UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2012, Número 31, páginas 45-63
ISSN: 1815-0640

Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones.

Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados de una investigación que propone insertar un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) en cursos de 4to Año de la Secundaria en Argentina. En total se realizaron seis implementaciones de las que participaron 163 estudiantes entre 14 y 15 años. Se describen los alcances y limitaciones del inicio de todo un recorrido de estudio y se analiza la viabilidad de estos dispositivos en la escuela secundaria. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

Abstract

In this paper we present some results of a research carried out to introduce Research and Study Courses (RSC) in the secondary school in usual classes of 4th year at Secondary level in Argentina. We have realized six implementations with 163 students between 14 and 15 years old. We describe the advantages and limitations of these proposal and we analyzed the viability of these devices in the secondary school. We adopted the framework of the Anthropologic Theory of Didactic (ATD) of Yves Chevallard.

Resumo

Apresentamos resultados de uma investigação pra introduzir um Percurso de Estudo e de Investigação (PEI) em cursos habituais de 4to Ano do ensino meio na Argentina. Em total foram feitas seis implementações envolvendo 163 estudantes entre 14 e 15 anos. Aqui descrevemos os alcances e as limitações de um percurso de estudo e também analisamos a viabilidade destes dispositivos na escola secundária. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard e o referencial teórico adotado

1. Introducción

En la escuela secundaria, la enseñanza de la matemática presenta problemas, que ocasionan frustración para los estudiantes y para los profesores. El modelo didáctico imperante es mecanicista y la actividad esencial del alumno se reduce a la transcripción o reproducción, de lo que el profesor explica y propone. El docente es quien "cubre" casi todo el espacio disponible en la clase, "tiene" que explicar y "transmitir" el saber al alumno, ser además su "garante", y de este modo, son pocas las posibilidades de construcción y deconstrucción que pueden tener lugar en el aula. La actividad reconocida al profesor es *explicar* y "*mostrar*" el saber, del mismo modo que se exhibe una escultura en un museo, como una obra terminada, incuestionable y en el decir de Chevallard, "muerta"; fenómeno, que ha sido llamado metafóricamente *monumentalización del saber* (Chevallard, 2004). El fenómeno de la *monumentalización* produce en el profesor una obligación inevitable: "el profesor debe explicar, describir, mostrar con claridad, etc. Se sobredimensiona su figura por sobre los alumnos, al mismo tiempo, que se reduce el lugar de los estudiantes al de reproductores, espectadores y "visitante de la obra". Otra consecuencia "grave" de la *monumentalización* es la sustitución de las preguntas por las respuestas. Las obras expuestas "como monumentos" son respuestas a preguntas ocultas, sin que se reconozca la necesidad de remitir a su origen, a su utilidad, a su razón de ser, a su porqué o para qué. La desaparición de las preguntas y de la actividad de construir conocimiento es una de las consecuencias más desfavorables y difíciles de revertir de la *pedagogía monumentalista* en la enseñanza de las matemáticas.

Nuestro problema didáctico es introducir en la escuela secundaria un cambio radical en la forma de hacer matemática. Este cambio requiere de una modificación sustancial del contrato vigente, reemplazando la *pedagogía monumentalista* por otra, denominada por Chevallard (2004, 2007) *de la investigación* y *del cuestionamiento del mundo*. En la "nueva" pedagogía el saber es entendido como la respuesta a una pregunta matemática que tiene sentido para la comunidad de estudio, una pregunta "fuerte", que para ser respondida requerirá de la elaboración de respuestas parciales que en su conjunto aportarán de manera funcional al saber matemático. La respuesta de la TAD al problema de la *monumentalización* y la consecuente *pérdida de sentido* de las matemáticas escolares, se articula a partir del constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2007). Los REI sitúan a las cuestiones *Q* como punto de partida de todo un proceso de estudio. Un aspecto esencial es relativo a la posibilidad de introducir estos dispositivos en el Nivel Secundario. En este trabajo, se describen algunos resultados de la inserción de un REI en clases de matemática habituales.

2. Marco teórico: algunas nociones centrales de la TAD

Se adopta como referencial teórico la TAD de Yves Chevallard (1999), específicamente el constructo *Recorrido de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard 2004, 2005, 2006, 2007, 2009). Chevallard (2007) propone este dispositivo para enfrentar y comenzar a superar el fenómeno de la *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de los conceptos matemáticos que se estudian en la institución escuela media. Uno de los factores que describe la *pérdida de sentido*, es relativo a la sustitución de las cuestiones *Q* por las respuestas *R*. Los programas de estudio $P=(Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, afectados por la sustitución de cuestiones, toman la forma $P=(?;R_i)_{1\leq i\leq n}$; convirtiéndose en una sucesión de respuestas $R_1, R_2,\ldots,R_n$,. Estas respuestas R_i no responden a ninguna cuestión *Q*; y de este modo, son consideradas *per se*, tendencia denominada *monumentalización* de saberes (Chevallard, 2004, 2006). Algunas investigaciones se han ocupado de los problemas de la *pérdida de sentido* y la *monumentalización del saber* (Barquero, Bosch y Gascón, 2012; Chevallard, 2004, 2005, 2007, 2009; Marietti, 2009) y consideran que una enseñanza por REI puede promover a la superación de estos fenómenos. Los REI ponen en primer plano el estudio de cuestiones genuinas enfatizando que la *razón de ser* de todo el proceso de estudio viene dada tanto por la construcción de una "buena" respuesta a la cuestión, como por la generación de otras nuevas cuestiones que podrían reorientar y mejorar todo el estudio.

2.1 Sobre las características de los REI

En un REI la cuestión generatriz Q_0 es el punto de partida del proceso de estudio en una clase [*X*,*Y*]. La evolución de dicha cuestión Q_0 requiere de la emergencia de otras cuestiones derivadas $(Q_i)_{1\leq i\leq n}$ que permiten la formación y el funcionamiento de los sistemas didácticos $S(X;Y;Q_i)_{1\leq i\leq n}$ cuya finalidad es la producción de una respuesta $R^\heartsuit$. El estudio de una cuestión generatriz Q_0 se concreta en un recorrido "general" que integra varias cuestiones Q_i, donde cada una a su vez da lugar a numerosas cuestiones particulares ligadas a ellas, lo que permite la emergencia de varias entidades praxeológicas $(\wp_i)_{i>1}$. El *medio* didáctico queda así conformado por: $\wp_1, \wp_2, ..., \wp_k \in M \cup R^\heartsuit$, con $M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\}$, donde las $R_i^\lozenge$ son las posibles respuestas a la cuestión Q existentes en la cultura y donde las O_j son otras obras juzgadas útiles a la creación de la respuesta $R^\heartsuit$.

En un REI el sistema didáctico queda definido por lo que Chevallard, (2009) denomina esquema *herbartiano*[1] *desarrollado*:

$$[S(X;Y;Q))\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\}](R^\heartsuit,$$

y las entidades praxeológicas, se colocan:

$$\wp_1, \wp_2, ..., \wp_k \subset \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\} \cup R^\heartsuit.$$

Este esquema permite interpretar algunas características e indicadores que posee un REI: es necesario partir del estudio de una cuestión generatriz y las respectivas cuestiones derivadas, a la cual es necesario aportar una respuesta; debe pasar por la constitución de un medio *M*, debe permitir obtener como resultado del proceso la elaboración, validación e institucionalización de una respuesta $R^\heartsuit$. La inserción del REI requiere entonces de un cambio sustancial de la organización didáctica corriente, con implicaciones fuertes en la *cronogénesis,* la *topogénesis* y la *mesogénesis* (Chevallard, 1985, 2009). En un REI el medio no está totalmente determinado, es "construido por la clase". La *mesogénesis*, remite a la gestación y sostenimiento del *medio didáctico* que se elabora para generar la respuesta a *Q*. Son varias las obras que puede ser llamadas a construir el medio, y ninguna puede ser excluida. El *medio M* debe ofrecer herramientas idóneas para construir y justificar cada $R_i^\lozenge$ y la $R^\heartsuit$. La modificación en la *topogénesis*, relativa a la manera en que se gesta la ocupación de espacios del profesor y del alumno, va a la par de los cambios en la *mesogénesis*. El *topos* del alumno se modifica y amplía. El alumno puede aportar su respuesta personal R_x como solución al problema propuesto por *y*; pero además puede llevar a *M* cualquier obra que considere necesario estudiar. El *topos* del director del estudio de *Q*, Y (o un profesor *y*), asume el compromiso de decidir si la clase [*X*,*y*] tratará o no con el *medio* propuesto para su estudio.

La *cronogénesis*, relativa a la gestión y regulación de los tiempos didácticos también se ve afectada por los cambios en la *topogénesis* y la *mesogénesis*. La constitución y el "trabajo" del medio *M* afectan al tiempo didáctico originando una dilatación del mismo. Es necesario "cuidar" todo el trabajo en el *medio*. El impulso de "estimular el estudio" de manera artificial para que el "tiempo escolar" sea acorde al producido por el REI debe ser evitado en una *pedagogía de la investigación*.

A partir de las características del constructo REI propuesto por la TAD, se abordan las preguntas de la investigación:

- ¿Cuáles son los alcances y limitaciones del recorrido implementado en el marco del REI para estudiar las funciones polinómicas de segundo grado?

[1] Chevallard indica que el adjetivo "herbartiano" hace referencia al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841)

- ¿Qué elementos permiten justificar la viabilidad de los dispositivos tipo REI en la escuela secundaria?

3. Metodología

La investigación propone un estudio cualitativo, de corte exploratorio y carácter etnográfico. Se busca describir las características del dispositivo diseñado en una *pedagogía de REI* para la escuela secundaria, presentando algunos resultados obtenidos en los grupos seleccionados para implementar dicho dispositivo.

3.1 Acerca del contexto de implementación:

Los cursos pertenecen a 4to Año secundaria en Argentina y fueron seleccionados por el investigador. Todas las implementaciones se realizaron en un mismo establecimiento educativo con estudiantes entre 14 y 15 años. En todos los cursos predomina en el comienzo una *enseñanza tradicional* y *monumentalista*. Cada grupo de estudio está conformado por aproximadamente 30 alumnos y el profesor del curso. Las clases se desarrollan en dos encuentros semanales con duración de tres horas en total. Los estudiantes y el profesor permanecen todo el ciclo lectivo en el curso, pero cada implementación dura 13 semanas, y la ejecución de la propuesta corresponde al segundo semestre. Se realizaron en total seis implementaciones, dos por cada año, durante tres años consecutivos de las que participaron 163 estudiantes. En la clase los estudiantes están dispuestos en equipos de trabajo de cuatro integrantes. Cada implementación permitió mejorar el diseño y las condiciones de estudio entre unas y otras ejecuciones.

3.2 Acerca del "nuevo" acuerdo de trabajo:

Para insertar la *pedagogía de la investigación* es necesaria una modificación de contrato en los cursos seleccionados por el investigador. Este cambio puede realizarse si el profesor asume un lugar y realiza unas actividades diferentes, y también de una manera más explícita. En este caso fue necesario que los estudiantes supieran que se encontraban en un contexto experimental y que prestaran su acuerdo, si así lo deseaban. Se elaboró un *"Acta de compromiso y* estudio *en Matemática"* (Otero, 2007) que consiste en un conjunto de acuerdos de trabajo que se elaboran y consensúan entre el profesor y los alumnos.

El acuerdo propone ingresar en un dominio didáctico diferente donde entre otras cosas, se contempla explícitamente el reconocimiento de que el error es siempre a posteriori, y en consecuencia, es inevitable, razón por la cual se vuelve una oportunidad de aprender y reflexionar. También se discuten cuestiones que son críticas para los estudiantes *¿cómo va a ser la evaluación?* Se refieren a cómo, cuándo y en base a qué se los va a calificar. Se acuerdan con ellos *nuevas* reglas, dirigidas a clarificar el inevitable proceso de calificación, confundido en el nivel de la pedagogía con la evaluación, que es algo sustancialmente diferente. Todo el proceso de generación de este acuerdo así como el de su escritura y ratificación ayudan a la instalación de un nuevo contrato. Los estudiantes comienzan a percibir que tienen tareas y responsabilidades nuevas, un lugar diferente.

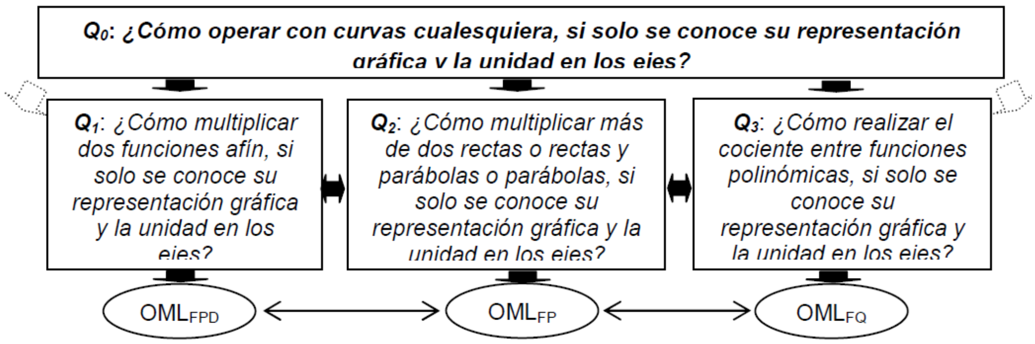
3.3. Acerca de la recolección de los datos y los instrumentos de análisis:

En cada implementación el profesor tuvo carácter de observador participante. Se realiza también observación no participante a partir de la colaboración de colegas del equipo de investigación. Se toma un audio general de cada curso durante todo el período de ejecución del dispositivo y además el profesor-investigador registra notas de campo antes y después de cada clase correspondiente a cada implementación. Todas las clases, el profesor acerca el problema que es nuevo para los estudiantes y también “retira” al finalizar cada encuentro las producciones escritas de todos los alumnos. Se escanean todos los trabajos escritos y se devuelven a la clase siguiente. Esto permite obtener todos los protocolos escritos de los estudiantes durante cada implementación. Para analizar estos protocolos, se decidió segmentarlos en episodios correspondientes a cada tarea y además se selecciona un alumno, el más representativo de cada grupo de estudio, por cada implementación. La selección de los alumnos “prototípicos” de cada grupo, atiende a criterios vinculados con las producciones personales de los estudiantes dentro del grupo, en todas las clases .Se transcriben los audios que permiten al investigador recuperar información de lo ocurrido en la clase. En este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos de las implementaciones realizadas, que permiten describir los cambios que produce la inserción de REI en la escuela secundaria, respecto de la enseñanza tradicional.

4. Los REI:

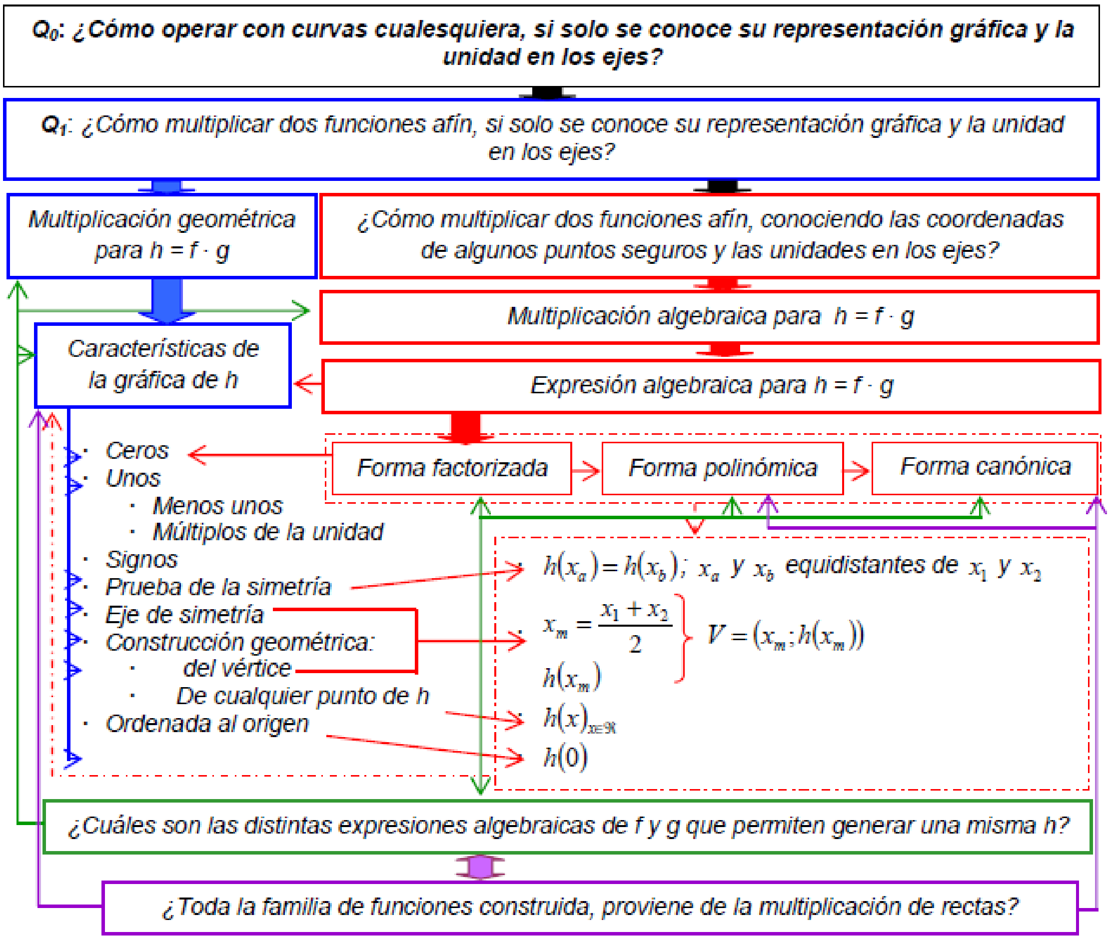
Todo el recorrido se inicia a partir de la cuestión generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* La respuesta a dicha cuestión puede originar diferentes recorridos de estudio, dependiendo de las funciones que se adopten y de la operación que se realice entre las mismas. Por ejemplo, si se multiplican dos rectas es posible generar un posible recorrido que permite reconstruir la Organización Matemática Local (OML_{FPD}) de las funciones polinómicas de segundo grado; si se multiplican más de dos rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, se origina la posibilidad de reconstruir la OML_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales; si se trata del cociente de rectas, o de rectas y parábolas, o entre funciones polinómicas, es posible reconstruir la OML_{FQ} de las funciones racionales, y así podríamos continuar y elegir otros posibles caminos de estudio.

Las posibles respuestas a Q_0 se corresponden con posibles recorridos que paulatinamente aportan resultados parciales a $R^{\heartsuit}$ como resultado de todo el proceso. En el marco de esta investigación se han ejecutado además, otros tres recorridos que permiten: estudiar las funciones polinómicas de grado dos, las funciones polinómicas; y también las funciones racionales (Gazzola, Llanos, Otero, 2011; Llanos, Bilbao, Otero, 2011; Llanos, Otero, 2011; Llanos, Otero, Bilbao, 2011; Otero, Llanos, 2011). Los recorridos abordados al momento, en el marco de esta investigación, pueden sintetizarse en el siguiente esquema.



Esquema 1: Posibles recorridos de investigación, desarrollados en el marco del REI.

El diseño propuesto parte de Q_1 y consta de un conjunto de diez situaciones. Las tres primeras, se basan en la adaptación de una ingeniería propuesta por Régine Douady (1986, 1999, 2010, 2011) para estudiar los signos de las funciones polinómicas. En nuestro caso, el inicio del recorrido que se propone va más allá del análisis de signos y permite obtener la curva (parábola) que resulta de la multiplicación geométrica de dos rectas. El análisis de los signos es una información más entre las características que es necesario construir. Luego de estas situaciones se avanza en la multiplicación algebraica de las rectas, cuestión de la que no nos ocupamos en este trabajo. Además el estudio de Q_1 involucra dos actividades de síntesis a cargo de los estudiantes, tres instancias de familiarización correspondientes a las tareas, dos síntesis parciales proporcionadas por el docente, y dos evaluaciones escolares. El esquema 2 permite interpretar cómo se ha efectuado el recorrido que parte de la multiplicación de las rectas, cómo se recuperan las cuestiones y los conceptos construidos, al mismo tiempo que permite explicar cómo se relacionan los conceptos que se van construyendo en el trayecto por la cuestión Q_1 y las cuestiones que de esta se derivan.



Esquema 2: Descripción del recorrido generado a partir de Q_1

Este trabajo describe los resultados obtenidos de la primera parte del recorrido, a partir de las tres primeras situaciones, relativas a la multiplicación geométrica de las rectas. Aquí resulta muy importante describir y analizar los alcances y limitaciones de las técnicas que se construyen no sólo para obtener la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado dos, sino también para los demás recorridos generados en el marco del REI.

4.1 Sobre la multiplicación geométrica de las rectas:

El REI parte de la multiplicación geométrica de las rectas. Las tres primeras situaciones permiten construir una gráfica razonable para *h* que resulta de multiplicar dos rectas, y las variantes entre estas se dan en las diferentes rectas. En todos los casos $h = f \cdot g$. Las cuestiones propuestas en estas situaciones son:

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje x. La función $h = f \cdot g$.

Situación 1 **Situación 2** **Situación 3**

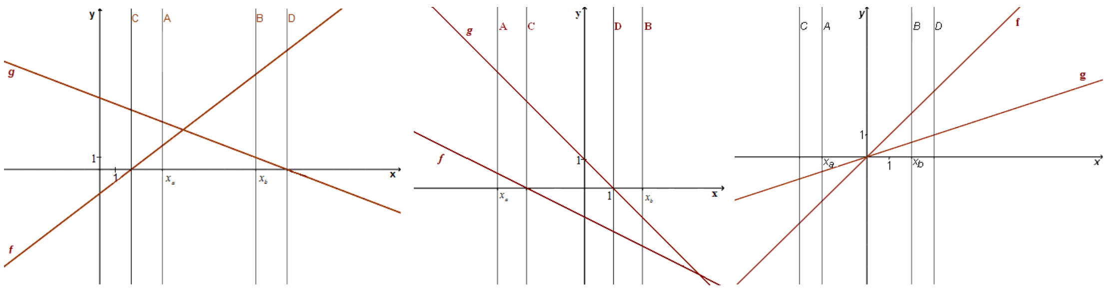


Figura 1: Gráficas correspondientes a las a las funciones f y g de las situaciones 1, 2 y 3.

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?

(b) Para todo x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función,* $\overline{CA} = \overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$*? ¿Podrías justificar?*

(c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?

Estas situaciones permiten construir los puntos notables y una gráfica aproximada para la curva parábola. Para ello es necesario identificar los signos (C^+ y C^-) de *h*, a partir de las gráficas de *f* y *g*, los puntos seguros de *h* (ceros, unos, menos uno, múltiplos de la unidad), justificar la simetría de la curva (identificar el eje de simetría, identificar los puntos simétricos), construir el vértice de *h*, y también es posible construir geométricamente cualquier punto para *h*. Para describir los alcances del problema propuesto, se propone explicitar las técnicas que permiten generar la gráfica para *h* a partir de la primera situación. Los demás casos estarán contemplados en los resultados obtenidos de la puesta en obra en el aula.

4.2 Sobre las características de *h* y la construcción de puntos notables

La información proporcionada en el problema (la representación gráfica de *f* y *g* y la unidad en los ejes) permiten obtener en principio algunos *"puntos seguros",* en el decir de los estudiantes, y el análisis de los signos de *h*, a partir de los signos de *f* y *g*. Partiendo de que $h = f \cdot g$, es posible identificar cuatro puntos, que se identifican con (×), que los estudiantes denominan “los ceros y los unos” y son seguros porque:

$$f(x_c) = 0 \Rightarrow h(x_c) = 0 \cdot g(x_c) = 0$$
$$g(x_d) = 0 \Rightarrow h(x_d) = f(x_d) \cdot 0 = 0$$
$$f(x_i) = 1 \Rightarrow h(x_i) = 1 \cdot g(x_i) = g(x_i)$$
$$g(x_b) = 1 \Rightarrow h(x_b) = f(x_b) \cdot 1 = f(x_b)$$

además los signos de las funciones *f* y *g*, determinan los signos de *h*.

$$\forall x \in (-\infty; x_c) \;\; f < 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h < 0$$
$$\forall x \in (x_c; x_d) \;\; f > 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h > 0$$
$$\forall x \in (x_d; +\infty) \;\; f > 0 \text{ y } g < 0 \Rightarrow h < 0$$

En la Figura 2 se identifican los signos, ceros y unos. Es posible obtener otros puntos, pero resulta de fundamental importancia probar primero que $h(x_a) = h(x_b)$ para obtener también por construcción los puntos simétricos a los antes mencionados.

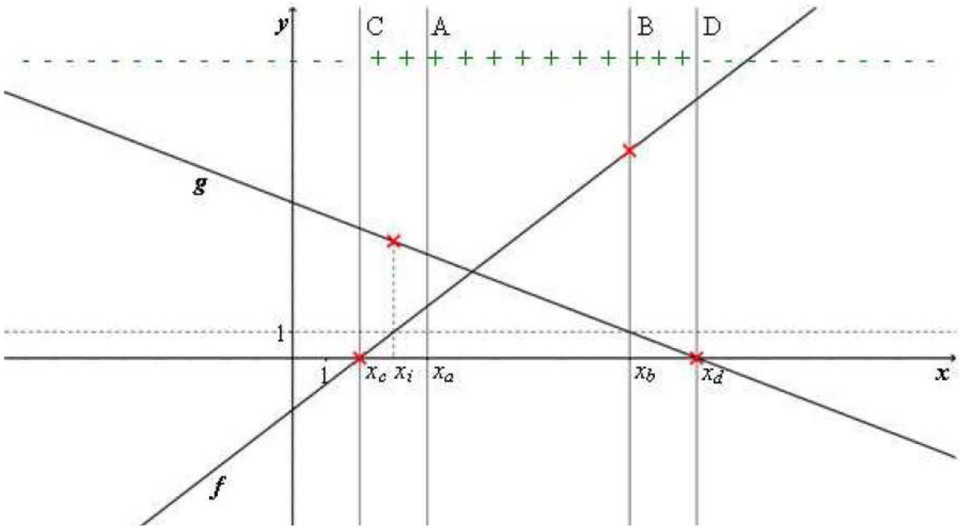


Figura 2: identificación de cuatro puntos seguros y de los signos de *h*

Para realizar la prueba por la simetría de la curva, es necesario construir triángulos semejantes sobre los segmentos x_a y x_b, que son puntos que equidistan de los ceros. Se nombra, por ejemplo, a $f(x_a) = y_a$, $f(x_b) = y_b$, $g(x_a) = y'_a$, $g(x_b) = y'_b$ y se construyen dos pares de triángulos semejantes determinados por estos segmentos. En la Figura 3 se identifican los triángulos, y por las relaciones entre los ángulos de los triángulos construidos es posible afirmar que los pares de triángulos azules y verdes son semejantes entre si. Además el enunciado indica que los segmentos $\overline{CA} = \overline{BD}$, se nombra a esta longitud como *z* y la que es común a ambos triángulos *w*.

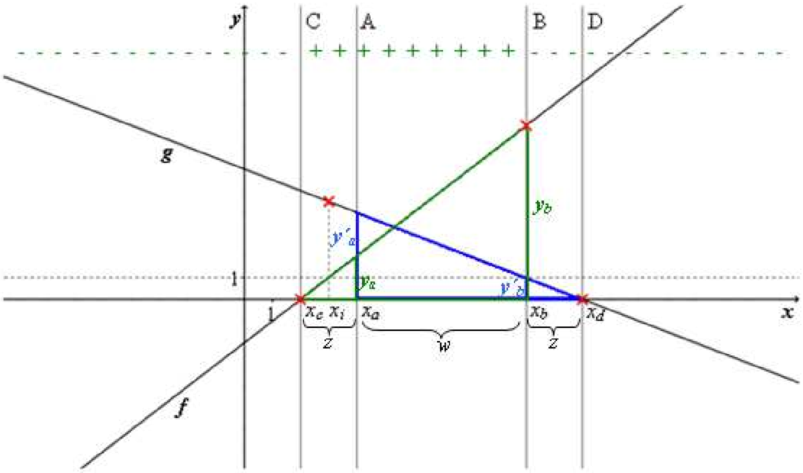


Figura 3: Identificación y ubicación de los triángulos semejantes sobre x_a y x_b

Como los pares de triángulos son semejantes, es posible por el teorema de Thales plantear la proporción entre los lados de los triángulos:

$$\begin{array}{l} Azules: \dfrac{y'_a}{y'_b} = \dfrac{w+z}{z} \\ Verdes: \dfrac{y_b}{y_a} = \dfrac{w+z}{z} \end{array} \Rightarrow \dfrac{y'_a}{y'_b} = \dfrac{y_b}{y_a} \Rightarrow y'_a \cdot y_a = y'_b \cdot y_b \Rightarrow g(x_a)\cdot f(x_a) = g(x_b)\cdot f(x_b);$$

$h(x_a) = h(x_b)$ $\forall x_a$ y $\forall x_b$ equidistantes de los ceros de *h*. Entonces *h* es simétrica, con respecto a un eje vertical que se encuentra en la mediatriz de los ceros de x_c y x_d respectivamente y se denomina "eje de simetría".

La prueba por la simetría de la curva permite además obtener otros puntos seguros, los simétricos de $h(x_i)$ y $h(x_b)$que ya se han identificado como puntos seguros. En la Figura 4 se agrega la construcción del eje de simetría y los puntos simétricos (×).

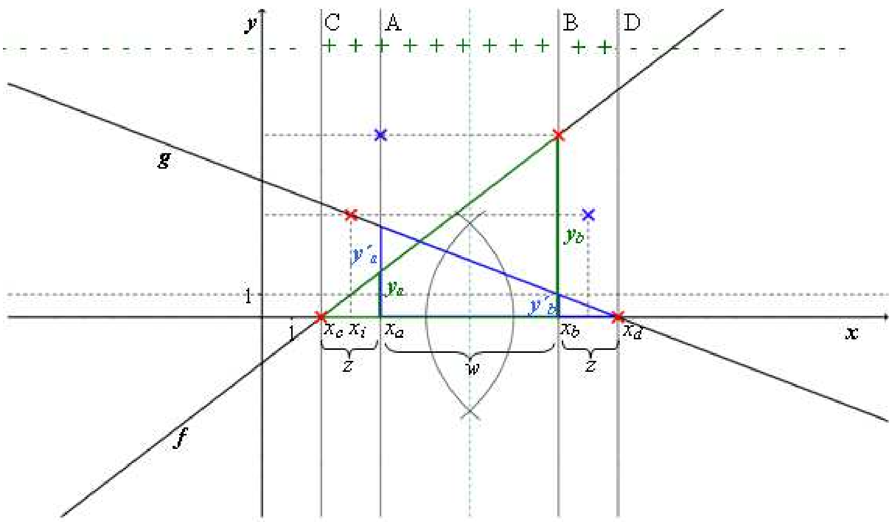


Figura 4: Representación del eje de simetría y de los puntos simétricos de x_i y x_b.

Para aumentar la precisión sobre las características de la gráfica de *h*, es posible recuperar el razonamiento utilizado para la identificación de puntos seguros de la Figura 2, que, puede ser generalizado para cualquier múltiplo de la unidad que se quiera construir. Dicha "ampliación" permite determinar otros puntos, a partir de los múltiplos de la unidad: "los menos unos, los dos", etc.; identificados (×) en la Figura 5. Por ejemplo, los menos unos y los dos quedan así justificados:

$$f(1) = -1 \Rightarrow h(1) = f(1) \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -1 \cdot g(1) \Rightarrow h(1) = -g(1)$$

$$f(x_a) = 2 \Rightarrow h(x_a) = f(x_a) \cdot g(x_a) \Rightarrow h(x_a) = 2 \cdot g(x_a)$$

Se obtienen los simétricos de estos puntos y lo mismo ocurre con el -1 y el 2 para la recta *g*. Podrían también identificarse otros puntos: los tres, los menos dos, etc. tantos como sea necesario.

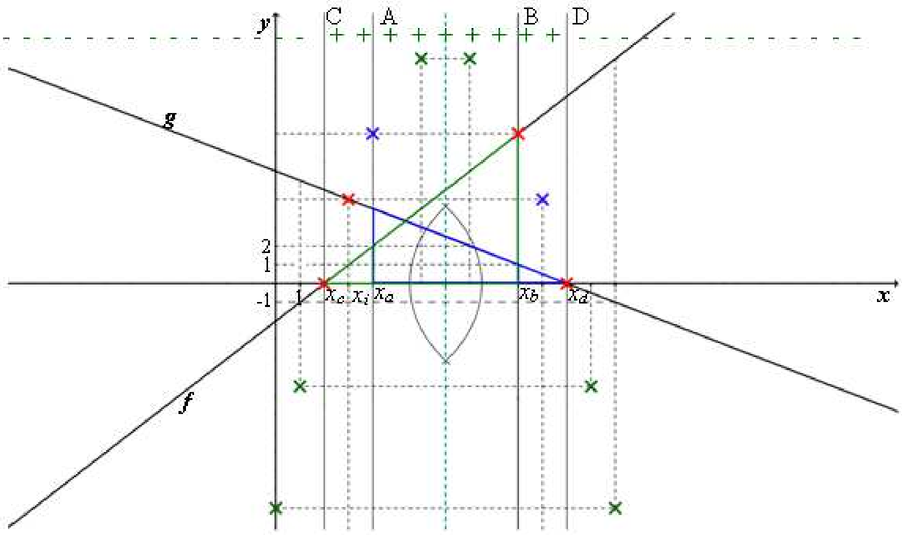


Fig. 5: Representación de los múltiplos de la unidad.

El incremento de puntos seguros permite "mejorar" las características de la gráfica de *h*, pero esta técnica tiene algunas limitaciones: sólo permite obtener los puntos seguros que son múltiplos de la unidad, y no permite conocer la intersección de *h* en el eje de simetría; no es posible obtener el vértice de *h*. Este problema puede ser superado a partir del ítem c) que propone construir triángulos semejantes utilizando como datos la unidad. En la Figura 6 se identifican los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría y se los nombra a y b respectivamente. Con a y la unidad se construye un triángulo. Trasladando el segmento b al eje *x*, se construye otro triángulo semejante al anterior y el segmento que se obtiene se nombra *c*. Por construcción los triángulos son semejantes y por lo tanto sus lados proporcionales:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow c \cdot 1 = a \cdot b \,;$$

c es el resultado de realizar la multiplicación entre los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría.

El problema de la multiplicación geométrica de las rectas requiere validar cada punto notable de la parábola. Los ceros, la prueba por la simetría, el eje de simetría y el vértice son objeto de construcción. Los estudiantes poco a poco van obteniendo distintas informaciones sobre la gráfica de *h*, puntos seguros y signos principalmente; y también consiguen realizar la prueba por la simetría y obtener la construcción del vértice. Los resultados obtenidos de las implementaciones permiten justificar la relevancia de las técnicas indicadas en este apartado.

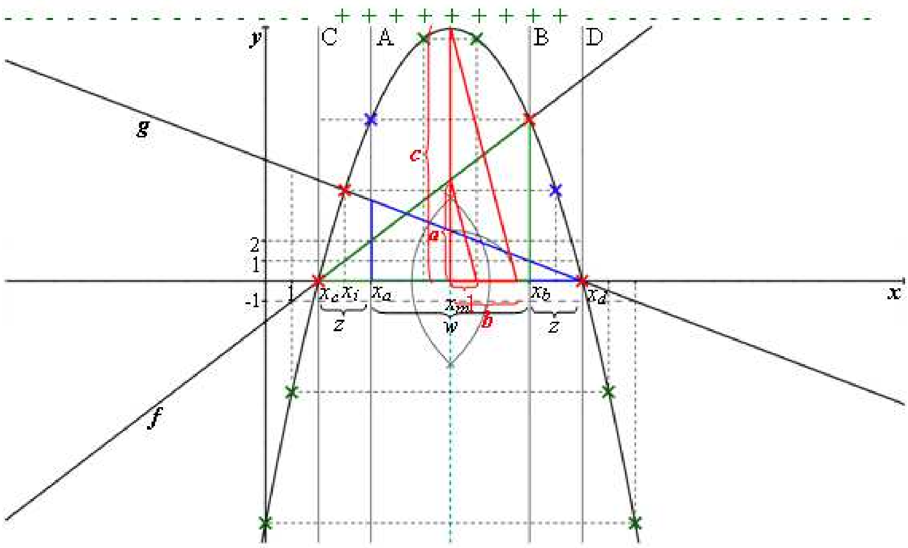


Figura 6: Construcción geométrica del vértice y representación gráfica de *h*.

4.3 Sobre la puesta en obra del REI:

Las situaciones analizadas en este trabajo difieren en las rectas que se multiplican en cada caso. La información de la que disponen los estudiantes siempre es la misma. Entre las discusiones que dieron origen al problema de obtener la gráfica de *h*, pueden mencionarse:

- Los estudiantes intentan buscar primero las expresiones algebraicas de *f* y *g*, luego *h*. No logran obtenerlas porque no tienen seguridad de los puntos que buscan para construir las expresiones de las rectas.
- También consideran que la intersección entre *f* y *g* es un puto notable para *h* y aseguran que la gráfica pasará por dicho punto. Esta idea es desestimada más adelante porque eso ocurriría solamente si la intersección entre las rectas se dan en (*x*;1). Aparecen dentro de este problema los casos de los grupos que consideran que *h* es una recta que pasa por ese punto, o los que saben que además tendrá que pasar por los ceros de *f* y *g* y dibujan la gráfica de *h* con la forma de un “pino” cuyo extremo se encuentra en dicha intersección.
- En algunos grupos, la pregunta por la simetría genera la intuición de que algo importante relacionado con *h* ocurre en el punto medio de los ceros; y hasta indican a *h* como una recta vertical en ese punto.

Progresivamente y superando las “respuestas no tan adecuadas” los estudiantes consiguen identificar algunos puntos notables y analizan también los signos de *h*. La identificación de los puntos seguros y signos presentó algunas dificultades, sobre todo al inicio, dado que las respuestas requieren de un tiempo “de maduración”, de avances, y retrocesos, de una adecuada distribución de responsabilidades, de discusiones, de acuerdos.

Otra cuestión crucial, aunque más compleja para los estudiantes, es relativa a la prueba por la simetría de la curva. En todas las implementaciones ha sido posible obtener dicha prueba, pero siempre con la dificultad de los estudiantes para identificar los segmentos que permiten construir los triángulos semejantes para probar la simetría de la curva por medio del Teorema de Tales. En todos los casos ha sido necesaria la intervención del profesor para ayudar a los alumnos a identificar los segmentos de *f* y *g* en x_a y x_b respectivamente, y a partir de ahí son los alumnos quienes realizan las construcciones. Los alumnos realizan algunas inferencias que les permite "asegurar" que el valor de *h* en el eje de simetría es único (y el "mayor o menos" según el caso), pero no consiguen obtener ese punto hasta tanto no avanzan con el problema de la construcción geométrica del vértice.

Para la construcción del vértice toda la clase discute y comparte los resultados que se ajustan más a la respuesta del problema. Se genera discusiones relativas a las posiciones de los segmentos de las rectas y la unidad, cuestión que se termina resolviendo por recurrencia al análisis de signos. Este análisis da lugar a los estudiantes a explicitar la técnica que permite calcular la multiplicación entre dos segmentos en cualquier abscisa. En algunos casos deciden también realizar la construcción en otros puntos además del vértice, lo que permite aumentar la cantidad de puntos seguros y su certidumbre de obtener una gráfica más precisa para *h*. La construcción correspondiente a la situación 1 se ha tomado como caso para describir las técnicas que se requieren construir para obtener una respuesta al problema de la multiplicación geométrica de las rectas. En esa situación las rectas que se multiplican tienen pendientes con signos opuestos, *f* y *g* ceros distintos y *h* tiene un máximo. En la situación 2 las rectas tienen ceros distintos, pendientes con igual signo y *h* alcanza un mínimo. El protocolo A56 de la figura 7 corresponde a la situación 2. En este protocolo el estudiante identifica los signos, los puntos seguros (los ceros, unos, los menos dos y los menos uno), realiza la prueba por la simetría de la curva y la construcción geométrica del vértice. La gráfica que obtiene para *h* es muy aproximada.

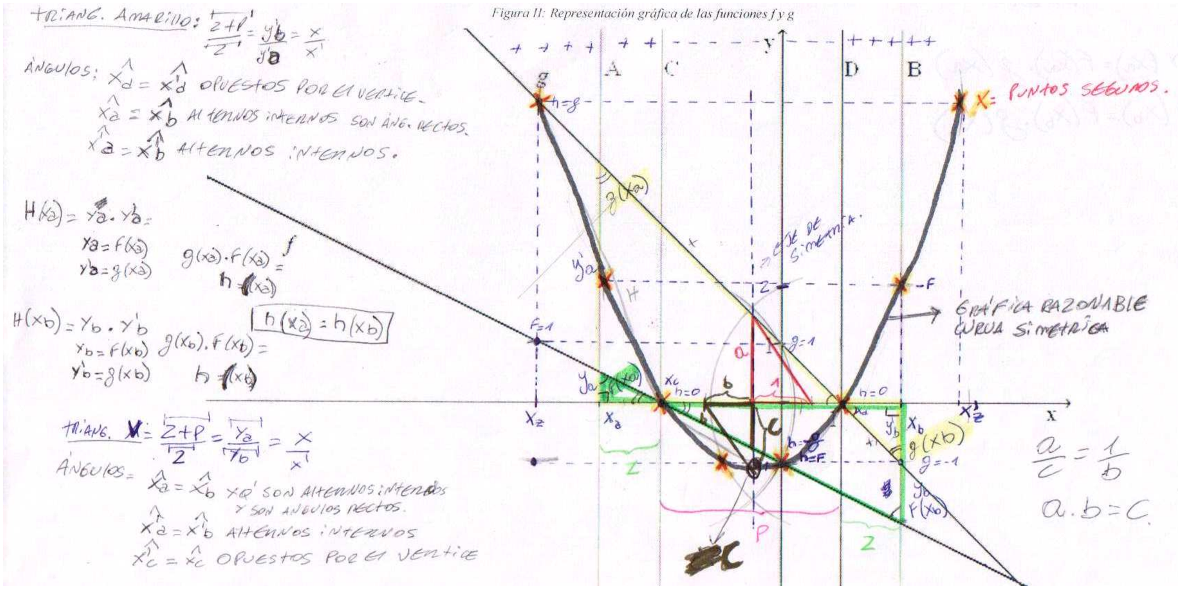


Figura 7: Protocolo correspondiente al alumno A69. Implementación 3.

Con la situación 3 se introduce el problema de la multiplicidad de los ceros. Se analizan las características de la gráfica de *h* con dos ceros reales iguales. En esta situación el vértice de la parábola coincide con los ceros de las rectas. Los estudiantes continúan identificando los signos y los puntos seguros (ceros, unos y en algunos casos, los múltiplos de la unidad). En el protocolo A136 correspondiente a la figura 8, se interpreta la importancia de la técnica construida en principio para la obtención del vértice de la parábola que luego fue generalizada para cualquier punto de *h*. Este alumno consiguió identificar no sólo los signos y puntos seguros (ceros y unos); sino que además pudo agregar por construcción cuatro puntos más que le permitieron mejorar las características de la gráfica de *h*, utilizando la generalización de la construcción del vértice de *h* para cualquier otro punto.

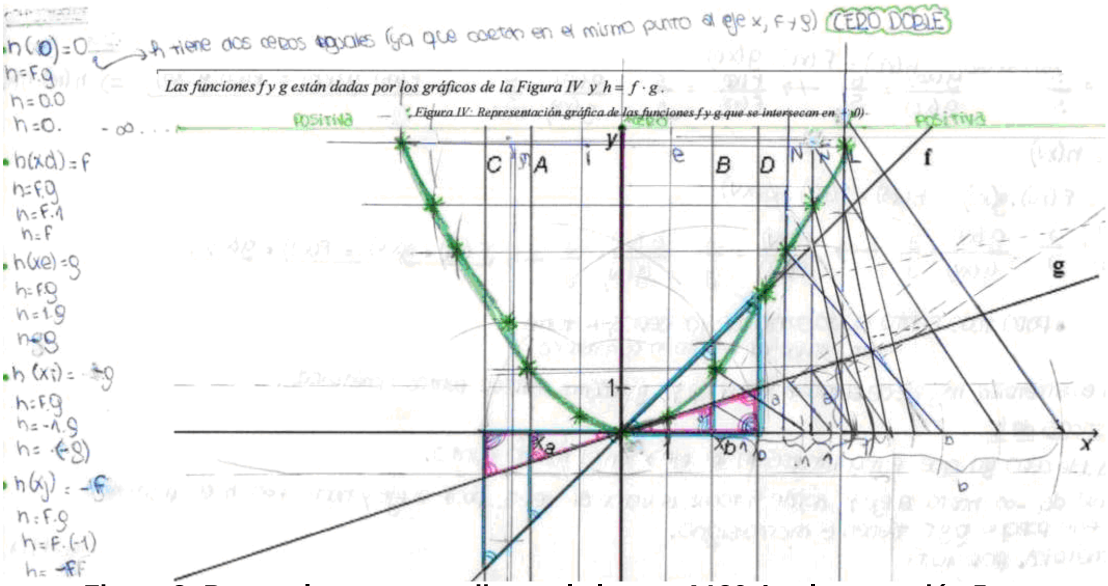


Figura 8: Protocolo correspondiente al alumno A136. Implementación 5

El inicio del recorrido propuesto permitió introducir las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela secundaria de una manera que se aparta de la tradicional. La generatividad de la cuestión inicial propuesta en el REI, planteada en el dominio geométrico-gráfico, da sentido a los puntos notables de la parábola y a las características generales de la representación gráfica de dicha función. Además las técnicas generadas como iniciación del recorrido pueden ser generalizadas y recuperadas en los demás recorridos generados por Q_0.

4.4 Sobre la generatividad de las técnicas construidas:

La cuestión Q_0 permite alcanzar diversos recorridos de estudio. El problema de la multiplicación geométrica de las rectas permitió construir técnicas para obtener la representación gráfica de las parábolas. La cuestión generatriz y los resultados obtenidos con las primeras situaciones en Q_1 dan lugar también a otros posibles trayectos de estudio relativos a Q_2 y Q_3 respectivamente.

Con Q_2 se amplían los resultados obtenidos en Q_1, de manera tal que, multiplicando tres rectas, rectas con parábolas, parábolas con parábolas; se obtiene por construcción la representación gráfica de las funciones polinómicas. En el recorrido correspondiente a Q_2 las tres primeras situaciones son variantes de problema de obtener la multiplicación geométrica de las curvas, y se espera obtener la gráfica para $p = f \cdot g \cdot j$ o $p = f \cdot h$ según corresponda:

Situación 1 **Situación 2** **Situación 3**

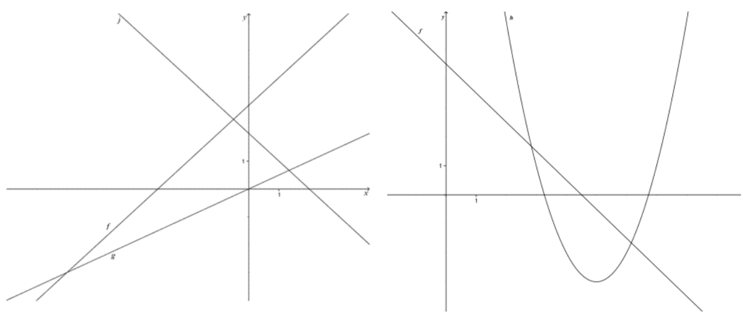


Figura 9: Gráficas de las funciones correspondientes a las situaciones 1, 2 y

(a) ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de p? ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para p?

(b) ¿Qué características de la gráfica de p podrías justificar?

Como ocurre con la multiplicación geométrica de las rectas, la obtención de la curva de *p* resulta de la identificación de los puntos seguros (signos C^+ y C^-, ceros, unos, múltiplos de la unidad) y en algunos casos también la construcción de triángulos semejantes, utilizando como información la unidad en el eje x. Las estrategias de cálculo geométrico generadas en Q_1 son recuperadas por los estudiantes sin inconvenientes para estos casos.

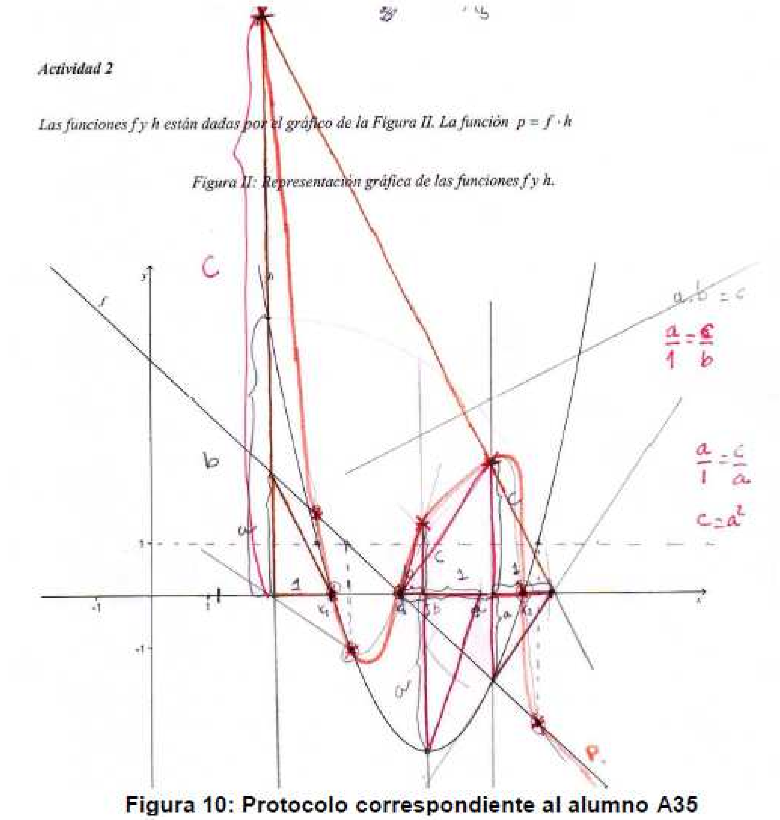


Figura 10: Protocolo correspondiente al alumno A35

Del mismo modo, también ha sido posible continuar el recorrido generado por el cociente de polinomios, lo que permitió construir las características de la representación gráfica de las funciones racionales (*q*). Q_3 parte del cociente de funciones polinómicas. Las dos primeras situaciones son variantes del problema dividir geométricamente dos curvas. En cualquier caso se busca obtener la gráfica más razonable para *q:*

Situación 1 **Situación 2**

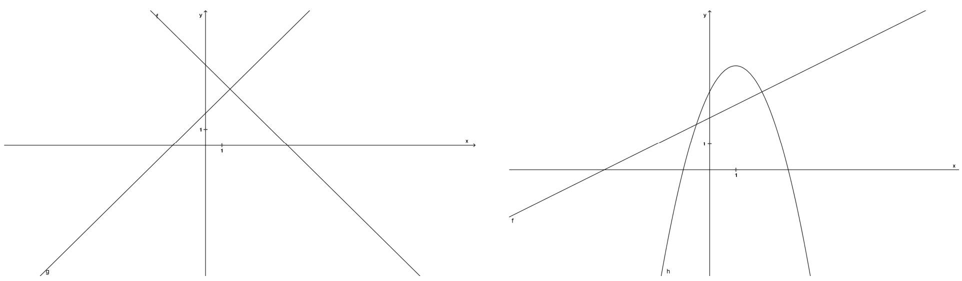


Fig. 11: Gráficas de las funciones correspondientes a las situaciones 1, 2

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q?

(b) ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?

La obtención de la curva más razonable para la función racional *q* se logra a partir de la identificación de los signos (C^+ y C^-), los puntos seguros (los ceros, los unos, los menos unos), y también es posible obtener otros puntos seguros a través de la construcción geométrica que se retoma de los recorridos anteriores, a partir de los triángulos semejantes utilizando como dato la unidad en los ejes.

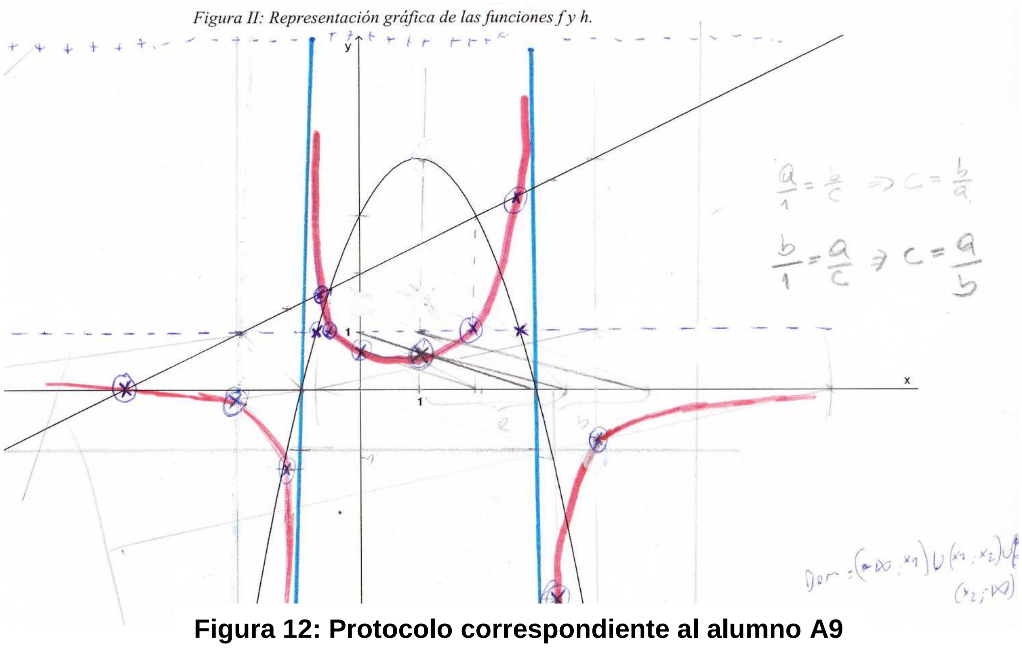


Figura 12: Protocolo correspondiente al alumno A9

Entre las características de la gráfica de *q*, resulta interesante analizar el caso de la división por cero, dado que en los recorridos que preceden, este aspecto no ha sido considerado porque los estudiantes tratan con la multiplicación entre curvas y no con el cociente como ocurre en este caso. Se pone énfasis entonces en la identificación de los puntos donde la función divisor se hace cero y se analiza el posible comportamiento de la gráfica razonable para *q* en los puntos próximos al "cero del denominador", debido a que en este punto hay una asíntota vertical.

Los resultados construidos en un recorrido de estudio derivado de Q_0, pueden recuperarse y reutilizarse en otros derivados de la misma cuestión. Q_0 ha permitido construir las organizaciones matemáticas relativas a las funciones polinómicas de grado dos y mayor, y también la organización matemática de las funciones racionales. Las técnicas desarrolladas para las primeras situaciones permiten interpretar el alcance de las mismas para obtener cualquier representación, a partir de la multiplicación o cocientes de curvas.

5. Conclusiones

En este trabajo se han presentado algunos resultados de la inserción de un REI en la escuela secundaria. La generatividad de la cuestión planteada ha permitido no sólo la emergencia de un posible recorrido que permite estudiar con sentido las funciones polinómicas de segundo grado, sino que recuperando estrategias de resolución similares, ha legitimado también el encuentro con organizaciones matemáticas relativas al estudio de las funciones polinómicas y de las funciones racionales.

La variedad y calidad de resultados obtenidos al cabo de las seis implementaciones permiten afirmar que los resultados son auspiciosos. El recorrido generado por la multiplicación geométrica de las rectas permitió:

- Construir una representación gráfica de la parábola, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen.
- Un resultado interesante, es el papel que adquieren los puntos notables cuando sólo se dispone de la unidad en los ejes y lo mismo ocurre con el análisis de signos, tarea que los estudiantes realizan en acto desde el inicio, pues necesitan hipotetizar una curva, y en este análisis, se destaca la relación entre los ceros y el cambio o no de signo. Esta cuestión también es fundamental en los recorridos que continúan.
- Otro aspecto muy importante es relativo a la justificación del vértice y la simetría de la curva. En el marco de una pedagogía de la investigación, la obtención de dichos puntos notables no pueden reducirse a una imposición ostensiva, como ocurre en la enseñanza tradicional. El retorno a la geometría hace posible obtener por construcción el eje de simetría y el vértice de una parábola.
- La construcción geométrica del vértice no sólo resulta imprescindible por la relevancia que dicho punto notable adquiere en la representación de una parábola, sino también por la generalidad y la generatividad que dicha construcción tiene. Esta técnica permite multiplicar o dividir cualquier segmento de cualquier representación gráfica, y por lo tanto en el marco de esta

investigación ha permitido construir cualquier punto para mejorar las características de las representaciones gráficas estudiadas.

Cada recorrido continúa y va más allá de la representación gráfica de las funciones como iniciación del proceso de estudio. La multiplicación algebraica también permitió obtener resultados significativos. La potencialidad de los conceptos construidos y de los instrumentos adquiridos revela los alcances del dispositivo propuesto.

La ejecución de recorridos de estudio y de investigación en la escuela secundaria no ha sido una tarea sencilla. Las limitaciones que se han presentado están relacionadas con el proceso de inserción de la "nueva" pedagogía en la escuela secundaria, dado que requiere de modificaciones fuertes en el contrato didáctico tradicional: el profesor ya no "explica", no es garante del saber, no impone sus ideas, ni sus tiempos. Aquí ha sido el responsable de presentar una "buena cuestión", que desencadena diferentes recorridos de estudio que tienen que ser construidos por y en la clase. Otra restricción es relativa a la "dilatación del tiempo escolar". La necesidad de enfrentar el problema de una "dilatación" considerable del tiempo didáctico, resulta ampliamente compensada no sólo por la ganancia que supone el haber logrado hacer vivir, al menos parcialmente algunos elementos de la *pedagogía de REI*, sino por la amplitud y la generalidad de los conceptos construidos.

La viabilidad de los dispositivos tipo REI está justificada por la diversidad recorridos posibles y la generalidad y el alcance que tienen las técnicas que se construyen. Además la inserción de este dispositivo posibilita la instalación escolar de algunos elementos de la *pedagogía de la investigación,* siempre que se disponga de una infraestructura escolar que lo permita.

Referencias

Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2012). *Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación*. Actas III CITAD. Disponible en http://www.crm.es/Publications/Documents/Documents_10.pdf, pp. 553-578 ISSN 2014-2331. Bellaterra, Barcelona.

Chevallard, Y. (1985) La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l´éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2006). *Les mathématiques à lécole et la révolution épistémologique à venire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32

Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. European Research in Mathematics Education I: Group 1. pp. 113-124

Douady, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero.

Douady, R. (2011) Géométrie, graphiques, fonctions au college. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*. 6(1), pp 1-7. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) "*Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación* (*AEI*)". Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 493-500. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible: http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2011) *Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 501-508. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). *"Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)"*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 nº1, pp 102-112. ISSN 1850 - 6666 / NIECYT. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Llanos, V. C.; Bilbao, M. P.; Otero, M. R. (2011) *"Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva"*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, F. de Cs. Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 486-492. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas.

Marietti, J. (2009). *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathematiques et ailleurs. Une étude préparatoire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2011) *"La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones"*. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del 8 al 11 de Noviembre de 2011. pp. 15-23. ISBN 978-950-658-284-5. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Viviana Carolina Llanos es Licenciada en Educación Matemática y Profesora de Matemática por la UNCPBA. Actualmente es doctoranda del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, UNCPBA. Es Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Es Investigadora del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Es secretaria de redacción de la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). vcllanos@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero recibió Posdoctorado por la Université Paris V. René Descartes-Sorbonne. (2009-2010). Es Doctora por la Universidad de Burgos. Es Magister en Educación, UNICEN-UNICAMP. Es Profesor en Matemática y Física, UNCPBA. Actualmente es Investigadora Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y Coordinadora de la Comisión Asesora en Psicología y Ciencias de la Educación, CONICET, 2011-2012. Es Profesor Asociado de la Facultad de Ciencias Exactas. Es Directora del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (NIECyT). Es Investigador categoría I. Coordina el Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y la matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. http://docensci.sites.exa.unicen.edu.ar/. Edita la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/