UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2012, Número 30, páginas 101-123
ISSN: 1815-0640

Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza

Lorenzo J. Blanco Nieto, Luis C. Contreras González

Resumen

Este trabajo se ubica en el marco del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) desarrollado por el equipo de Deborah Ball en la Universidad de Michigan. Se hace una breve revisión de la evolución de este marco teórico a partir de los trabajos de Lee Shulman y se exponen diversas experiencias prácticas de formación de profesores de matemáticas realizadas en España, una de las cuales se describe con detalle. Se ejemplifica con actividades de formación de maestros una forma de desarrollar el conocimiento del profesor en cada una de las subcategorias del MKT. Ello supone una reformulación de los trabajos realizados por los autores al amparo del marco teórico señalado.

Abstract

The theoretical framework of the present study is that of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) developed by Deborah Ball's team at the University of Michigan. The evolution of this framework is briefly reviewed starting with the work of Lee Shulman, and some practical experiences in mathematics teacher education in Spain are presented, one of which is described in detail. Examples of primary teacher education activities illustrate one form of developing teachers' knowledge in each of the MKT subcategories. For the authors, this approach represents a reformulation of their work to be coherent with the aforementioned theoretical framework

Resumo

Este trabalho situa-se no enquadramento do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) desenvolvido pela equipa de Deborah Ball na Universidade de Michigan. Depois de se fazer uma breve revisão da evolução deste enquadramento teórico desde os trabalhos de Shulman, expõem-se diversas experiências práticas de formação de professores de matemática realizadas em Espanha, uma das quais se descreve em pormenor. Para isso, exemplifica-se com activdades de formação de professores primáriosuma forma de desenvolver o conhecimento do professorem cada uma das subcategorias do MKT naquilo que pressupõe uma reformulação dos trabalhos realizados pelos autores suportado pelo enquadramento teórico referido.

1. Introducción

Breve repaso a las aportaciones sobre el conocimiento del profesor

Uno de los trabajos probablemente más citados en el ámbito del conocimiento del profesor es el de Lee Shulman en sus distintas reformulaciones (Shulman, 1986, 1987; Grossman, Wilson y Shulman, 1989). Ball, Thames y Phelps (2008) afirman que existen más 1200 referencias de esos trabajos en diversas revistas especializadas y de diferentes disciplinas. Ello es, de alguna manera, una garantía de la vigencia de este marco teórico, del que, en una primera instancia, nos gustaría resaltar que establecía dos grandes componentes en el conocimiento del profesor; una referida a aspectos generales (conocimiento pedagógico general, conocimiento de las características de los aprendices, conocimiento del contexto educativo y conocimiento acerca de ojetivos educativos y valores), y otra referida al contenido específico que el profesor enseña (conocimiento del contenido, conocimiento del curriculum y conocimiento didáctico del contenido[1]).

Esta vigencia señalada no es óbice para que algunos autores hayan propuesto algunas reformulaciones que, probablemente, enriquecen el marco teórico. Así, por ejemplo, Meredith (1995) ha reclamado la inclusión dentro del PCK de formas alternativas[2] de enseñanza; Fennema y Franke (1992) han mostrado la ausencia en este modelo de las concepciones y creencias de los profesores acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje y de las interacciones que se producen en el aula o de la naturaleza dinámica del conocimiento del profesor; Ball et al. (2008) han tratado de aclarar la frontera difusa que Shulman establece entre el conocimiento del contenido (SMK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK); Hashweh (2005) ha planteado la necesidad de establecer relaciones entre las categorías de Shulman, relaciones que sí han estudiado en el proyecto SKYMA (Subject Knowledge in Mathematics)(Rowland, 2005, 2007; Rowland, Huckstep and Thwaites, 2003), desde la propia práctica de los profesores, desde una perspectiva integradora que permite describir la práctica en acciones que explican el conocimiento del profesores desde cuatro categorías: fundamentos (*Foundations*), Transformaciones (*Transformations*), conexiones (*Connections*) y conteningencias (*Contingency*). Cabe citar también el Simposio sobre 'avances iberoamericanos en el Conocimiento Didáctico de Contenido', que se celebró en 2009 en Barcelona dentro del VIII Congreso de Enseñanza de las Ciencias[3].

Una de las ideas que ha permenecido hasta ahora es la identificación del conocimiento de la disciplina para la enseñanza como algo específico dentro de las diferentes aportaciones; en particular, en el ámbito de la educación matemática, del conocimiento matemático para la enseñanza. Es difícil entender que un profesor pueda enseñar matemáticas si no tiene un conocimiento adecuado de ellas, pero ese conocimiento va más allá de la propia matemática[4], es de diferente naturaleza del conocimiento matemático que utilizan otros profesionales (Blanco y Contreras, 2002).

En los últimos 15 años, los proyectos MTLT (Mathematics Teaching an Learning to Teach) y LMT (Learning Mathematics for Teaching), de la Universidad de

[1] La expresión *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Shulman, 1986) fue traducida inicialmente al castellano como *Conocimiento de Contenido Pedagógico* (Llinares, 1991; Blanco, 1991). Posteriormente, se utilizó la expresión *Conocimiento Didáctico del Contenido* (Marcelo, 1993; Mellado y Carracedo, 1993) que adoptamos desde 1995 (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995) y que, actualmente, es la que mayor aceptación tienen en los trabajos actuales sobre el tema. Recientemente ha sido traducida, también, como *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (Gómez, 2007).
[2] Alternativas a métodos tradicionales, como aquellas en las que el aprendiz es visto como constructor autónomo de su conocimiento y de los significados de la materia.
[3] Enseñanza de las Ciencias, Número Extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias, Barcelona. http://ice.uab.cat/congresos2009/eprints/cd_congres/propostes_htm/htm/inici.htm
[4] Entendida desde las perspectivas sustantiva y sintáctica establecida por Schwab (1978).

Michigan (Ball, Thames y Phepls, 2008; Ball, Hill, y Bass, 2005) han trabajado en una reelaboración del modelo de Shulman desde la perspectiva de determinar las características de este conocimiento específico. Manteniendo las dos grandes categorías de Shulman (SMK y PCK), han subdividido cada una de ellas en otras tres.

Así, en el ámbito del conocimiento del contenido de Shulman (SMK) han emergido el conocimiento matemático común (CCK), el conocimiento matemático especializado (SCK) y el conocimiento del horizonte matemático (de características similares a la categoría *connections* de Rowland et al., 2003, 2009); y en el conocimiento didáctico del contenido, por su parte, se mantiene el conocimiento del curriculum que ya estableciera Shulman, y emergen el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). Los propios autores manifiestan el carácter difuso de las fronteras[5] entre algunas de estas subdivisiones, pero si utilizamos este modelo más para comprender las características del conocimiento del profesor que para catalogar su conocimiento en la acción, nos puede ser de utilidad en los procesos de formación de profesores.

2. Algunas aportaciones españolas en el ámbito de la formación del profesorado

Desde una perspectiva integradora, la formación inicial de profesores debe proporcionar a los estudiantes para profesor (EPP) las herramientas, cognitivas y afectivas que les permitan analizar, comprender, diseñar, gestionar y evaluar las situaciones que pudieran presentárseles en su actividad profesional, partiendo de unos contenidos y procesos básicos que debieran ser el núcleo de los programas de nuestras titulaciones.

En referencia a la formación de profesores de Matemáticas, podemos encontrar en España diferentes trabajos que tratan de diseñar tareas para la formación inicial de profesores desde una perspectiva que, en la línea de Ruthven (2011), sería diferenciada, contextualizada, de carácter interactivo y matematizada[6]. Así, García y Sánchez, (2002 a y b), Llinares (2005), Valls, Llinares y Callejo (2006) y Sánchez y García (2009) trabajan con 'entornos de aprendizaje' creados "a partir de tareas diseñadas/seleccionadas por el formador de profesores" mediante una metodología que denominan 'Itinerarios de formación' o 'trayectoria hipotética de enseñanza/aprendizaje'. También, Burgués y Giménez (2006) extienden a la formación inicial de Maestros la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, reconsiderando sus componentes.

Cardeñoso y Azcárate (2002) y Azcárate, (2004) llaman 'ambitos de investigación profesional' al conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptible de ser objeto

[5] Como señalan los autores, la respuesta de un profesor al descubrir un error inesperado (lo que supone una situación de contingencia, en al línea de Rowland et al. 2003, 2009) de uno de sus estudiantes requiere un conocimiento de distinta naturaleza al que se posee relativo al tratamiento de los errores usuales de los estudiantes en un tópico determinado. Este matiz permite diferenciar entre SCK y PCK.
[6] Diferenciada en cuanto el conocimiento matemático que se moviliza es especializado, contextualizada en la medida que se considera el contexto y la realidad del aula, de carácter interativo en la medida que considera los tres elementos del triángulo didáctico y matematizada en cuanto pretende evidenciar los procesos de construcción del conocimiento matemático.

de estudio en procesos formativos y que, a su vez, se establecen como núcleos organizadores del currículo del profesor (Azcárate, 2004). La resolución de estos problemas no es una mera aplicación del conocimiento didáctico-matemático ya elaborado, sino un proceso de construcción de dicho conocimiento (Azcárate, 1999).

Climent y Carrillo (2002) se refieren a situación matemática para la formación inicial para referirse a actividades en las que, partiendo del análisis del contenido matemático de Primaria, los estudiantes reflexionan sobre su enseñanza y aprendizaje, para construir su Conocimiento Pedagógico de la Matemática. Flores (1999) utiliza tareas, generalmente de carácter matemático, que permiten profundizar sobre los conocimientos matemáticos y reflexionar sobre aspectos didácticos, empleando diferentes recursos que permiten validar su conocimiento como base para interpretar las situaciones didácticas.

En Blanco y Contreras (2002) se establecen tres niveles, no secuenciados, de tareas para la formación del profesorado de Matemáticas, en función del contenido de la actividad propuesta y de la/las variables de las componentes del conocimiento de los profesores que se pretenda desarrollar (contenido matemático, sobre recursos y materiales, gestión de la práctica, análisis de producciones y/o errores de los alumnos, etc). Las 'tareas didácticas contextualizadas y personalizadas' serían más amplias y estarían relacionadas con actividades matemáticas analizadas en contextos de enseñanza. Estos niveles, vinculados por la relación de inclusión se establecen en función del trabajo sobre contenido matemático, sobre su enseñanza/aprendizaje y sobre análisis y gestión en el aula (figura 1).

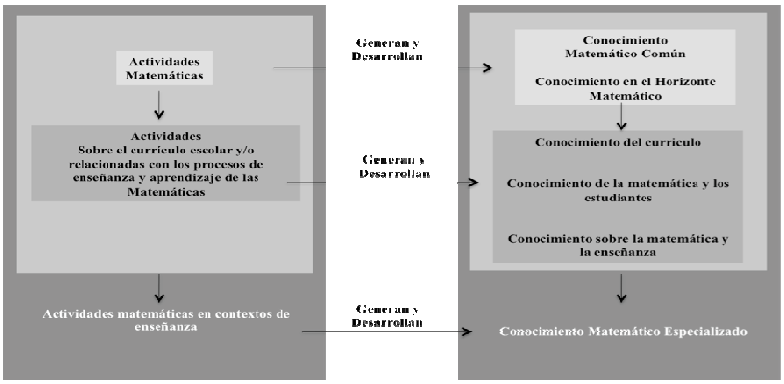


Figura 1. Diferentes niveles de tareas en la formación de profesores de matemáticas. Reformulación de Blanco y Contreras (2002, 106).

Estas tareas deberían tener, al menos, las siguientes características:

- Estar contextualizadas en algunos de los momentos que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje, principalmente en situaciones referidas al aula.
- Provocar algún tipo de reacción por parte del EPP que, desde ese momento, se vincule al desarrollo de la actividad, asumiendo básicamente su papel como profesor.
- Servir de vehículo para la construcción o reconstrucción de conocimiento matemático especializado, de conocimiento de la matemática y los estudiantes o de conocimiento de la matemática y la enseñanza, sirviendo además para tomar conciencia de los procesos de su construcción y para permitir que afloren

conceptos matemáticos y conceptos erróneos y concepciones sobre las matemáticas y sobre su E/A.

- Ayudar a la comprensión de las directrices que emanan de las reformas curriculares, para lo que debemos partir una idea didáctica interesante para la educación matemática, para permitir análisis sobre aportaciones elaboradas de educación matemática." (Blanco y Contreras, 2002, 106-107).

3. Profundizando en las situaciones de enseñana/aprendizaje

Vamos a describir un proceso de enseñanza/aprendizaje coherente entre el planteamiento y la resolución de las situaciones de E/A propuestas y el modelo de aprendizaje que proponemos para los estudiantes para profesores (Blanco, 1998); esto es, entre el modelo didáctico del formador y el modelo didáctico subyacente en la propuesta formativa.

En términos generales, asumimos la importancia de partir de la resolución de tareas/problemas/situaciones didácticas y profesionales como actividad necesaria para aprender a enseñar, que se resolverán en un proceso continuo, y no lineal, de acción-reflexión, en el que tendremos en cuenta la diferente naturaleza de los conocimientos *de* y *sobre* las matemáticas[7] y los conocimientos sobre enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Este proceso permitirá a los futuros profesores construir su propio Conocimiento Matemático Especializado y su Conocimiento Didáctico de las Matemáticas.

La identificación de las cuestiones profesionales relevantes y las reflexiones que de ellas se hagan deben procurar la relación entre la realidad docente y el conocimiento teórico (de fundamentos, para Rowland et al, 2005, 2007), tanto de índole matemático como didáctico. El estudio de caso[8] y las producciones de los alumnos y de los profesores suelen ser una buena fuente de información para la elaboración de estas situaciones problemas, y de ello tenemos múltiples ejemplos en las publicaciones al uso.

El proceso de resolución de la situación planteada debería considerarse a partir de un conocimiento y unas actividades que nos permitan compartir/discutir/negociar/evaluar los conocimientos y significados que los estudiantes van generando, derivados de su implicación en el mismo. Y como consecuencia de ello deberían reinterpretar su conocimiento y experiencias relativas al aprendizaje matemático y a 'su' enseñanza/aprendizaje, para provocar un nuevo conocimiento al que se puede acceder, y generar nuevas concepciones y actitudes en relación a las matemáticas escolares y al proceso de enseñanza/aprendizaje de las mismas (en la línea de las aportaciones al modelo de Shulman de Fennema y Franke, 1992).

[7] Reformulación de Ball (1991) de la propuesta ya citada de Schwab (1978).
[8] "Los casos suelen ser narraciones que describen alguna cuestión relativa a procesos de aprendizaje, o situaciones de enseñanza, contextualizadas en un tiempo y lugar particular (por ejemplo una tarea específica, con unos niños y curso determinado)… De esta manera se consideran como "fotografías" de un momento, de una situación de enseñanza-aprendizaje específica. Los casos proporcionan "informes" de profesores de cómo una determinada decisión instruccional ha funcionado, o cómo identificar un problema de aprendizaje." (Llinares, 1994).

Tenemos que recordar que el currículo de matemáticas nos habla de diferentes tipos de conocimiento de matemáticas. Así, encontramos conocimientos que permiten ser codificados en términos de proposiciones y que, por lo tanto, podrían desarrollarse con esquemas de enseñanza más tradicionales. Mientras que, por otra parte, aparecen contenidos y objetivos de carácter procedimental o actitudinal menos considerados y que los profesores tienen que desarrollar y evaluar en su actividad docente. El aprendizaje y evaluación en cada uno de ellos presenta características propias que tiene que considerarse en este proceso de formación de profesores.

Las actividades propuestas deben favorecer la creación de ambientes de aprendizaje, estimando que "en la misma manera en que nosotros consideramos un ambiente para que los estudiantes puedan aprender a explorar Matemáticas, tenemos que pensar que los EPPs no aprenden el "razonamiento pedagógico" porque les hablemos de ello. El ambiente que generemos tiene que ayudar a los EPPs a construir su propio conocimiento profesional” (Lappan y Theulen-Lubienski, 1994, 252).

En Oliveira y Hannula (2008) se asumen tres ideas para tener en cuenta en la formación de profesores, que nosotros consideramos en nuestro modelo. La primera, es actuar sobre sus creencias, muchas de las cuales son implícitas. Por ello, debemos explicitarlas y reflexionar sobre ellas, generando la oportunidad para que el cambio sea posible (en la línea ya citada de Fennema y Franke, 1992). La segunda, es implicar a los estudiantes para profesores en un proceso contructivista (en la línea propuesta por Meredith, 1995). En la tercera, indica que hay que proveer a los EPPs con experiencias de descubrimiento de las matemáticas que les permitan reconsiderar sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje (Oliveira and Hannula, 2008; Fenema y Franke, 1992). En un sentido similar se expresan Corcoles y Valls (2006) al señalar que “las concepciones de los estudiantes para maestro no sólo han de entenderse como una referencia para la realización de una tarea, sino que, en los programas de formación, hay que intentar implicar a los estudiantes en tareas que les permitan explicitar y contrastar sus concepciones” (Corcoles y Valls, 2006, 9).

Estas actividades tendrán como núcleo aspectos matemáticos que los maestros deben poseer y dominar. Y deben permitir su construcción y contextualización.

La resolución de la actividad exigirá el uso de diferentes dimensiones de las componentes de conocimiento profesional (curriculum, recusos, sobre los alumnos, evaluación, etc.) mediante materiales, físicos e intelectuales, que serán suministrados por el formador de profesores y que permitan reflexionar, analizar, diseñar y fundamentar estrategias de intervención docente. Ello, les permitirá aproximarse a los diferentes dominios del conocimiento señalados por Ball et al. (2008) (CCK, SCK, KCS, KCT, conocimiento sobre el horizonte matemático y conocimiento del curriculum) para fundamentar las opciones y decisiones en su resolución. Además, les permitirá dotar de significado a las actividades propuestas, a los procedimientos desarrollados y a las herramientas utilizadas. Este proceso de teorización permitirá a los profesores fundamentar sus decisiones y su conocimiento profesional.

Además, el progreso de la actividad permitirá el desarrollo del razonamiento pedagógico de los EPPs y la explicitación y reconsideración de sus conocimientos y concepciones previas, ampliando o modificando su conocimiento (especialmente CCK y SCK). Los EPPs deberían asumir la construcción del conocimiento como un proceso de reflexión en la acción, que debe considerar diferentes documentos generados desde la investigación en formación de profesores de matemáticas. Asumimos que “el profesor necesita de un marco teórico que le sirva para dar sentido a su experiencia, pues la mera experiencia no sirve para producir aprendizajes” (Climent, 2002, 99). Sin estas referencias teóricas (*foundations*) el conocimiento puede convertirse en un conocimiento mecánico, rutinario y poco sistematizado.

En este proceso de metacognición se pondrán en valor las competencias que se indican para los estudiantes universitarios, y las específicas de la titulación, que se desean alcancen los estudiantes univesitarios y, específicamente, los estudiantes para Maestro.

Recordamos que los estudiantes asumen, consciente o inconscientemente, los modelos de enseñanza/aprendizaje que ellos experimentan, por lo que se hace necesario que esta reflexión se haga de una manera explícita y siguiendo modelos que permitan pensar sobre su propio proceso de aprendizaje o el del grupo y sobre el contexto donde este aprendizaje se ha producido, y ayudarles a verbalizar y reflexionar sobre las principales variables de este proceso (Petrou y Goulding, 2011).

De esta manera, el trabajo desarrollado sentará las base sobre los ‘procedimientos que les permitirán continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida’ como se señala en referencia a las competencias a adquirir por los estudiantes para Maestro. Y ello sería así porque existiría una coherencia entre el modelo utilizado para resolver estas situaciones de aprendizaje, el contenido que queremos transmitir y la actividad docente que se le espera en el futuro, sentando las bases de su formación permanente.

La toma de decisiones como consecuencia de la resolución de problemas profesionales, requiere establecer un criterio que permita conocer qué es una buena elección, entre diferentes alternativas, y saber gestionarla. Ello implica, además, una valoración de cada alternativa, considerando las características de la misma, las bases sobre las que se sustenta y su influencia en el resultado final.

El proceso terminará a través de una síntesis que debe hacer el formador sobre el proceso seguido, de los diferentes dominios del conocimiento, concretos y generales, utilizados tanto en relación al conocmiento matemático como al conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La última parte se relaciona con la evaluación donde se deberá tener en cuenta las diferentes dimensiones del conocimiento que se han abordado.

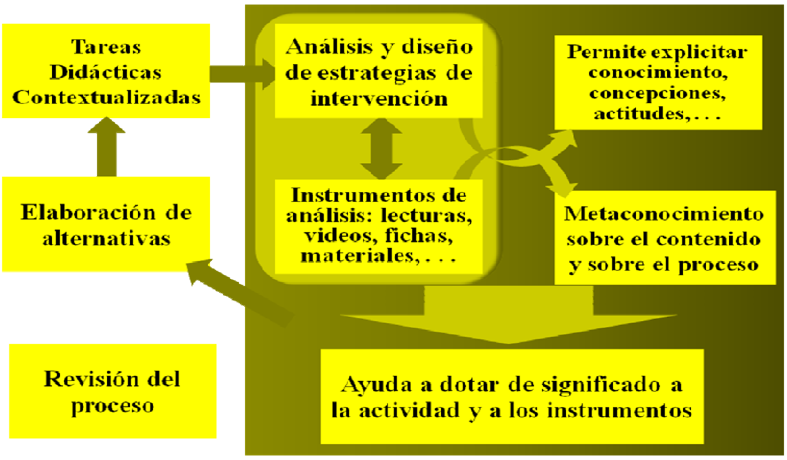


Figura 2. Tareas Didácticas y contextualizadas en la formación de profesores

En definitiva, asumimos que "la formación de profesores debe estar relacionada con la resolución de problemas relacionados con la actividad profesional, completados con una actividad reflexiva y teórica" (Cardeñoso, 1999, 126). De esta manera los futuros profesores serán enseñados de forma parecida a como ellos habrán de enseñar: Explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando en un contexto de resolución de problemas (MEC, 1992; NCTM, 1991 a y b). Y procurando una coherencia entre el conocimiento profesional que deseamos enseñar y el conocimiento pedagógico transmitido. Esta propuesta de trabajo implica no sólo una nueva forma de enfocar las actividades en la formación del profesorado, sino también una nueva actitud con la que abordar estas tareas. Específicamente creemos que debemos considerar:

a) Un nuevo papel del estudiante como resolutor de situaciones problemáticas relacionadas con su actividad profesional futura.

b) Un nuevo formato para la presentación de las tareas que deberán estar organizadas en torno a una idea matemática importante que provoque un contenido específico de la Didáctica de la Matemática.

c) Un nuevo papel del profesor en el aula que deberá gestionar las situaciones para alcanzar los objetivos.

d) Una organización diferente del aula, ya que los estudiantes tendrán oportunidad para trabajar en grupo o individualmente, comunicarse, presentar sus conclusiones, argumentarlas y defenderlas.

4. Un ejemplo de tarea didáctica contextualizada y personalizada sobre el concepto de altura y circuncentro de un triángulo y construcción de puntos notables de un triángulo[9].

La actividad docente que presentamos está diseñada para profesores de primaria y secundaria en formación. Hemos procurado extraer los elementos

[9] Este documento reproduce parte del capítulo de Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 93 – 124.

esenciales con los que hemos pretendido desarrollar los dos primeros niveles reflejados en la figura 1.En el ámbito de la geometría, nos parece que es interesante partir de un vocabulario básico sobre nociones geométricas elementales y profundizar en su significado. Se trata de nociones que los estudiantes para profesor han abordado durante su etapa como estudiantes de la educación obligatoria y que, como veremos, es preciso reconstruir y enriquecer desde una perspectiva de profesional docente.

4.1 Ortocentro y circuncentro como pretexto. Dos actividades de primaria y primer curso de la ESO

Los problemas que los estudiantes para Maestro muestran al realizar actividades relacionadas con el concepto de altura de un triángulo (Gutiérrez y Jaime, 1996; Azcárate, 1997), y que hemos comprobado en nuestra experiencia con profesores en formación, nos sugirieron diferentes actividades docentes que nos han permitido trabajar aspectos relacionados con la introducción de conceptos geométricos en educación primaria y en secundaria (Blanco, 1987; Blanco, Cárdenas, Gómez y Caballero, 2011). El análisis de sus respuestas nos ha llevado a transformar estas producciones de los estudiantes en tareas didácticas contextualizadas y personalizadas que utilizamos en nuestras aulas.

Presentamos dos actividades que puedan formar parte de cualquier programación en primer curso de la ESO. La primera actividad (Actividad 1. Figura 3.) viene planteada a partir de la siguiente tarea matemática en la que se consideran los conceptos de altura y ortocentro de un triángulo.

- Definir altura de un triángulo
- Definir el ortocentro de un triángulo.
- Dibujar el ortocentro del siguiente triángulo

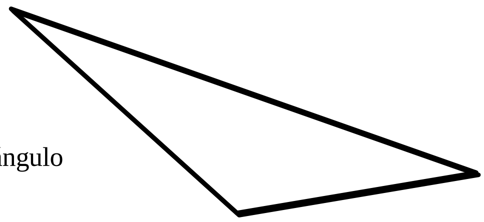


Figura 3. Actividad 1.

La segunda actividad (Actividad 2. Figura 4.), del mismo tipo, sería a partir de los conceptos de mediatriz y circuncentro.

- Definir mediatriz de un triángulo
- Definir el circuncentro de un triángulo.
- Dibujar el circuncentro del siguiente triángulo

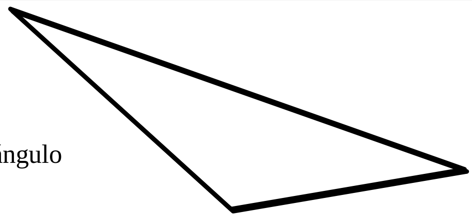


Figura 4. Actividad 2

La situación matemática planteada es una actividad que nos descubre importantes errores de concepto y de procedimiento de los estudiantes para Maestro (EM) en relación al concepto específico de altura y ortocentro de un triángulo (lo que formaría parte de su CCK), pero también en relación al proceso de enseñanza/aprendizaje de los conceptos geométricos (que supondría actuar sobre el SCK, el KCS y el KCT). Esto último es lo que justifica para nosotros la tarea que presentamos.

El análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades demandadas nos presenta una situación contradictoria e interesante. Así, la mayoría de los estudiantes escriben correctamente las definiciones de ‘altura de un triángulo’, de ‘ortocentro’, de ‘mediatriz de un lado de un triángulo’ y de ‘circuncentro’. Sin embargo, las representaciones no suelen ser correctas. Así, dibujan incorrectamente algunas alturas, y consecuentemente, el ortocentro del triángulo de la figura. O dibujan incorrectamente algunas mediatrices, y consecuentemente el circuncentro del triángulo. A este respecto, suelen situar el ortocentro y cicuncentro en el interior del triángulo tal y como nos muestra las siguientes figuras que reproducen respuestas de nuestros estudiantes.

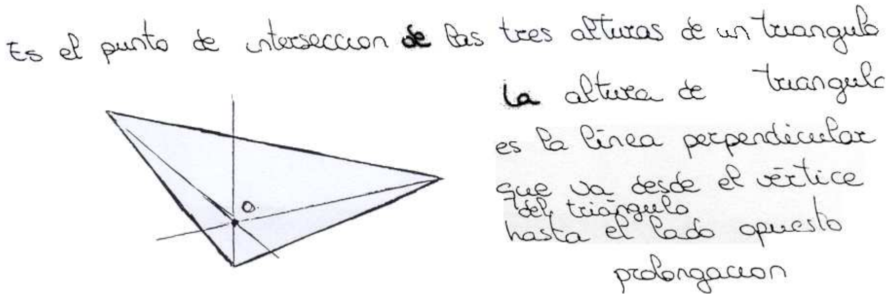


Figura 5. Copia de la respuesta de un Estudiante para Maestro a la actividad 1.

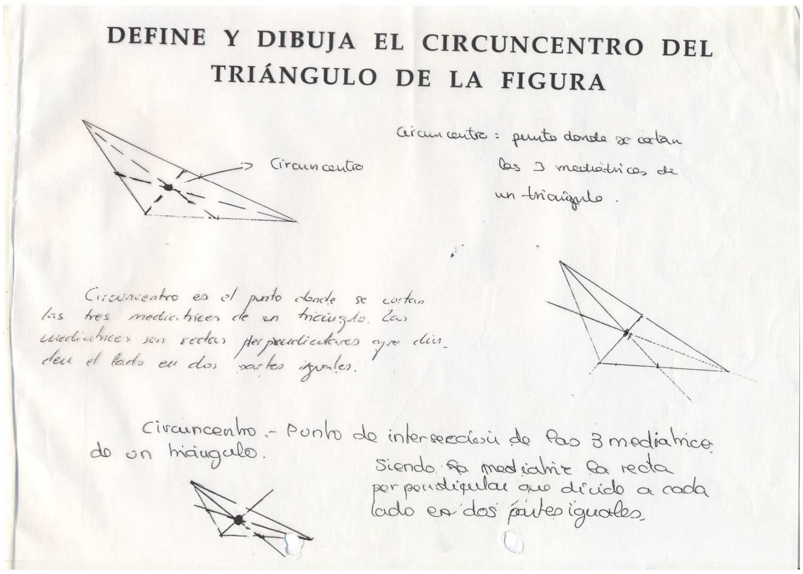


Figura 6. Copia de la respuesta de tres Estudiantes para Maestro a la actividad 2.

Pero más interesante, desde el punto de vista de la investigación en educación matemática, resulta constatar que los EM no son conscientes de la contradicción que presenta sus respuestas hasta que iniciamos, con ellos, un análisis de los conceptos matemáticos implicados y del proceso que han seguido para resolver la actividad. El reconocimiento del error es un punto de partida eficaz, interesante y motivador, para continuar con la actividad y proponer otras más específicas encaminadas a evitar estas lagunas en su conocimiento matemático común, y sobre la enseñanza de la Geometría.

Y es por ello que decidimos transformar estas dos producciones de los estudiantes en una situación problemática que nos puede permitir profundizar en el proceso de adquisición de conceptos geométricos partiendo de su propio proceso de aprendizaje de los conceptos que nos ocupan, facilitando la referencia de que los fututros profesores debieran trabajar en las aulas de formación de manera similar a cómo se espera que realicen su función de profesor de matemáticas. De esta manera, proponemos la siguiente Tarea Didáctica: *"Analizad vuestras repuestas en las actividades anteriores, describiendo las posibles causas de esta situación y proponiendo alternativas didácticas para evitar estos errores."* En el desarrollo de la tarea tenemos en cuenta algunos pasos que describimos a continuación.

4.2 Análisis del Conocimiento Matemático implicado y marco curricular

En un primer lugar, parece conveniente identificar y recordar los conceptos y procesos matemáticos implicados en las actividades, aún asumiendo que su reconstrucción (conocimiento matemático común) formará parte del proceso de resolución de la tarea didáctica planteada. Además, identificaremos en el currículo las referencias específicas a los contenidos que señalemos (conocimiento del curriculum).

Cuando recordamos la definición de altura o mediatriz de un triángulo, haciendo especial incidencia en la necesidad de la perpendicularidad, es cuando algunos estudiantes comprenden que su representación no es correcta. En este punto, admiten la dificultad que tendrían para hacer una nueva representación que se adecuara a la definición dada.

Esta situación es muy interesante ya que sirve para que los estudiantes para maestro tomen conciencia de la necesidad de profundizar sobre su conocimiento matemático común y muestran deseos comprender porque esa contradicción (conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes) y de iniciar un proceso de reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje que nos servirá de base para la elaboración consecuente de propuestas de enseñanza (conocimiento de la matemática y para la enseñanza de la matemática). Desde este momento se hace difícil separar las tareas conducentes a la reconstrucción de ese conocimiento matemático, de las reflexiones sobre las causas que han provocado la contradicción en sus respuestas. Es decir, se hace difícil separar la construcción de los tres tipos de conocimiento implicados (ya señalamos el carácter difuso entre las fronteras de las categorías establecidas por Ball et al., 2008).

a) Definición y Concepto

La situación descripta con anterioridad nos da pie para hablar de la complejidad de los conceptos matemáticos (lo que forma parte del SCK y del KCS), de las variables que hay que considerar en su construcción (que implica KCT y conocimiento sobre el horizonte matemático), de la importancia de uso recursos didácticos y de los libros de textos y de una metodología adecuada (conocimiento del curriculum).

De manera inmediata, nos permite evidenciar la falta de conexión entre la definición de un concepto y su representación (SCK y KCS). Y nos recuerda la aportación de Tall y Vinner (1981) al diferenciar dos aspectos importantes en el proceso de adquisición de un concepto: Imagen del concepto y definición del concepto. Memorizamos la definición mientras que la imagen del concepto se construye a partir de diferentes actividades, ejemplos y representaciones.

Somos conscientes que la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren a partir de la definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas como forma de activar la mente o para controlar el proceso (Azcárate, 1997). Asumimos que "saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado" (Azcárate, 1997, 29) y que la situación descrita es contradictiroa con una perspectiva constructivista.

Para Vinner (1991), entre definición y concepto existe un conflicto que representa el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales (CCK) y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos (KCS). Skemp (1971) considera los conceptos como objetos puramente mentales, formado a partir de experiencias, situaciones o descripciones que tienen algo en común y que, por un proceso de identificación y abtracción, tomamos conciencia de sus semejanzas. Estas características tienen a permanecer en la memoria como una representación particular de la experiencia.

Su adquisición es más compleja y requiere asociar otras variables a la palabra que designa el concepto: definición, conceptos previos, partículas lógicas que unen o cuantifican los atributos, imagen mental ligada a representaciones externas (símbólica, diagrama, gráfica, etc) e internas, propiedades, reglas de construcción, experiencias desarrolladas asociadas al concepto, aplicaciones, ejemplos (CCK), relación con otros conceptos (horizonte matemático), etc. (Hershkowitz, 1989; Azcárate, 1995, 1997). Los atributos relevantes de un concepto son las características básicas que un objeto debe poseer para ser considerado un ejemplo de ese concepto (Wilson, 1990).

Parece evidente que considerar la adquisición de los *conceptos* como un proceso dinámico que requiere su aplicación a situaciones concretas, que los doten de significado para los estudiantes**.** Las matemáticas tienen sentido cuando los estudiantes llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados, ejemplos e interpretaciones**.** Para evaluar el grado de desarrollo en la adquisición de un concepto se deberá tener en cuenta los diferentes aspectos que condicionan el aprendizaje del mismo, como la capacidad de reconocer las condiciones y propiedades que lo determinan; de identificar ejemplos validos y no validos; de reconocer sus distintos significados; de aplicarlos a las situaciones que así lo requieran y de conectarlo con otros conceptos (KCS).

b) Esquema y construcción de los conceptos de altura y ortocento

En la construcción del concepto de altura de un triángulo tendremos que incidir, por una parte, en el análisis de los conceptos previos y procesos implicados (lo que supone parte del SCK) y, de otra, asumir que el procedimiento de resolución seguido por los estudiantes está estrechamente relacionado con su etapa como alumnos de la escuela primaria. Es decir, los errores que manifiestan los estudiantes encuentran su base, principalmente, en el proceso de enseñanza/aprendizaje que experimentaron en la escuela primaria, y que están muy arraigados en sus conocimiento y concepciones (KCS). En la figura siguiente mostramos los conceptos previos implicados en el concepto de altura y que serán básicos en la correcta representación del ortocentro (figura 7). Estos conceptos son: Segmento, rectas perpendiculares, vértice de un triángulo, lado de un triángulo, lado opuesto a un vértice, perpendicular a un segmento desde un punto exterior.

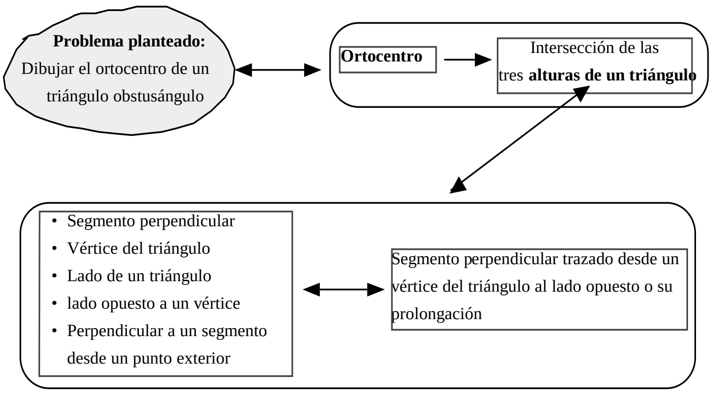


Figura 7. Variables de la definición del concepto de altura y ortocentro.

Teniendo en cuenta el esquema representado en la figura anterior iremos reconociendo cada uno de los conceptos y subconceptos señalados e incidiendo en su adecuada representación[10]. En este punto recordaremos y incidiremos en dos referencias de autores como son los Principios de Variabilidad Matemática y de Variablidad Perceptiva de Dienes (1970) y los niveles de visualización y análisis de Van Hiele (Alsina et al, 1987 y Jaime y Gutiérrez, 1990). Gutiérrez y Jaime (1996) señalan los siguientes subconceptos del concepto altura y actividades asociadas:

1) El subconcepto de perpendicularidad: Trazar una recta perpendicular a otra recta dada.

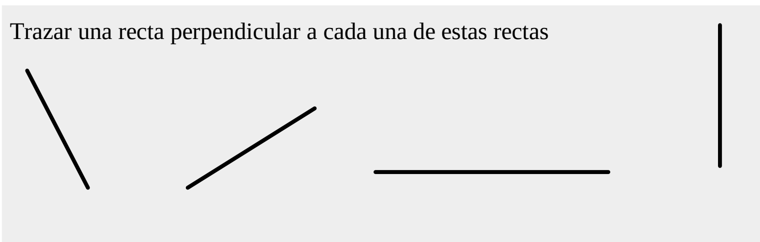


Figura 8. Tarea para trazar una recta perpendicular

[10] Este conocimiento es de diferente naturaleza del conocimiento matemático común (CCK) en la medida que su análisis en partes tiene sentido exclusivamente en situaciones de enseñanza. La discusión sobre diferentes repersentciones forma parte del conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT).

2) El subconcepto de perpendicularidad desde un punto: Trazar la recta perpendicular desde un punto dado hasta un segmento dado o su prolongación.

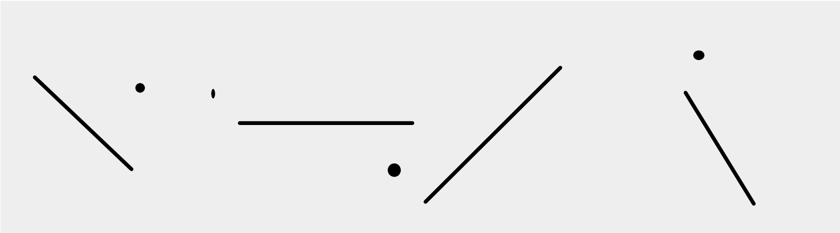


Figura 9. Tarea para trazar una recta perpendicular desde un punto

3) El subconcepto de vértice opuesto: Identificar el vértice de un triángulo opuesto a cierto lado·

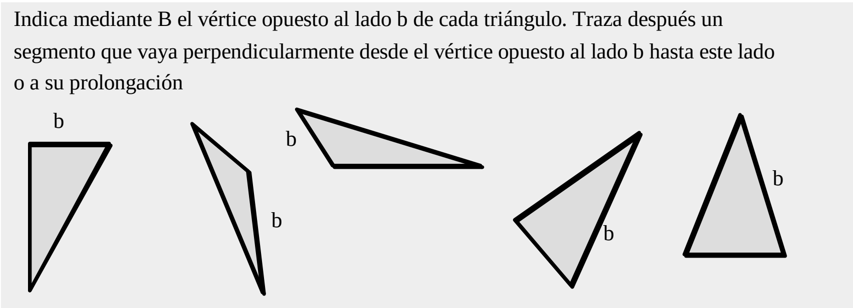


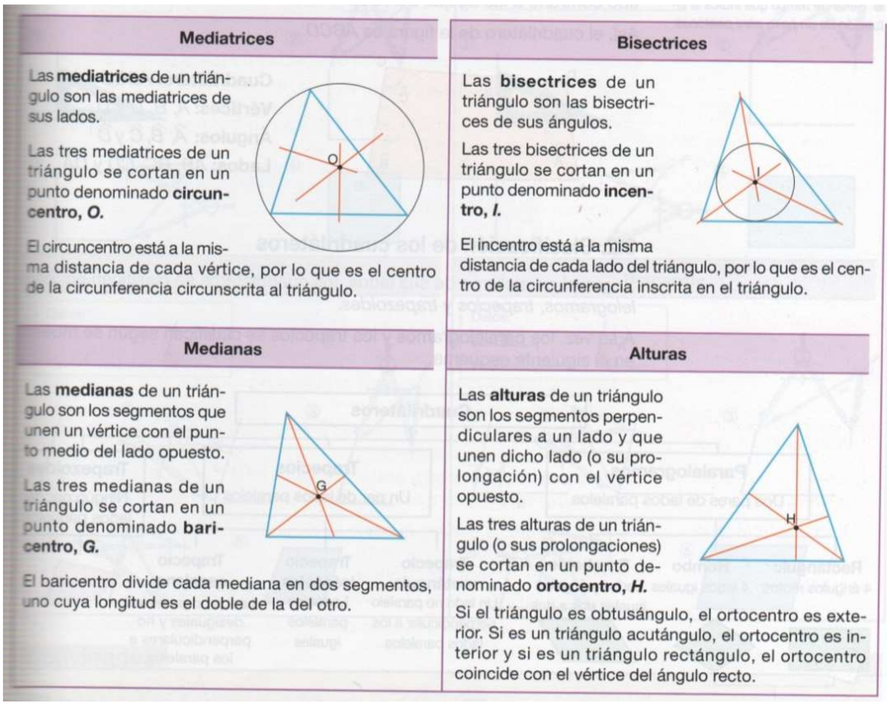
Figura 10. Tarea para trazar las alturas de un triángulo

4) El concepto de altura de un triángulo: Trazar la altura de un triángulo sobre cierto lado. " (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Es en este momento cuando podemos volver a proponer las actividades iniciales en referencia a dibujar el ortocentro y circuncrento de diferentes tirángulos que podremos resolver teniendo en cuenta estas variables que estamos enunciando y el procedimiento seguido. Esta situación nos permite reflexionar sobre la complejidad de los conceptos geométricos, difirenciando entre conceptos y procesos a seguir en la resolución de este tipo de tareas.

c) Análisis de los libros de textos y de la enseñanza recibida

La resolución de la tarea matemática nos permite estar en disposición de analizar los libros de textos para ver cómo reflejan la construción de los conceptos y de los procesos que hemos trabajado (conocimiento del curriculum y conocimiento de las matemáticas y los estudiantes, KCS). En nuestro caso, podemos utilizar textos de primaria o secundaria ya que, en ambos niveles, se reflejan los contenidos que hemos desarrollado, lo que nos permite analizar las diferentes representaciones que utilizan los libros de texto para ilustrar las definiciones o en las actividades que proponen (KCT). Un repaso por diferentes libros de texto no permite observar el abuso de los triángulos apoyados en una base horizontal en los que tanto los puntos notables de un triángulo (ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro) siempre están en el interior de la figura, y las consecuencias que ello tiene en la construcción de estos conceptos y sus representacciones (KCS).



Mediatrices

Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **circuncentro, *O*.**

El circuncentro está a la misma distancia de cada vértice, por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **incentro, *I*.**

El incentro está a la misma distancia de cada lado del triángulo, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Medianas

Las **medianas** de un triángulo son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado **baricentro, *G*.**

El baricentro divide cada mediana en dos segmentos, uno cuya longitud es el doble de la del otro.

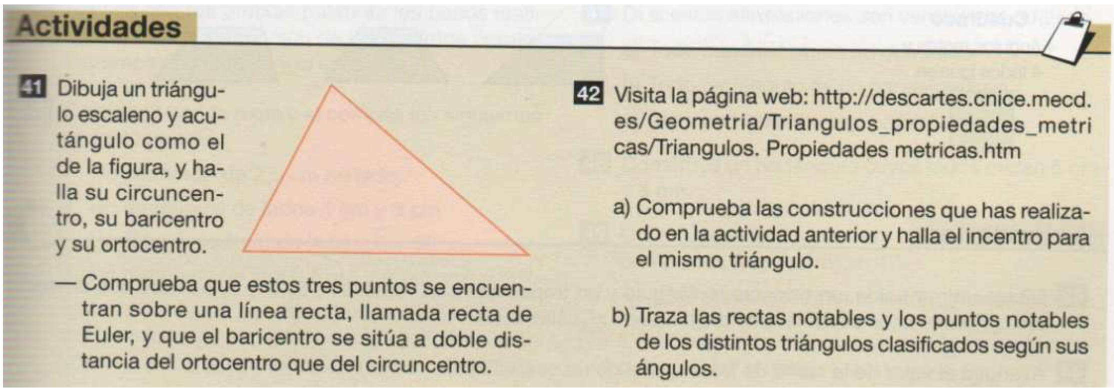
Alturas

Las **alturas** de un triángulo son los segmentos perpendiculares a un lado y que unen dicho lado (o su prolongación) con el vértice opuesto.

Las tres alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en un punto denominado **ortocentro, *H*.**

Si el triángulo es obtusángulo, el ortocentro es exterior. Si es un triángulo acutángulo, el ortocentro es interior y si es un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

Figura 11. Imagen que transmite que los puntos notables de los triángulos están en el interior del mismo



Actividades

41 Dibuja un triángulo escaleno y acutángulo como el de la figura, y halla su circuncentro, su baricentro y su ortocentro.

— Comprueba que estos tres puntos se encuentran sobre una línea recta, llamada recta de Euler, y que el baricentro se sitúa a doble distancia del ortocentro que del circuncentro.

42 Visita la página web: http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/Triangulos_propiedades_metricas/Triangulos. Propiedades metricas.htm

a) Comprueba las construcciones que has realizado en la actividad anterior y halla el incentro para el mismo triángulo.

b) Traza las rectas notables y los puntos notables de los distintos triángulos clasificados según sus ángulos.

Fig. 12. Imagen que reflja la posición estandar en los triángulos de los libros de texto

Al recordar su etapa como alumnos de enseñanza primaria y secundaria los estudiantes reconocen una imagen asociada a la altura de un triángulo, usualmente, acutángulo y apoyado sobre una base horizontal dispuesto de tal manera que la representación de la altura del triángulo quede en el interior del mismo y con un trazo vertical. En algunos libros hemos encontrado otros ejemplos pero siguen manteniendo la base horizontal lo que lleva a identificar el concepto de "la" altura de un triángulo con una línea vertical como se refleja en la actividad de la figura 13

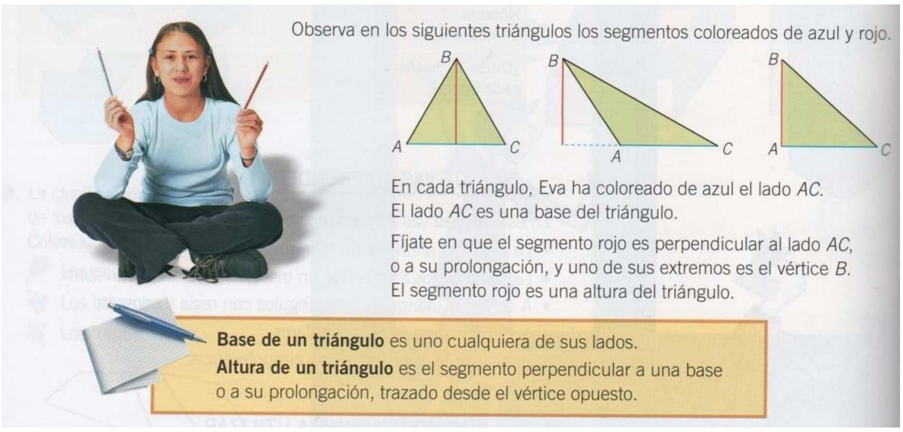


Figura 13. La actividad transmite una imagen de "<u>la</u>" altura del triángulo como un segmento vertical

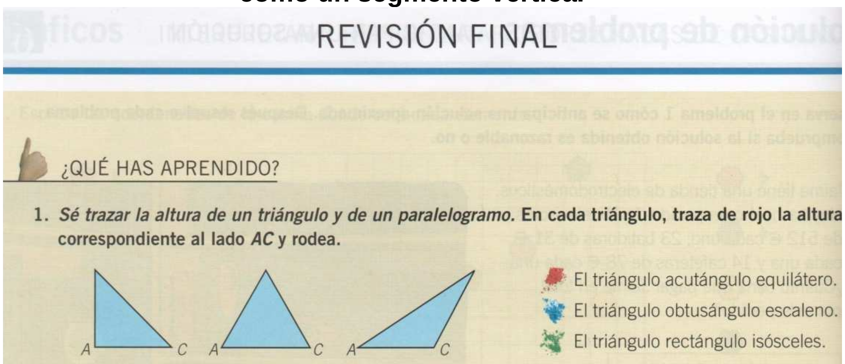


Figura 14. Actividad que habla de "la" altura de un triángulo

El abuso de esta representación, en la que sólo aparece la altura correspondiente al lado horizontal, sugiere la imagen de "la" altura del triángulo como segmento vertical, perpendicular a la base, y único para cada triángulo. La expresión "la altura de un triángulo" que aparece en la figura 14 es coherente con ello. Por otra parte, esta idea tiene su campo de validez en el uso común del vocablo altura como la distancia del punto más alto a la base horizontal, y justificaría que algunos estudiantes resuelvan la siguiente actividad en el sentido que se indica en la misma figura 15.

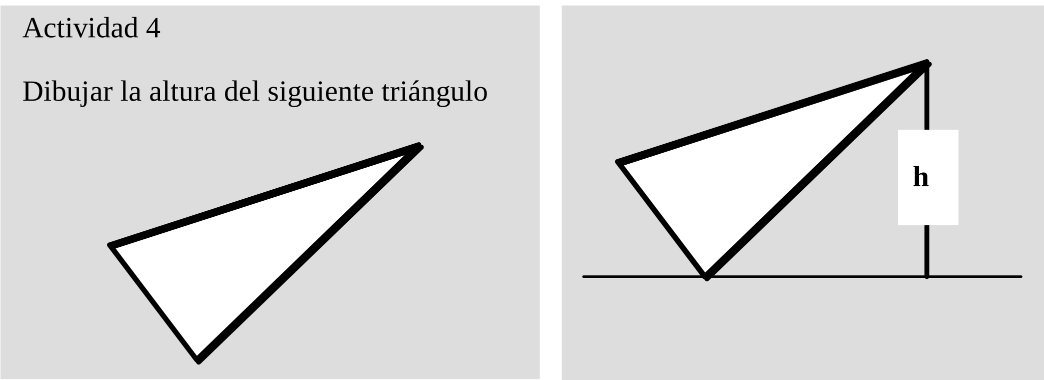


Figura 15. Actividad que refleja confusión en el uso del vocablo altura

d) La enseñanza/aprendizaje de conceptos geométricos en primaria

El análisis de los libros de texto se relaciona con el recuerdo de la experiencia vivida como alumnos de enseñanza obligatoria, lo que nos permite establecer algunos pasos que mostraría una inadecuada enseñanza de la geometría escolar (KCT).

i. Ejemplos prototípicos que visualizaban los diferentes conceptos. Así, los triángulos solían presentarse en la misma posición, las alturas de los triángulos se trazaban, normalmente, sobre triángulos equiláteros y acutángulos apoyados en una base horizontal.

ii. Mayor énfasis en la definición obviando el análisis de los subconceptos y sin darle importancia al hecho de que la visualización produce un efecto más duradero e influyente que el texto oral o escrito. De hecho los EM tienen dificultades para identificar los subconceptos claves implicados en los conceptos de altura de un triángulo, dificultades extensibles a sus futuros extudiantes (KCS).

iii. Las actividades reflejaban un proceso estático y repetitivo sobre ejemplos tipos escogidos casi exclusivamente del libro de texto.

iv. Falta de experiencias concretas o ausencia de utilización de software de geometría dinámica sobre otras situaciones posibles que profundizaran en la comprensión de los conceptos y ayudaran a transferir conocimiento para otros problemas

v. Escasez de recursos y materiales. En la mayoría de los casos, el libro de texto era casi el único recurso según declaraciones de los propios EM.

A partir de estas referencias retomamos las propuestas curriculares (conocimiento curricular) que señalan la necesidad de que los estudiantes participen en la construcción de los conceptos matemáticos de una manera activa y creativa, potenciando la comunicación, la elaboración de conjeturas e investigación. Y ello en un contexto de resolución de problemas que no se corresponde con los puntos anteriores.

e) Otras situaciones similares como actividades de evaluación

Cuando trabajamos la simetría axial se produce una situación similar que puede transformarse en una teara didáctica o en una situación de evaluación según el trabajo programado en el aula.

Así, podemos proponer:

> *“Analizad la siguiente situación para evaluar la resolución de la actividad y proponed justificadamente actividades de enseñanza que evite el error reflejado en la figura.”*

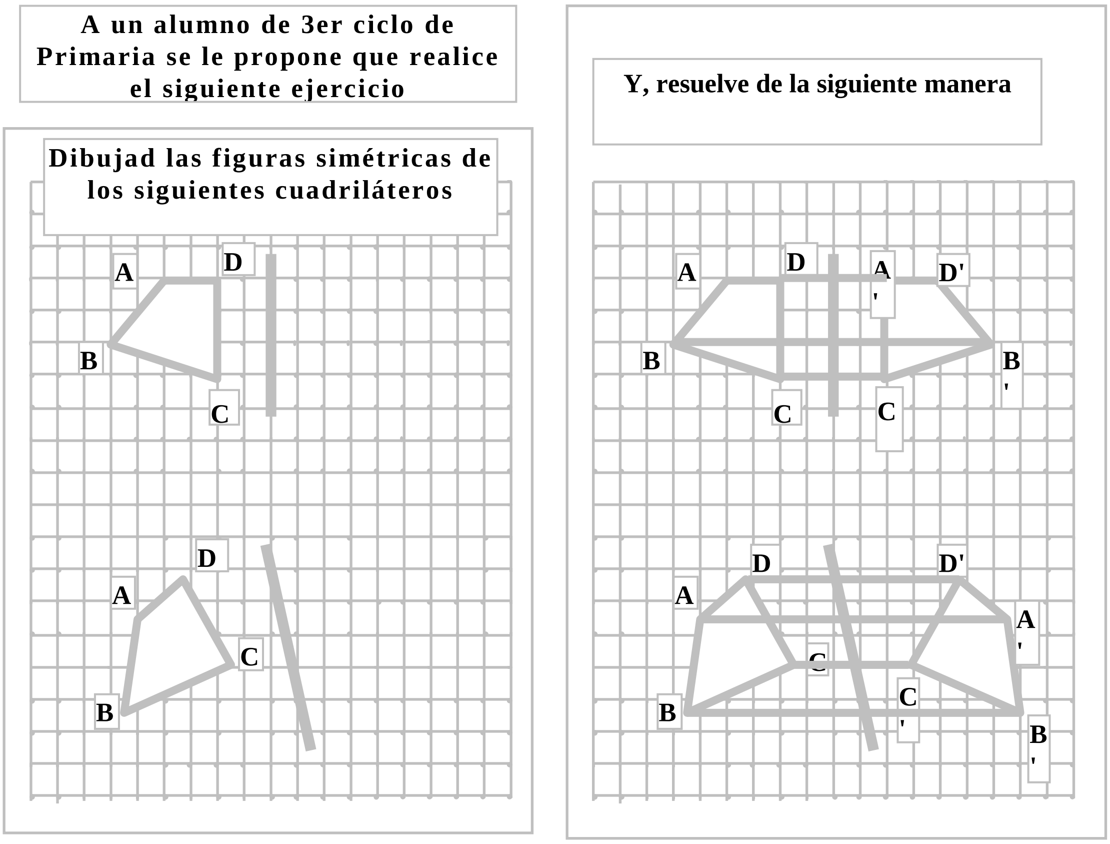


Figura 16. Tarea de evaluación que se les propone a los EM

Otra situación que tiene las mismas raíces de las situaciones anteriores se produce cuando les indicamos a los estudiantes que *identifiquen algunos prismas particulares entre todos los que aparecen en cualquier listado de poliedros*.

Esta actividad nos descubre dificultades de los estudiantes (CCK) para analizar las variables de un concepto debido a la imagen que tienen asociada a casos particulares de los mismos. Asimismo, muestran dificultades para encontrar semejanzas y diferencias o relaciones de inclusión entre conceptos geométricos (horizonte matemático), lo que dificulta profundizar en sus características y reconocer y utilizar diferentes criterios de clasificación.

A pesar de enunciar la definición de prisma y de manejar un diccionario de definiciones de conceptos geométricos, los estudiantes para maestro tienen dificultades para reconocer ejemplos de prismas más allá del prisma recto u oblicuo o el prisma triangular o pentagonal que específicamente aparecen en el diccionario. En la mayoría de los casos no identifican al cubo o al ortoedro como ejemplos particulares de prismas.

5. A modo de síntesis

Hemos pretendido evidenciar nuestra forma de entender el proceso para llegar a ser profesor de Matemáticas desde la óptica de la Educación Matemática. Nuestro punto de partida es un conocimiento específico del contenido matemático, que en el segundo apartado denominábamos conocimiento matemático especializado. No se trata tan sólo de una reconstrucción de conceptos que deberían haber sido correctamente aprendidos durante la educación obligatoria; es también, y sobre todo, una forma distinta de saber y saber hacer matemáticas. No se trata solamente de tomar conciencia de los errores, sino de iniciar un camino que conduzca a una nueva enculturación matemática, una nueva forma de entender qué es saber matemáticas. A veces, las nuevas concepciones que comienzan a generarse en este proceso formativo, parecen llegar tarde para el profesor en formación desde su perspectiva de aprendiz matemático, pero son una fuerte inversión de futuro en su papel como educador matemático.

Es precisamente ese cambio de rol lo que inspira nuestra propuesta. En los dos niveles que se han desarrollado se hacen inmersiones en la práctica escolar, a veces desde el recuerdo del propio aprendizaje. Estas inmersiones se complementan con momentos vinculados con la práctica real, en actividades que suponen la toma de decisiones, como análisis comparativos de textos escolares, diseño de unidades didácticas, o estudio de casos. Pero, sin duda, el reto sigue siendo, la relación entre estas actividades y el practicum, en lo que podría denominarse práctica específica de asignatura, un reto que para que podamos abordarlo pasa por una reforma profunda de los actuales planes de estudio.

Bibliografía

Alsina et al. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis: Madrid.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno*, 4, 53-61.

Azcárate, C. (1997) Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?. *Suma*, 23-30.

Azcárate, P. (1999). Estrategias metodológicas para la formación de Maestros. En Carrillo, J. y Climent, N. *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Universidad de Huelva. 17-40.

Azcárate, P. (2000). El conocimiento profesional, naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8(12), 111-138.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En Castro, E. y De la Torre, E. *Investigación en Educación Matemática. VIIII SEIEM*. 43 – 60

Ball, D.L. (1991). Reserach on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation: In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, (1-48). JAI Press: Greenwich.

Ball, D.L.; Hill, H.C. y Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *Amercian Educator*, 29(1), 14-46.

Ball, D.L.; Thames, M.H. y Phelps, G. (2008).Content knowledge for teaching: Whats makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Blanco, L. J. y Márquez, L. (1987). En torno al teorema de Pict: Una experiencia de enseñanza de la Geometría. *Números nº 16*. 41 - 53.

Blanco, L.J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas, de profesores de E.G.B., y estudiantes para profesores.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Cáceres.

Blanco, L. J. (1998): Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas. *Cultura y Educación, 9*, 77-96.

Blanco, L.J.; Cárdenas, J.A.; Gómez, R. y Caballero, A. (2011). Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en la formación de Maestros, Grupo DEPROFE. Badajoz

Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente,* (93-124). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres.

Blanco, L.J.; Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307. 427-446.

Burgués, C. y Giménez, J. (2006). Las Trayectorias Hiportéticas de Formación Inicial como instrumento para el análisis del desarrollo profesional. Análisis de un caso en a formación de futuros docentes e primaria. Penalva, M.C.; Escudero, I. y Barba, D. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. 49 - 70

Cardeñoso, J.M. (1999). Sobre el conocimiento profesional, en relación con el área de Didáctica de las matemática, que construimos en las aulas de foración de profesores. En Carrillo, J. y Climent, N. (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas,* (119-132). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2002). Una estrategia de formación de Maestros de Matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 181 – 226.

Carrillo, J. y Climent, N. (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis Doctoral. Universidad de Huelva

Climent, N. y Carrillo, J. (2002) Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial. Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 125 – 180

Córcoles, A.C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKÉ, v. 14, nº 25*, 7-28.

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Vicens-Vives: Barcelona.

Flores, P. (1999). Conocimiento profesional en el área de Didáctica de las matemática,en el primer curso de la formación de maestros e educación primaria. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas,* (91-110). Universidad de Huelva: Huelva.

García, M. y Sánchez, V. (2002a). Una propuesta de formación de Maestros desde la educación matemática: adorptando una perspectiva situada. Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 59 – 91.

García, M. y Sánchez, V. (2002b). Diseño, puesta en práctica y evaluación de entornos geométricos en la formación inicial de maestros. *Revista de Educación Universitaria nº 19,* 89-100.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial del profesores de Matemáticas de secundaria.* Dpto de Didáctica de las Matemática. Universidad de Granada.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L.S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher,* (23-36). Pergamon Press: Oxford.

Gutiérrez, A, y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares, y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, (143-170). Comares: Granada.

Hashweh, M.Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11(3), 273-292.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación matemática*, (295-384). Alfar: Sevilla.

Lappan, G. y Theule-Lubienski, S. (1994). “Training teachers or educating professiónal?. What are the issues and how are they being resolved?”. Robitaille, D.F. et al. *Selected lectures from of the 7th International Congress on Mathematical Education.* Les presses de L'Université Laval. Sainte-Foy (Canadá) 249-261

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de Matemáticas*. GID: Sevilla.

Llinares, S. (1994). El profesor de Matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. Santaló, L.A. et al.: *La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia*. Rialp. Madrid. 296-337.

Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobreel aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Conferencia invitada en el CIBEM – Oporto, Juio de 2005.

Marcelo, C. (1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. En L. Montero y M. Vez (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado,* (151-186). Tórculo: Santiago.

Mellado, V. y Carracedo, D. (1993). Contribuciones de la filosofía de la ciencia a la didáctica de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 11(3),* 331-339.

Meredith, A. (1995). Terry's learning: Some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education*, 25(2), 175-187.

M.E.C. (1992). *Educación Primaria. Matemáticas*. MEC: Madrid.

N.C.T.M. (1991 a). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. SAEM Thales: Sevilla.

N.C.T.M. (1991 b). *Profesional standards for teaching Mathematics*. The Council: Reston, Va.

Oliveira, H. & Hannula, M. S. (2008). Individual prospective Mathematics Teachers. In K. Krainer & T. Wood (eds.). *Participants in Mathematics Teacher Education,* 13 - 34. Rotterdam : Sense Publishers.

Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualisign teachers' mathematical knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching,* (9-25). Springer: New York.

Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education,* (69-81). Cyprus Mathematical Society: Nicosia.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcoran y T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education,* (14-27). St. Patrick' College: Dublin.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. En J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. SAGE: Londres.

Sánchez, V & García, M.V. (2009). Task for Primary student teachers: a task of mathematics teacher educators. In Clarke, B.; Grevholm, B. Millman, R. (Edts.)

Tsaks in Primary Mathematics teacher education. Purpose, use and exemplears, 37-49. Springer

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review,Vol. 57,* nº 1. 1-22.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds.), *Science curriculum and liberal education,* (229-272). University of Chicago Press: Chicago.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational studies in mthematics*, 12, 151-169.

Valls, J.; Llinares, S. y Callejo, M.L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Penalva, M.C.; Escudero, I. y Barba, D. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. 11 – 43.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin: Middlesex.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluver: Dardrecht.

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics*, 12(3-4), 31-47.

Lorenzo J. Blanco Nieto, Catedrático de Universidad de Extremadura, España; lblanco@unex.es

Luis C. Contreras González, Titular de Universidad de Huelva, España; lcarlos@uhu.es; Facultad de ciencias de la Educación, Campus El Carmen.

Ambos autores trabajan sobre aspectos relacionados con la Formación de Profesores de Matemáticas y con la Resolución de Problemas. Fruto de esta colaboración surge, en 2002, el libro *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente,* publicado por la Universidad de Extremadura. Y, en 2011, el capítulo de libro The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. Progress in Education, Vol. 19 de Nova Science Publishers, entre otras publicaciones.