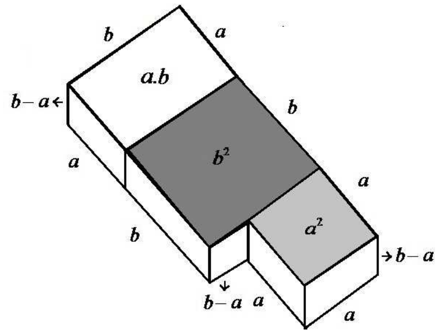


Figura 30. En la configuración tenemos perspectiva geométrica de (*b*-*a*).(*a*²+*b*.*a*+*a*²)

Podemos hacer una nueva configuración de dos cuadrados uno de lado a y otro de lado b, al cual le podemos agregar un rectángulo de lados ab. Y formamos un sólido colocándole una altura $(b-a)$, según nos muestra la figura 30. Este sólido tiene por volumen el siguiente: $(b-a)(b^2 + ba + a^2)$.

Luego mediante una nueva *aprehensión operativa de reconfiguración* con estos paralelepípedos nos queda la figura 31, el cual es un gnomon espacial:

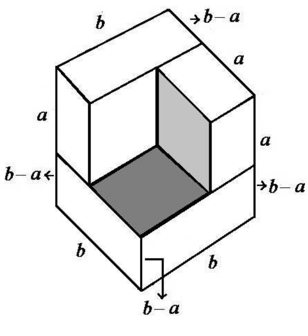


Figura 31. Configuración geométrica de la diferencia de cubos $b^3 - a^3$. Un gnomon en el espacio como el de color gris a la derecha de la figura 19.

De un *anclaje visual* a un *anclaje discursivo* tenemos que:

$$(b-a)(b^2 + ba + a^2) = b^3 - a^3 \qquad (10).$$

Ejercicios: Realice la factorización de $27x^3 - 8y^3$. Usando la ecuación (10).

Conclusiones

En esta experiencia de aula realizada con los estudiantes se evidenció la importancia que tiene el trabajo en equipo, y sobre todo cuando se construye el aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en foamis o con cartulinas de colores y se manipulan como si fueran piezas de un rompecabezas, les permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos constructivos llegando luego a razonamientos que les permiten crear un aprendizaje significativo. Pero debemos tener presente que se debe tener una comunicación en el aula de matemática lo cual es muy importante ya sea de diversos modos de comunicación que no se restringen únicamente a la verbal.

Sin embargo aunque la actividad fundamental en las clases de Matemática sea el razonamiento que efectúen nuestros estudiantes, la enseñanza será tanto más activa cuanto más haga funcionar la imaginación, creatividad y la inventiva de nuestros estudiantes. Al mismo tiempo que podemos mantenerlos entretenidos, interesados a la vez que ellos descubran conceptos o son tan triviales ni obvios.

Bibliografia

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números*, 69. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf.

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números*, 69. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf.

Barreto, J. (2009a). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números*, 70. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

Barreto, J. (2009b). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica*. Revista Números* (71). Números, 71. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf.

Barreto, J. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Números*, 75. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Articulos_01.pdf. Recuperado el 28 de Marzo de 2012.

Barreto, J. (2011). Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Matematicalia*, 7. No. 2. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.matematicalia.net/articulos/v7n2jun2011/jbarreto.pdf.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. Dordrecht, Netherlands: *Kluwer Academic Publishers*, pp 37-51.

Euclides. (1996). *Elementos.* [Traducción de M. L Puertas C.]. (tres vols.). (1ª ed.). Editorial Gredos: España.

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española (22ª ed.). Consultado en: http://www.rae.es/rae.html.

Torregosa, G y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime,* 10 (2), 273-300. México: Publicación del CLAME.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematic Education 27* (4), 435–457.

Julio Cesar Barreto García. Trabajo en la Unidad Educativa “José Antonio Sosa Guillen”. Palito Blanco y en la Unidad Educativa “José Antonio Páez”. Boraure, Instituto Universitario de Tecnología “Antonio José de Sucre”, extensión San Felipe. Nací en San Felipe estado Yaracuy. Egrese de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado” de Licenciado en Ciencias Matemáticas y actualmente curso especialización en procesos didácticos en el nivel básico en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio. Núcleo San Felipe. Email: **juliocbarretog@hotmail.com**