UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 103-114

Procedimientos matemáticos para aprender límite. Su evaluación.

Patricia Villalonga, Susana González, Marta Inés Marcilla,
Susana Mercau, Lisa Holgado

Fecha de recepción: 7/08/2012
Fecha de aceptación: 23/06/2013

Resumen	En alumnos de primer año de una Facultad de Ciencias se diagnosticó el grado de dominio de ciertos procedimientos matemáticos necesarios para abordar: *Límite de una función.* El marco metodológico siguió principios de Samaja, que orientaron la construcción del objeto modelo de la investigación. Se elaboró e implementó una prueba escrita cuya solución requería el dominio de los procedimientos: Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Graficar y Controlar. Un estudio descriptivo mostró mayor desarrollo en Identificar, Interpretar, Calcular y Graficar y menor dominio en Recodificar y Controlar. Este diagnóstico determinó la inclusión, en el material instruccional a implementar en el aula, de actividades que contribuyan a superar las falencias detectadas. **Palabras claves**: límite de función, material instruccional.
Abstract	In first grade students of a School of Sciences was diagnosed the development of some mathematical procedures required to approach the learning of the unit: Limit of a function. The methodological framework followed the principles of Samaja that built the model object of the research. A written test with five items was elaborated. Its answers required the control of the procedures: Identify, Interpret, Re-encode, Compute, Make graphic, and Control. A descriptive study of the data would show more development in Identify, Interpret, Compute, and Make graphic, besides, a minor control in Re-encode and Control. This diagnosis determined the incorporation of activities in the instructional material required by them and contributes to its mastery. **Keywords**: Limit of a function, instructional material.
Resumo	Em alunos do primeiro ano de uma Faculdade de Ciências se diagnosticou o grau de domínio de certos procedimentos matemáticos necessários para abordar: *Limite de uma função*. O marco metodológico seguiu princípios de Samaja, que orientaram a construção do objeto modelo da investigação. Elaborou-se e executou-se uma prova escrita cuja solução requeria o domínio dos procedimentos: Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Desenhar e Controlar. Um estudo descritivo mostrou maior desenvolvimento em Identificar, Interpretar, Calcular e Desenhar e menor domínio em Recodificar e Controlar. Este diagnóstico determinou a inclusão, no material instrucional a implementar na aula, de atividades que contribuam a superar a falecias detectadas. **Palavras-chave:** Limite de uma função, material instrucional**.**

1. Introducción

Los docentes de Matemática I, asignatura del primer cuatrimestre de primer año de una Facultad de ciencias, se enfrentan a problemas generados por aulas masivas: deficiente relación docente-alumno, escasa comunicación entre los participantes, alumnos pasivos, evaluaciones implementadas sólo para acreditar, entre otros. Intentando superar estas limitaciones que influyen en la calidad del aprendizaje y la evaluación, se formuló el proyecto: *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática*, aprobado por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán. Este proyecto se centra en el diseño e implementación de una estrategia didáctica que recurre al empleo de un material curricular elaborado ad hoc, construido en base a principios vigentes en investigación en educación matemática. Esta estrategia pretende favorecer aprendizajes significativos, valorizar la regulación continua del aprendizaje y contribuir a superar la práctica de evaluación del aprendizaje vigente en estas aulas, actualmente limitada sólo a evaluaciones sumativas, proponiendo actividades que no requieran de la intervención continua del profesor y favorezcan la interacción social en el aula.

Este artículo es un avance de dicho proyecto. En trabajos anteriores se identificaron una serie de criterios orientadores de la enseñanza y evaluación del aprendizaje de la Matemática, basados en principios de la psicología cognitiva, que se constituyeron en referentes durante el desarrollo del proyecto (Villalonga, González, Holgado, Marcilla y Mercau, 2009). Además, se elaboró y validó un material curricular con una serie de estrategias didácticas para desarrollar en el aula la unidad: *Límite de una función* (González de Galindo y Villalonga de García, 2010). El objetivo de este trabajo es diagnosticar el desarrollo alcanzado por los estudiantes en ciertos procedimientos matemáticos, a partir del análisis de los protocolos recabados de una prueba diagnóstica aplicada en 2010 a una muestra de ingresantes a una Facultad de Ciencias. La misma pretendía evaluar el dominio de los prerrequisitos de aprendizaje de la unidad: *Límite de una función*, en una instancia previa a la puesta en práctica de la nueva estrategia didáctica.

2. Fundamentación teórica

Los procedimientos generales matemáticos

Según Talízina (1984) no es posible separar el saber del saber hacer, dado que no puede haber un conocimiento sin una habilidad. Atendiendo a esta premisa, Hernández Fernández (1989) presentó en su Tesis doctoral el ***Sistema Básico de Habilidades Matemáticas***. Dichas habilidades se refieren a los procedimientos a través de las cuales es posible resolver problemas matemáticos en su acepción amplia. Este sistema está conformado por los siguientes procedimientos: *Definir, Demostrar, Identificar, Interpretar, Recodificar, Graficar, Algoritmizar* y *Calcular*. Posteriormente este *Sistema Básico* fue ampliado con los procedimientos: *Modelar, Comparar, Resolver, Aproximar, Optimizar* y *Controlar* (Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaíza, 2001). El conjunto de procedimientos generales matemáticos constituye una totalidad cuyo dominio es obligatorio cuando un individuo se involucra en la realización de tareas matemáticas. Este conjunto de procedimientos tiene naturaleza jerárquica, *"en tanto cada uno de los procedimientos o combinación de ellos puede ser considerado como un sistema y el propio sistema puede considerarse un subsistema de un sistema mayor que* *incorpora otros procedimientos (entre ellas los lógicas) los cuales confluyen en su actuar a la hora de resolver problemas matemáticos"* (Delgado Rubí, 2001: 83).

Los procedimientos generales matemáticos, su representación

Delgado Rubí (2001) caracterizó los procedimientos generales matemáticos de la siguiente manera:

Interpretar: "*es atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate"* (Delgado Rubí, 2001: 73). Ejemplo: Se interpreta cuando se asume que el signo menos que puede aparecer al derivar dos veces la función que da la posición de un vehículo en un cierto tiempo, indica que el móvil se está frenando.

Identificar: "*es distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales"* (Delgado Rubí, 2001: 73). Ejemplo: Se identifica cuando se reconoce a la expresión: $(x^2 – y^2)$ como una diferencia de cuadrados y no como el cuadrado de una diferencia.

Recodificar: "*es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro"* (Delgado Rubí, 2001: 74). Ejemplo: Se recodifica cuando se representa gráficamente en un sistema de ejes coordenados cartesianos una función definida analíticamente a través de una ecuación matemática.

Calcular: "*es una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, verbal (oral o escrita), mental y mediante el uso de tablas, calculadoras o ordenadores"* (Delgado Rubí, 2001: 75). Ejemplo: Se calcula cuando se resuelve un límite indeterminado aplicando la Regla de L´Hopital, previa transformación, si fuera necesario, a la forma indeterminada 0/0 ó ∞/∞.

Algoritmizar: "*es plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema"* (Delgado Rubí, 2001: 75). Ejemplo: Se algoritmiza cuando se establece, a través del Criterio de la Primera Derivada, la sucesión de pasos que deben realizarse para determinar los extremos relativos de una función.

Graficar: "*es representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, colegir las relaciones existentes a partir de su representación gráfica"* (Delgado Rubí, 2001: 76). Ejemplo: se grafica cuando se elabora un esquema donde se muestra la relación entre la existencia o no de la derivada de una función en un punto con la existencia o no de la recta tangente en ese punto.

Definir: "*es establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio"* (Delgado Rubí, 2001: 77). Ejemplo: Se define cuando se establece que la derivada de una función es el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, formalizando de esta manera este objeto matemático.

Demostrar: "*es establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación"* (Delgado Rubí, 2001: 77). Ejemplo: Se demuestra cuando a partir de ciertas hipótesis, por ejemplo, derivabilidad de una función en un punto, es posible llegar a la tesis de un teorema, en el caso que se trata continuidad de la función en ese punto, mediante un número finito de pasos.

Modelar: "*es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos"*

(Delgado Rubí, 2001: 78). Ejemplo: Se modela al asociar una función exponencial al crecimiento de las bacterias en un cultivo.
Comparar: "*es establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase"* (Delgado Rubí, 2001: 78). Ejemplo: Se compara cuando se determina la posición relativa de dos rectas analizando si son coincidentes, paralelas, perpendiculares o si se intersecan según un ángulo cualquiera.
Resolver: "*es encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema matemático"* (Delgado Rubí, 2001: 80). Ejemplo: Se resuelve cuando el alumno encuentra un camino para obtener información sobre una función a partir de la gráfica de su derivada.
Optimizar: "*es encontrar el objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.) que maximiza o minimiza (en algún sentido) la clase de objetos a la que pertenece o el método óptimo de resolución de determinado problema"* (Delgado Rubí, 2001: 81). Ejemplo: Si se requiere determinar si una función G es primitiva de una función f y la resolución de la integral de f es compleja, se optimiza el método de resolución al recurrir a la definición de primitiva de una función.
Aproximar: "*es sustituir un objeto por otro el cual se considera un modelo suyo"* (Delgado Rubí, 2001: 81). Ejemplo: Se aproxima cuando, en una práctica de laboratorio, se reemplaza una función no polinómica por un Polinomio de Taylor de un cierto grado n.

Hernández Fernández et al (2001) caracterizaron los siguientes procedimientos matemáticos:

Controlar: "*es monitorear y regular, es evaluar un conjunto de informaciones con relación a objetivos prefijados, a los efectos de tomar decisiones en el abordaje y resolución de un problema"* (Hernández Fernández et al, 2001: 113). La caracterización de cada una de las acciones que conforman el procedimiento *Controlar*, tanto en lo interpsicológico como en lo intrapsicológico, donde se convierte en estrategia metacognitiva (autocontrol), es la siguiente:

- *Monitorear: "es registrar las ocurrencias, los pasos que se van dando y las soluciones que se van obteniendo. El monitoreo ofrece información que condiciona las decisiones a* tomar" (Hernández Fernández et al, 2001: 114).
- *Evaluar*: "*es emitir un juicio de valor sobre el grado de correspondencia entre un conjunto de informaciones y de criterios con relación a un objetivo (o patrón aceptador de la acción), a los efectos de tomar decisiones"* (Hernández Fernández et al, 2001: 114).
- *Regular*: intervenir, ajustar y aplicar correctivos para modificar el proceso.

La acción de ***Estimar*** es un recurso metacognitivo que puede asociarse a la actividad de *Controlar*. ***Estimar*** puede definirse como *"conjeturar sobre las posibles soluciones o dimensiones a obtener o pronosticar características de las mismas"* (Hernández Fernández et al, 2001: 114). Sin embargo, no siempre el control presupone realizar estimaciones.

Ejemplo: El alumno se autocontrola cuando al intentar resolver la integral: $\int x \cos x \, dx$ elige erróneamente las partes de la siguiente manera: u = cos x, dv = x dx.

La integral que se obtiene resulta ser más complicada que la de partida lo que genera preguntas tales como: ¿me conviene esta elección? ¿esta elección facilita la resolución de la integral de partida? Este monitoreo lo lleva a evaluar los pasos seguidos y a tomar decisiones sobre continuar en ese camino, considerando las complicaciones mayores que se producirían o a cambiar la selección de las partes, es decir el alumno regula al efectuar correcciones y ajustes sobre el procedimiento empleado.

Fundamentación teórica de la Metodología de la investigación

Para sistematizar el análisis de los protocolos de los estudiantes se siguieron los principios teóricos metodológicos de Samaja (2003) de los que se presenta una apretada síntesis. Dado que todo objeto real de investigación en ciencias sociales posee un gran número de atributos, relaciones y contextos, es necesario que el indagador, en base a modelos preexistentes al acto investigativo (consecuencias de la historia personal, intuiciones, experiencia y circunstancias o sea la *preconcepción modelizante* (Ladrière, 1978, c.p. Samaja, 2003)) efectúe una reducción de su complejidad explicitando qué aspectos relevantes tendrá en cuenta de sus componentes y qué *procedimientos* concretos usará para llevar a cabo su descripción. Es decir, debe construir un *objeto modelo*. El denominado *objeto modelo*, queda delimitado por los distintos tipos de *unidades de análisis* escogidas para la investigación, mediante la aplicación del conjunto de *variables,* que se seleccionen para describir el objeto real de la indagación, propio de cada tipo de *unidad de análisis* (Samaja, 2003). Desde esta perspectiva todo "*dato"* (Samaja, 2003, p.160) de cualquier investigación empírica, posee una estructura compleja invariante de cuatro componentes: *unidad de análisis*, *variables*, v*alores* e *indicadores*. Esta estructura se denomina *matriz de datos* y en ella el *indicador* es el *procedimiento* aplicado a cada dimensión relevante de la *variable* para efectuar su medición o valoración. Tales procedimientos incluyen desde el empleo de un indicio perceptivo simple, hasta la construcción de escalas o números índices que combinan muchos ítems o dimensiones de una variable compleja.

El conjunto de *variables* relevantes que se eligen para describir el objeto real de la investigación se denomina *espacio de atributos.* El *objeto modelo* de la investigación queda delimitado, entonces, por los distintos tipos de *unidades de análisis* escogidas para la investigación mediante la aplicación de un *espacio de atributos* propio de cada unidad de análisis.

3. METODOLOGIA

3.1 El instrumento

Se diseñó un instrumento que contenía cinco ítems de desarrollo (Stewart, Redlin, y Watson, 2006; Vieytes, 2004) (Ver Apéndice 1). Pretendían evaluar si el estudiante era capaz de:

- Identificar casos de factoreo.
- Calcular el valor de una incógnita, realizando los algoritmos pertinentes para reducir una ecuación algebraica fraccionaria a una expresión algebraica entera.
- Resolver una ecuación lineal.
- Controlar si las soluciones encontradas verifican la situación problemática planteada.

- Evaluar el valor de una función en un punto.
- Calcular el dominio y el rango de una función.
- Realizar la conversión entre distintos registros semióticos: del verbal al simbólico y del gráfico al simbólico.
- Interpretar gráficos.

La prueba versaba sobre:

- Expresiones algebraicas fraccionarias, factoreo, polinomios. Resolución de una ecuación algebraica fraccionaria.
- Función de variable real: dominio, rango, cálculo del valor de una función en un punto de abscisa a, interpretación geométrica de f(a), gráfica de una función. función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y trigonométrica.

Se garantizó la *validez de contenido del instrumento* sometiéndolo al juicio de tres docentes que participan en el dictado de la asignatura, quienes constataron que las actividades seleccionadas resultaban adecuadas para evaluar los objetivos especificados (Martínez Arias, 1996).

3.2 La muestra

Se aplicó la prueba a los 301 alumnos de Matemática I del año 2010. Se seleccionó una muestra probabilística de 60 protocolos, mediante un muestreo sistemático.

3.3 Metodología para analizar los protocolos de los estudiantes

En primer lugar, en cada uno de los cinco ítems de la prueba, se identificaron los procedimientos matemáticos que el alumno debía desplegar para resolverlos. La solución de cada ítem se dividió en secciones, conforme a los procedimientos que eran necesarios desarrollar. Cada una de esas secciones se consideró como *unidad de análisis* para estudiar el desarrollo del procedimiento pertinente. Las *variables* consideradas relevantes para este estudio fueron: *Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Graficar y Controlar.*

Definición conceptual de las variables

1. *Identificar:* determinar si el objeto de estudio matemático pertenece a una determinada clase de objetos, los que presentan ciertas características distintivas.
2. *Interpretar:* Dar significado a una expresión matemática, la que adquiere sentido en función del propio objeto matemático o del fenómeno real que se trate.
3. *Recodificar:* transferir la denominación de un objeto de un lenguaje matemático a otro.
4. *Calcular:* aplicar un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, verbal (oral o escrita), mental, o recurriendo al uso de tablas, calculadoras o computadoras.
5. *Graficar:* representar relaciones entre objetos matemáticos a través de diagramas, tablas o geométricamente, y recíprocamente, deducir de ellas las relaciones existentes.
6. *Controlar*: evaluar un conjunto de información en base a objetivos prefijados, con el fin de efectuar una toma de decisiones para abordar y resolver un problema.

El *objeto modelo* para el análisis de los protocolos se presenta en el Apéndice 2

Secciones de cada ítem y procedimientos matemáticos considerados

Tabla 1: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 1

	Ítem 1			
Sección del ítem 1	Diferencia de cuadrados	Trinomio cuadrado perfecto	Desarrollo de algoritmos para determinar la incógnita	Verificación de resultados
Procedimiento matemático	*Identificar*	*Identificar*	*Calcular*	*Controlar*

Tabla 2: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 2

	Ítem 2				
Sección del ítem 2	Dar significado a A(3)	Desarrollo del cálculo de A(3)	Dar significado a A(1)	Desarrollo del cálculo de A(1)	Dar significado geométrico a A(1)
Procedimiento matemático	*Interpretar*	*Calcular*	*Interpretar*	*Calcular*	*Interpretar*

Tabla 3: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 3

	Ítem 3				
Sección del ítem 3	Determinar la pertenencia de la ecuación al conjunto de las parábolas	Construcción de la tabla de valores	Representación geométrica	Determinación del dominio	Transferencia de un lenguaje matemático a otro para calcular el
Procedimiento matemático	*Identificar*	*Calcular*	*Graficar*	*Identificar*	*Recodificar*

Tabla 4: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 4

	Ítem 4			
Sección del ítem 4	Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones	Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones	Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones logarítmicas	Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones coseno
Procedimiento matemático	*Identificar*	*Identificar*	*Identificar*	*Identificar*

Tabla 5: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 5

	Ítem 5		
Sección del ítem 5	Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (-1)	Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (1)	Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (2)
Procedimiento matemático	*Recodificar*	*Recodificar*	*Recodificar*

3.4 Indicador del grado de desarrollo en el grupo clase de cada uno de los procedimientos matemáticos estudiados.

A cada sección del ítem se le asignó el valor 1 si el procedimiento que evaluaba la sección se efectuó correctamente ó 0 en caso contrario. Para cada procedimiento matemático se consideraron todas las secciones de los distintos ítems que lo involucraban. Se calculó el porcentaje de respuestas valuadas con 1 de la muestra, tomando como base de dicho porcentaje el puntaje máximo que podían alcanzar los 60 alumnos en ese procedimiento matemático. Por ejemplo, para el procedimiento *Recodificar* los ítems que lo involucraban eran el ítem 3 y el 5. Se consideró la quinta sección del ítem 3 y las tres secciones del ítem 5, o sea en total cuatro secciones. El puntaje máximo que podían alcanzar los 60 alumnos en este procedimiento era: 4 . 60 = 240. Como el resultado obtenido de la muestra para este procedimiento fue de 91 puntos, el porcentaje de respuestas correctas fue de 38%.

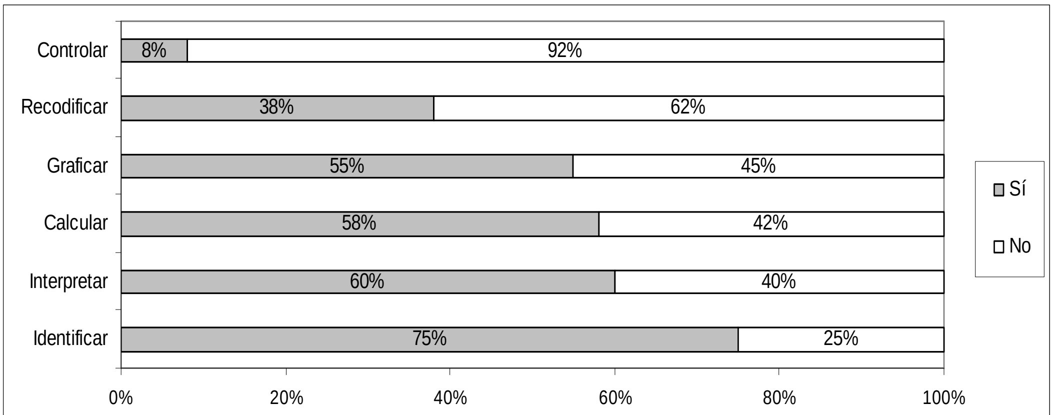
4. Resultados

Es posible apreciar en el Gráfico 1 que los procedimientos más desarrollados son *Identificar, Interpretar, Calcul*ar y *Graficar*. Se evidencian falencias importantes en *Recodificar*. Con respecto a *Graficar* cabe reconocer que el ítem que lo involucraba era de muy fácil resolución, sólo exigía el desarrollo de una tarea mecánica: graficar una parábola dada su ecuación.

5. Discusión

La toma de conciencia del escaso desarrollo de los procedimientos *Recodificar* y *Controlar* determinó que en el diseño del material instruccional para el aprendizaje de la unidad de *Límite de una función,* se incluyeran diversas actividades que los requieren y contribuyen a su dominio. También debieran enfatizarse actividades que impliquen el procedimiento *Graficar*. Con respecto a *Recodificar* sería aconsejable incorporar, en el curso de admisión a esta Facultad, un espacio orientado al aprendizaje del lenguaje simbólico y a la transformación entre representaciones de distintos sistemas semióticos. Los mismos tienen un rol fundamental en el trabajo con los objetos matemáticos caracterizados por ser abstractos y son esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento, pues las actividades matemáticas requieren ser ejecutadas dentro de un contexto de representación. Hay antecedentes que permiten afirmar que intervenciones educativas que enfatizan la enseñanza del lenguaje simbólico y la conversión entre distintos registros semióticos, producen una mejora significativa en su uso y comprensión (Distéfano, Urquijo y González de Galindo, 2010).

Gráfico1: Porcentaje de alumnos que tienen desarrollado cada procedimiento matemático



	Identificar	Interpretar	Calcular	Graficar	Recodificar	Controlar
No	25%	40%	42%	45%	62%	92%
Sí	75%	60%	58%	55%	38%	8%

Conclusiones

No están suficientemente desarrollados los procedimientos matemáticos para encarar el aprendizaje significativo de la unidad límite de una función. Es necesario diseñar un espacio curricular extra, destinado a superar esas deficiencias.

Bibliografía

Delgado Rubí, J. R. (2001) Los procedimientos generales matemáticos. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en el educación Polimodal y Superior, pp. 69-87.* Argentina: Homo Sapiens.

Distéfano, M. L., Urquijo, S. y González de Galindo, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática, Nº 23, pp.59-70.*

González de Galindo, S. y Villalonga de García, P. (2010) *Metacognición: Diseño de un material curricular para aulas multitudinarias*. Aceptado para publicar en la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). 4-08-10.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J. y Fernández de Alaíza, B. (2001) *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la educación Polimodal y Superior.* Argentina: Homo Sapiens.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.; Valverde Ramírez, L. y Rodríguez Hung, T. 2001. Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en matemática: el autocontrol. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la educación Polimodal y Superior*, pp. 107-120. Argentina: Homo Sapiens.

Hernández Fernández, H. (1989). Citada por Delgado Rubí, J. R. 2001. Los procedimientos generales matemáticos. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en el educación Polimodal y Superior, pp. 69-87.* Argentina: Homo Sapiens.

Ladrière, J. (1978) Citado por Samaja *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. Buenos Aires: Eudeba. 2003. 3º edición. 3º reimpresión.

Martínez Arias, R. (1996) *Psicometría: teoría de los test psicológicos y educativos*. España: Síntesis.

Samaja J. (2003) *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. Buenos Aires: Eudeba. 3ª edición. 3ª reimpresión.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2006) *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo.* Quinta edición. Cengage Learning: México.

Talízina, N. (1984) Citada por Pérez Pantaleón, G. 1997. *Un sistema didáctico para la enseñanza de la matemática en la carrera de Arquitectura sustentado en el enfoque histórico-cultural y aspectos de la psicología cognitiva*. Tesis de maestría. La Habana. Cuba.

Vieytes, R. (2004) *Metodología de la investigación en organizaciones, mercado y sociedad. Epistemología y técnicas.* Argentina: Editorial de las Ciencias.

Villalonga, P., González, S., Holgado L., Marcilla, M. y Mercau, S. 2009. Pautas para diseñar actividades evaluativas basadas en teorías de aprendizaje significativo: desde Ausubel hasta Moreira. En J. Sagula (Ed.), *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática* (Vol. Cd, 1812-1829). Argentina: EMAT.

Apéndice 1: Prueba de nivel

1) Factorea, simplifica y encuentra el valor de x que verifica la siguiente igualdad: $\frac{x-5}{x^2-4} = \frac{x-4}{x^2+4x+4}$

2) Si A es la función que permite calcular el área de un rectángulo, con $A(x) = (x^3+2).(x-2)$

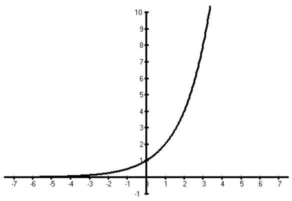
   a) Calcula el valor de A(x) para x = 3.

   b) Calcula A(1). Interpreta el resultado.

3) Grafica la función definida por la ecuación $y = 2(x\text{-}3)^2 - 2$. Determina su dominio y rango.

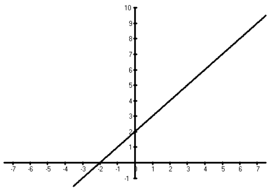
4) Une cada gráfica con la función que le corresponde:

A)



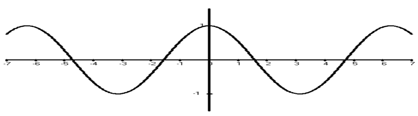
$y = 2^x$

B)



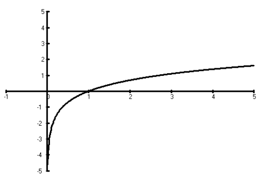
$y = \log x$

C)



$y = \cos x$

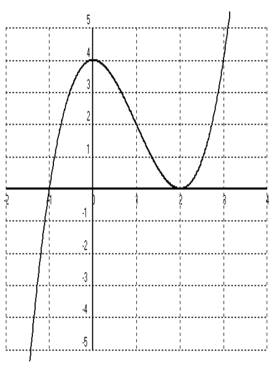
D)



$y = x + 2$

5) Dada la gráfica de la siguiente función, completa:

f(-1) = …..



Apéndice 2: El objeto modelo para el análisis de los protocolos

Unidad de análisis	Variable	Indicador	Valor
Sección del ítem	*Identificar*	Reconoce el caso de factoreo diferencia de cuadrados y lo resuelve de manera correcta. (Ítem 1)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Reconoce el caso de factoreo trinomio cuadrado perfecto y lo resuelve de manera correcta. (Ítem 1)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Reconoce que la gráfica de función cuadrática es una parábola. (Ítem 3)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Registra que el dominio de funciones polinómicas es el conjuntos todos los números reales. (Ítem 3)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Asociación correcta de la función exponencial con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 a)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Asociación correcta de la función lineal con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 b)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Asociación correcta de la función logarítmica con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 c)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Asociación correcta de la función coseno con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 d)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
	Interpretar	Reemplaza en A(x) el valor de x por 3. (Ítem 2 a)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		La expresión A(1) significa que debe reemplazar x por el valor numérico 1. (Ítem 2b)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Interpreta el resultado, es decir, escribe el significado geométrico de la expresión A(1). (Ítem 2b)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
	Calcular	Opera algebraicamente en forma correcta para encontrar el valor de la incógnita x. (Ítem 1)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Realiza los cálculos algebraicos y encuentra el valor numérico correcto de A(3). (Ítem 2)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Realiza los cálculos algebraicos y encuentra el valor numérico correcto de A(1). (Ítem 2)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Calcula correctamente las coordenadas del vértice, el eje de simetría, tabla de valores, o intersección con los ejes. Es decir, calcula valores que le permitan construir `la gráfica. (Ítem 3)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
	Graficar	Grafica en forma correcta la parábola. (Ítem 3)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
	Controlar	Verifica si el valor numérico encontrado para x, resuelve la ecuación racional planteada. (Ítem 1)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
	Recodificar	Realiza la lectura a través del gráfico del rango de la función cuadrática dada. (Ítem 3)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (-1). (Ítem 5 a)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (1). (Ítem 5 b)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo
		Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (2). (Ítem 5 c)	1: en caso afirmativo 0: en caso negativo

Patricia M. Villalonga de García. Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Profesor Titular de la Cátedra de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Directora del proyecto *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática* del Consejo de Investigaciones de la U.N.T**.** **pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar**

Susana E. González de Galindo Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Profesor Titular de la Cátedra de Matemática II - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Codirectora del proyecto *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática* del Consejo de Investigaciones de la U.N.T. **sgalindo@fbqf.unt.edu.ar**

Marta Inés Marcilla Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Profesora Adjunta de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones de dicha Universidad, República Argentina**.** **mmarcill@yahoo.com.ar**

Susana Mercau de Sancho. Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Jefe de Trabajos Prácticos de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones. **s_mercau@yahoo.com.ar**

Lisa V. Holgado de Mejail Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Profesora Adjunta de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones de dicha Universidad,, República Argentina**.** **lvholgado@yahoo.com**