UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 75-87
ISSN: 1815-0640

La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral

Rossana Di Domenicantonio; Viviana Angélica Costa; María Cristina Vacchino

Resumen

En matemática muchos conceptos y procesos se ligan al potencial didáctico de la visualización y la forma en que ésta puede favorecer el aprendizaje. La visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. Este trabajo tiene como propósito mostrar actividades que se realizan en un curso de Cálculo Integral y Vectorial, donde se incorpora la visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

Abstract

In mathematics many concepts and processes are linked to the educational potential of visualization and the form which help learning. Visualization makes it possible to create a visual image of an abstract concept in mind. The purpose of this work is to show activities which are carried out in the course of Integral and Vectorial Calculus which incorporates visualization as the intermediary in the process of teaching and learning through the use of technology.

Resumo

Em matemática muitos conceitos e processos unem-se ao potencial didáctico da visualización e a forma em que esta pode favorecer a aprendizagem. A visualización possibilita criar na mente uma imagem visual de um conceito abstracto. Este trabalho tem como propósito mostrar actividades que se realizam num curso de Cálculo Integral e Vectorial, onde se incorpora a visualización como mediadora no processo de ensino e aprendizagem a partir do uso da tecnología.

1. Introducción

La necesidad de "*ver*" las matemáticas no es nueva. Por ejemplo el significado de la palabra "θεωρημα" (teorema) en griego significa "*lo que se contempla*" o expresiones de matemáticos y filósofos como "*la matemática es una ciencia del ojo*" (Gauss) o "*es útil en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente*" (Descartes), (de Guzmán, 1997).

Otras expresiones que vinculan la visualización con la adquisición de conceptos matemáticos que se pueden mencionar son:

- "*Las figuras geométricas son fórmulas gráficas y ningún matemático podría prescindir de su uso*" (Hilbert, 1900).
- "*La mayoría si no todas las grandes ideas modernas en matemática tienen su origen en la observación*" (J. J. Silvestre),(Davis, 1993).

- "*El pensamiento creativo se debe a la manipulación mental de diagramas. Pienso con diagramas visuales, nunca con palabras*" (C. S. Peirce), (Oostra, 2001).
- "*Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas…."* (de Guzmán, 1997).

En matemática muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales, lo que ha generado diversas investigaciones en relación al potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla.

Según el Diccionario del Uso del Español de América, *visualizar* significa:

a) Hacer visible por algún procedimiento o dispositivo lo que normalmente no se puede ver a simple vista.
b) Representar algo por medio de imágenes, después de documentarse ampliamente.
c) Formarse en el pensamiento la imagen de algo que no se tiene a la vista o de un concepto abstracto.
d) Ver la información (textual o gráfica) que se ofrece en una pantalla, monitor, visor u otro dispositivo similar.

A partir de la definición, se puede considerar a la visualización como un proceso mental interno, el que puede utilizarse con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas que involucran sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos. El profesor será el encargado de estimular ese proceso, valiéndose de distintos materiales.

Zimmermann W. y Cunningham S. afirman que: "*La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas*" (Zimmermann et al, 1991).

Todo lo expresado anteriormente pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La visualización como mediadora en el razonamiento de un alumno puede facilitar el proceso de resolución de problemas. Dado un problema, el profesor guía a los estudiantes a formarse una imagen de la situación y a describirlo con sus propias palabras, creando una imagen para lograr la generalización y asimilación del conocimiento.

En la actualidad los avances de la ciencia y la tecnología han puesto a disposición del docente una serie de instrumentos y/o objetos que pueden ser utilizados como elementos mediadores en el proceso de visualización en el desarrollo de su actividad didáctica.

Plasencia (2000), abre varios interrogantes sobre *tecnología y visualización*: ¿de qué manera el poder de las computadoras en general, y los gráficos realizados con algún software interactivo en particular, pueden ser utilizados de la forma más efectiva para promover la intuición y el conocimiento matemático? ¿cómo pueden las computadoras ayudar a enseñar, de una forma más efectiva, y qué nuevos problemas, temas o campos de las Matemáticas se plantean con las nuevas tecnologías? También plantea, que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas. En la educación matemática sugiere tener en cuenta entre las *actividades a desarrollar*, una atención sistemática a la visualización y a las nuevas tecnologías.

Hitt (2003) invita al uso reflexivo de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y defiende su utilización como una herramienta, no como un fin. En este sentido el uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico, disponible tanto para el profesor como para los alumnos, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto.

También, los libros de texto de matemática básica (nivel universitario), en particular los de Cálculo, han cambiado el enfoque de los contenidos, modificando su diseño, incorporando imágenes, diagramas, mapas conceptuales, fotografías, actividades de investigación con el uso de CAS[1], observándose una mayor importancia a la visualización.

La utilización de imágenes para acceder, procesar y utilizar información moviliza formas particulares de aprendizaje. Estas pueden consistir en procesos cognitivos de diferente índole o en distintas combinaciones de los existentes. Las imágenes, más que sustituir, complementar o auxiliar la lectura de textos impresos, ofrecen la posibilidad de aprovechar las habilidades lectoras en un ambiente multimedial, favorecedor de la comunicación de ideas y la flexibilidad cognitiva, enfatizando la autonomía y la participación activa en el enseñar y el aprender (Malbrán, 2002).

En este trabajo se describen algunas de las actividades que se realizan en un curso de "*Cálculo Integral y Vectorial*", Matemática B, donde se incorpora la *visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje* a partir del uso de la tecnología. Relatamos el contexto en que se desarrollan, mostramos la evaluación de una encuesta de opinión sobre la importancia de la visualización realizada a los profesores de la materia y elaboramos conclusiones.

2. Marco metodológico

Las actividades relatadas en este trabajo se enmarcan en la asignatura Matemática B, materia del segundo semestre de primer año de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata[2]. Durante ese semestre cursan alrededor de 500 alumnos, con edades entre los 18 y 20 años, distribuidos en 9 grupos, organizados por carrera. A cada grupo se le asigna un

[1] CAS: del inglés computer algebra system (sistema algebraico computacional)
[2] http://www.ing.unlp.edu.ar/analiticos/F0302.pdf

equipo docente conformado por un profesor, un jefe de trabajo práctico y dos ayudantes. El total de docentes de la asignatura es de 32.

En el año 2002, se lleva a cabo un cambio del plan de estudios en el área de Matemática de la facultad. El mismo es acompañado por la reorganización de los contenidos alrededor de ejes conceptuales comunes, un cambio metodológico y la redistribución de los recursos humanos y materiales existentes (Bucari et al., 2004). Se promovieron cursos teórico-prácticos, aulas equipadas con computadoras y mesas amplias, que propician el trabajo grupal y el uso de la tecnología. La metodología utilizada en los cursos considera al alumno como constructor de su propio conocimiento y no mero receptor, y al docente como guía del aprendizaje.

El eje conceptual de los contenidos de Matemática B, y su secuenciación, es el proceso de integración, en una y varias variables. Sus contenidos en forma sintética son: integral definida, ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, integrales múltiples, series numéricas y cálculo vectorial.

Los alumnos, como guía para el estudio de la asignatura, disponen de un material teórico-práctico impreso[3] y de otro digital[4] en formato de CD, elaborados por profesores de la cátedra. El material impreso comienza abordando el problema del desplazamiento de un móvil y del "área bajo la curva" como motivación del concepto de integral definida. La conexión con el problema inverso (el cálculo diferencial) provee el vínculo "hacia atrás" con Matemática A (materia previa a ésta). Se continúa con las ecuaciones diferenciales de primer orden, las integrales múltiples y el cálculo vectorial. En el mismo se proponen distintos tipos de actividades: de cálculo, de aplicación a la física, de auto-evaluación y de análisis de resultados teóricos. El material digital, complementa al material impreso. Dispone de actividades a realizar por los alumnos en un software matemático, con los comandos básicos para el desarrollo de los contenidos de la asignatura, que guían al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de la *visualización*. Su estructura, contenido y objetivo es relatado en Costa et al., 2010. Ambos materiales, constituyen un eje central en el desarrollo de las clases teórico-prácticas.

La metodología y los materiales con los que se desarrollan los cursos de Matemática B, propician un escenario en el cual es natural incorporar estrategias didácticas donde la visualización aporta un modo diferente de apropiación de los conceptos presentados.

3. Actividades desarrolladas en el curso

Se relatan algunas de las actividades propuestas en el material impreso y otras del material digital, en el orden en que son abordadas. Fueron seleccionadas por ser aquellas, en las que la *visualización* juega un rol importante. Las actividades son realizadas en el aula con el uso del software Maple[5], utilizado en los cursos de Matemática del Área Básica de esta facultad.

---

[3] Acosta, J. P., Vacchino M. C. y Gómez V. (2009). Guía teórico-práctica de Matemática B, CEILP (1º edición 2003). Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

[4] http://www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec/Soft/matb_maple/Matematica_B.html Costa, V., Di Domenicantonio, R. (2007). *Material Digital, CD Cátedra de Matemática B*, CEILP. Editado por la Editorial de la Universidad Nacional de La Plata.

[5] Maple es un software de cálculo, manipulación y visualización matemática diseñado para resolver en forma simbólica o numérica problemas del área de Ciencias e Ingeniería.

3.1. Sumas de Riemann. Cálculo aproximado del área bajo una curva. Acotación del error.

Esta actividad, a realizar en forma grupal, fue concebida como un taller para brindarles a los alumnos un entorno para explorar, aproximar, calcular y comprender los conceptos involucrados. Se entiende por taller a una modalidad de trabajo compartido por los docentes y alumnos, que concluye con la elaboración de un producto significativo. La actividad tiene como objetivo, a partir de la visualización de distintas aproximaciones del área bajo una curva usando las sumas de Riemann a izquierda, a derecha y la regla del punto medio, el de construir el concepto de aproximación, cota del error cometido al aproximar, y el proceso que formaliza la definición de la integral definida, como el límite de una sucesión de Sumas de Riemann. La realización de la misma permite manipular con herramientas informáticas, las sucesiones de números reales, el proceso de convergencia de las mismas y la notación sigma. Además, pretende disparar el estudio de métodos numéricos para el cálculo aproximado de integrales definidas usando sumas de áreas de otras figuras como por ejemplo el Método de los Trapecios y el error cometido en dicha aproximación.

Actividad:

Construir la gráfica de la función $y= x^2$ en el intervalo [0,4].
Definir y calcular las sumas a derecha (S1), a izquierda (S2) y la regla del punto medio (S3).
¿Cuál es la relación que satisfacen esas sumas?
A partir de la visualización de los gráficos exprese la relación que satisfacen S1, S2, S3 y el valor del área bajo la curva.
Como se está aproximando el valor del área, se comete un error ¿Puede dar una cota de ese error? Grafique S2-S1.
Realizar la misma actividad con la función $g(x)= 1 – x^2$ en el intervalo [0,1] considerando el crecimiento y decrecimiento de la misma en el intervalo dado. Justificar la relación que satisfacen los valores de las sumas. Analizar la gráfica animada y debatir en su grupo las conclusiones.

Al finalizar la actividad, los alumnos observan la gráfica animada (Figura 1) con el objetivo de *visualizar* el procedimiento para calcular el valor exacto del área bajo la curva y les resulte más comprensible la formalización matemática de la definición.

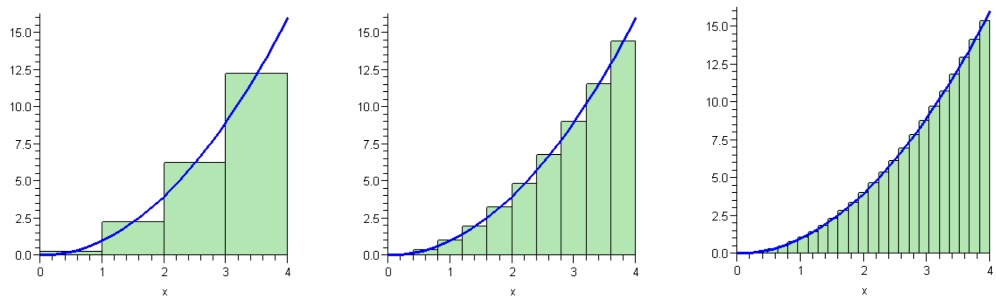


Figura 1: Etapas de la animación del área bajo la curva

3.2. Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo Integral

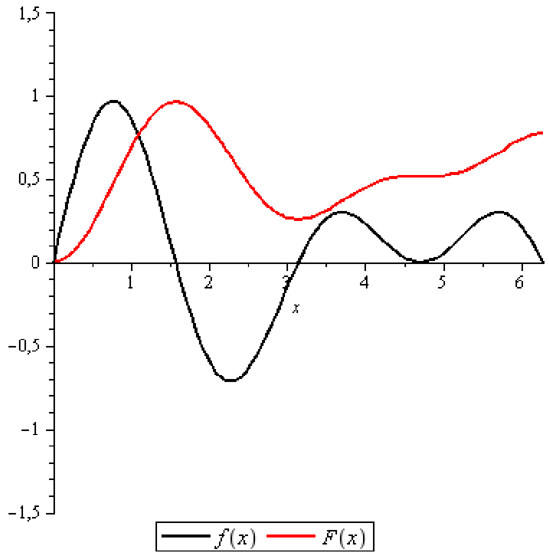
El objetivo de esta actividad es la visualización y análisis de los gráficos de las funciones indicadas, como medio para recuperar saberes previos, aplicarlos al concepto nuevo, establecer relaciones entre ellos y comprender la relación entre la función integral y su derivada (Ausubel et al., 1990).

Actividad:

Considere la función $f(x) = sen(2x)\cos(x/3)$, *x* ϵ [0, 2π] y defina como *F(x)* la función integral de *f(x)*, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (Use Maple).

a) En el mismo gráfico dibuje *f(x)* y *F(x)*
b) Resuelva la ecuación *F'(x) = 0* ¿Qué observa en las gráficas de *f(x)* y *F(x)* en los puntos donde *F'(x) = 0*? ¿Su observación está de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral?
c) ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece la función *F(x)*? ¿Qué observa con *f(x)* en esos intervalos?
d) ¿Qué observa en la gráfica de *F(x)* en los puntos donde *f'(x)=0*?

Se sugiere al alumno que visualice las gráficas de la función *f(x)* y de la función integral obtenida *F(x)* y así establecer relaciones entre ambas. Se espera que el alumno a partir de la visualización pueda inferir relaciones entre *f(x)* y *F(x).* Se propone un gráfico animado con el fin de aportar una interpretación que favorezca la comprensión (Figura 2).



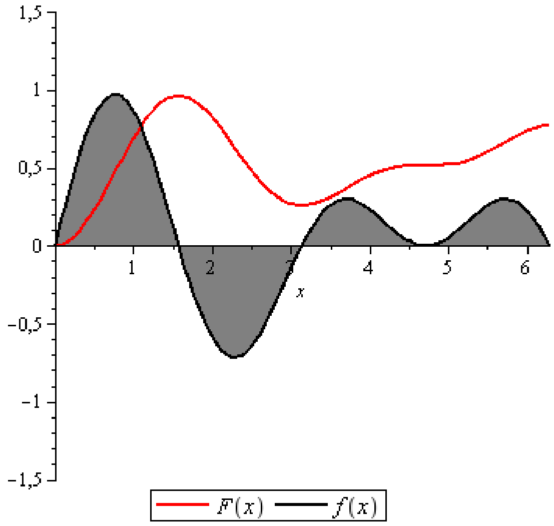


Figura 2: Gráficas de *f(x)=sen(2x)cos(x/3)* y *F(x)*= $\int_0^x f(t)\,dt$

3.3. Volumen de un sólido de revolución

El planteo y cálculo de la integral del volumen de un sólido de revolución es un problema para el cual la visualización es de especial importancia. Este tema, se aborda como una aplicación de la integral definida para funciones de una variable.

La actividad propuesta tiene como objetivo visualizar los sólidos de revolución con cavidades que se generan al hacer girar una región plana sobre un eje. Para visualizar estos sólidos el recurrir al uso de un software, es beneficioso para alumnos y profesores.

Actividad:

> Sea la región limitada por $y=x$, $y= x^2$ en el intervalo [0,1].
> a) Graficar la región.
> b) Rotar esa región alrededor del *eje x*.
> Notar que la región no esta "pegada" al eje, entonces cuando giremos esa área se generan secciones transversales que serán coronas o discos y el sólido que se formará tendrá cavidades. Las coronas tendrán un radio menor de $y=x^2$ y un radio mayor de $y=x$.
> *Observando* el área a rotar plantear la *integral que calcula el volumen del sólido generado*.
> b) Observe lo que sucede si rotamos la misma área, alrededor del *eje y*. Visualice el área y los correspondientes radios transversales y plantee la integral que calcula su volumen.

Los alumnos, utilizando las sentencias correspondientes a esta actividad, disponibles en el material digital, generan, entre otras, gráficas como las que se observan en la figura 3. A partir de las gráficas, plantean las integrales que calculan dicho volumen. En el caso en que el sólido tenga cavidades, se hace hincapié en observar los radios "menor" y "mayor".

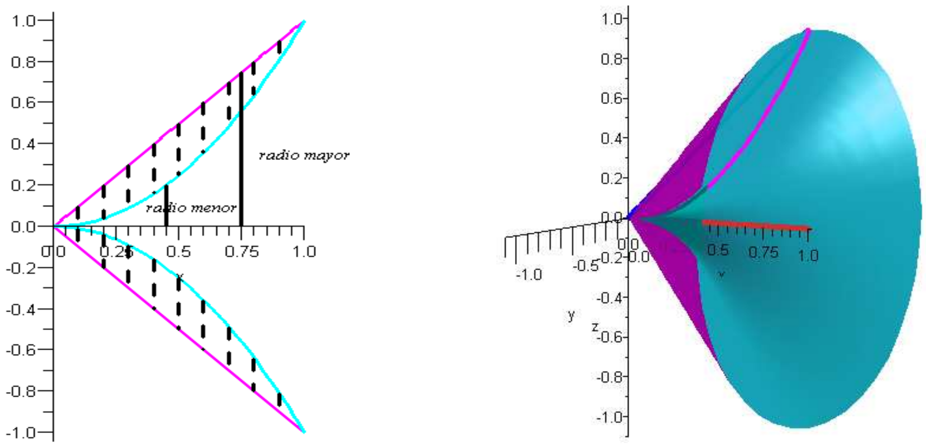


Figura 3

3.4. Campo de direcciones de una ecuación diferencial

Se presenta a los alumnos una actividad en la que construyen en un gráfico el *campo de direcciones* para una ecuación diferencial de primer orden $y'=f(x,y)$. En el mismo se bosquejan pequeños segmentos de recta con pendiente $f(x,y)$ que permite visualizar la forma general de las curvas solución. Los alumnos trazan algunos segmentos del campo de direcciones, con lápiz y papel, con el objetivo de interpretar geométricamente que "*en un punto (x,y) la pendiente de una curva solución es f(x,y)*" e intuir la forma general de las curvas solución. Los alumnos vinculan estos conceptos con lo estudiado en la materia precedente para poder concluir que en la vecindad de *(x,y)*, si existe la derivada, la tangente aproxima a la curva, o sea que los pequeños segmentos son aproximadamente una porción de la curva y que cuanto más segmentos se tracen, más clara se vuelven las imágenes de las curvas que son solución. Finalmente utilizan un software matemático en el que visualizan el campo de direcciones y algunas curvas solución (Figura 4).

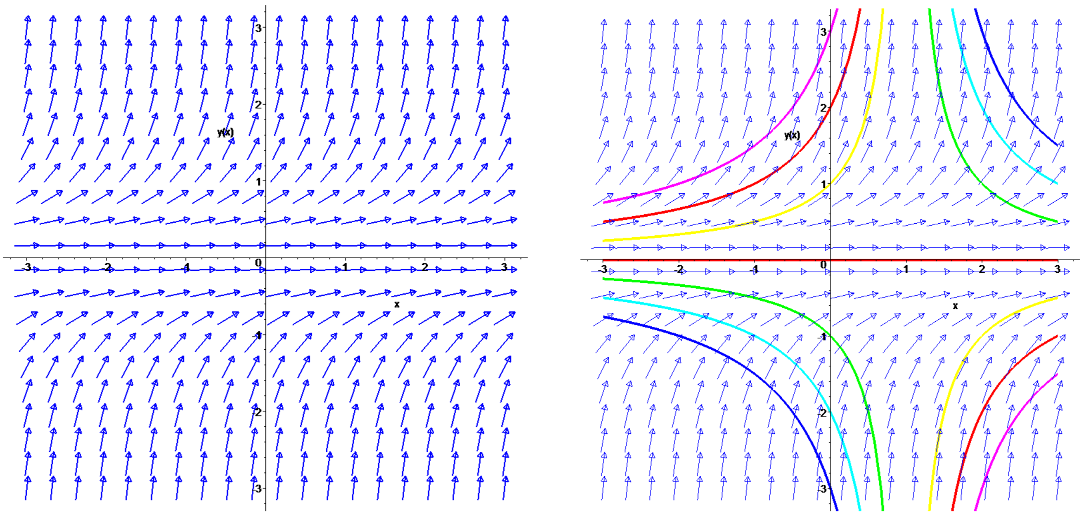


Figura 4: Campo de direcciones y curvas solución de $y'= y^2$

Actividad:

> Usando los comando de Maple (dfieldplot del paquete DEtools) visualizar el campo de direcciones para la ecuación $y' = y^2$.
> \> with(DEtools):
> \>dfieldplot(diff(y(x),x)=(y(x))^2, y(x), x=-3..3, y=3..3);
> A partir de la gráfica, dibuje algunas curvas solución. Si es posible encuentre la expresión de la solución general usando el comando dsolve.

3.5. Familia de curvas ortogonales

Los pares de familias de *curvas ortogonales*, que en todo punto de intersección lo hacen ortogonalmente, son de interés en la geometría plana, en algunas ramas de la matemática aplicada y en diversas ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante y en el estudio de la termodinámica, el flujo de calor a través de una superficie plana es ortogonal a las curvas isotermas (curvas de temperatura constante).

En la actividad se propone a los alumnos que a partir de una familia de curvas, encuentren analíticamente la familia ortogonal, grafiquen ambas familias y verifiquen visualmente la relación de ortogonalidad de las mismas.

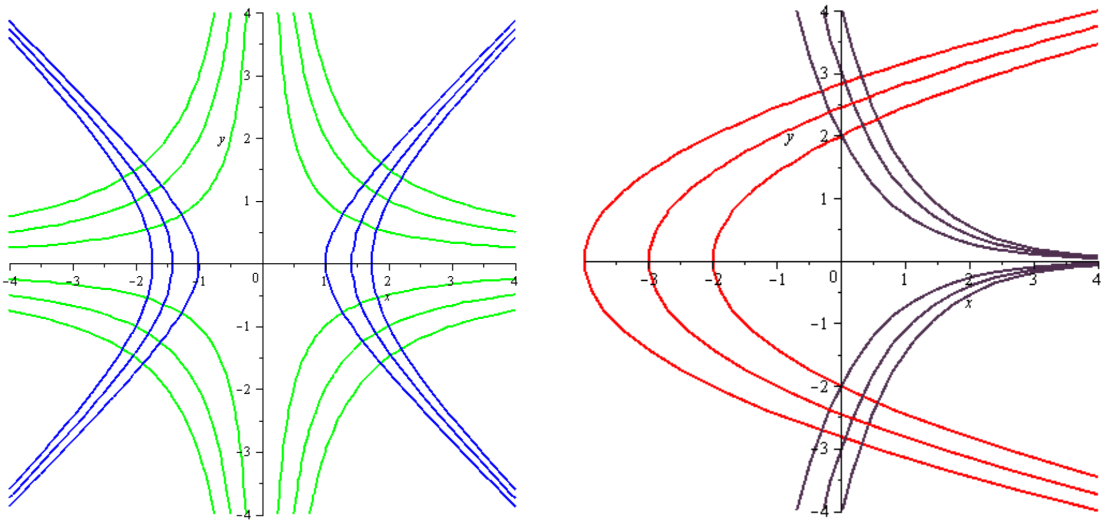


Figura 5: Familias de trayectorias ortogonales

Actividad:

Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas: x^2-y^2=k, donde k es una constante arbitraria. Graficar ambas familias en un mismo gráfico.

Para la resolución de la actividad, los alumnos, asocian la familia uniparamétrica dada, *f(x,y,k)=0,* con la solución de la ecuación diferencial de primer orden *F(x,y,dy/dx)=0*, obteniendo las trayectorias ortogonales al resolver la ecuación diferencial *F(x,y,-dx/dy)=0.* La visualización de la gráfica de ambas familias (Figura 5), completa, en los alumnos, el entendimiento del concepto.

4. Encuesta a docentes de la asignatura

Se consultó a los docentes de la asignatura Matemática B, sobre la importancia de la visualización en las clases de matemática. Para ello, se elaboró un cuestionario (Tabla 1) con cuatro preguntas, de las cuales las tres primeras fueron de ítem cerrado. La última, se formuló con opciones no excluyentes a elegir entre algunas dadas. La encuesta fue enviada por mail a cada destinatario y respondida en la misma forma.

Preguntas
1) ¿Considera que la visualización en matemática es importante? SI NO
2) ¿En sus clases, recomienda a sus alumnos realizar gráficos para visualizar los problemas o situaciones planteadas? SI NO
3) ¿Considera que hay problemas o situaciones en las que un software matemático, como herramienta de visualización, ayuda a la comprensión de estos, más que la tiza y el pizarrón? SI NO
4) De los siguientes conceptos cuáles considera que los alumnos aprenderán y conceptualizarán mejor a partir del uso de un software que visualice el problema.
a) Integral definida como límite de sumas de Riemann
b) Teorema fundamental del cálculo
c) Función integral
d) Sólidos de revolución
e) Gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones
f) Rotor y Divergencia
g) Relación entre Campos gradientes y curvas equipotenciales
h) Otra

Tabla 1

La asignatura está conformada por una totalidad de 32 docentes, entre Profesores, Jefes de Trabajos Prácticos y Ayudantes. Del total, contestaron la encuesta en forma voluntaria 15 de ellos, siendo esto el 47% del total.

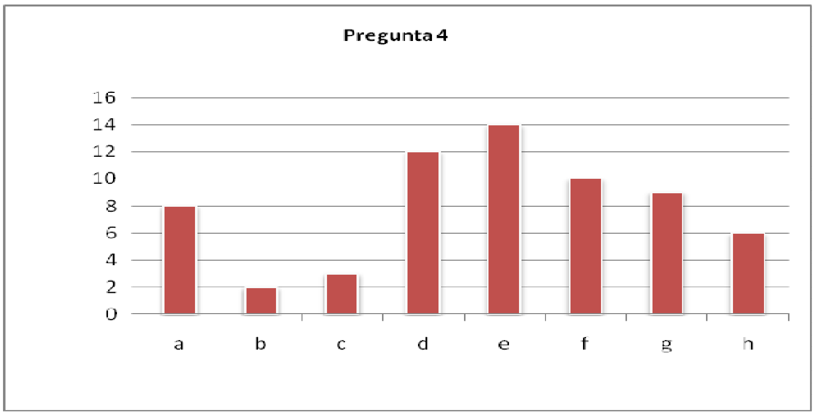
Las tres primeras preguntas fueron respondidas afirmativamente por todos los consultados. Algunos docentes agregaron comentarios sobre el tema.

Con respecto a la primera pregunta sobre la importancia de la visualización, uno de los docentes destacó:

> *Es importante. Muchas veces hay que “ver” lo que sucede antes de “atacar” un problema. Igual que cuando uno quiere demostrar un teorema: si no hay una intuición a priori, si no “visualizamos” una estrategia desde el comienzo, o bien no llegamos a nada o bien llegamos pero no nos deja una moraleja. Visualizar, en sentido amplio, es una de las tantas formas de relacionar. Por ejemplo, ¿qué es mejor, resolver problemas que involucren el concepto de ortogonalidad a partir de las propiedades del producto interno, o tratar de asimilar ese concepto cada vez que sea posible al más visualizable de “perpendicularidad”? Todos nos hemos apoyado felizmente en la geometría. Relacionar es siempre bienvenido, y una de las maneras de descubrir relaciones ocultas es a partir de la visualización.*

Con respecto a la tercera pregunta referida a la utilización de un software como herramienta de visualización para comprender un problema o una situación que se plantee, los docentes en general consideran que ello favorece la interpretación y comprensión de los temas. Un docente expresa: “P*or ejemplo: ¿Cuántos gráficos de* *sumas de Riemann hacemos cuando definimos la integral definida? Probablemente hacemos uno, con cuatro rectángulos, y después discutimos cómo hacer para mejorar las aproximaciones. Probablemente hagamos las cuentas para un par de sumas de Riemann, pero no más".*

Con respecto a la cuarta pregunta, en la Figura 6, se observa la cantidad de elecciones respecto de cada ítem seleccionados por los docentes.



a) Integral definida como límite de sumas de Riemann

b) Teorema fundamental del cálculo

c) Función integral

d) Sólidos de revolución

e) Gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones

f) Rotor y Divergencia

g) Relación entre Campos gradientes y curvas equipotenciales

h) Otra

Figura 6

La lectura del diagrama de barras muestra que los docentes encuestados consideran que las *gráficas de campos vectoriales en tres dimensiones y sólidos de revolución* son aquellos temas en los cuales la visualización con software matemático aporta y enriquece el entendimiento. Además, otros docentes opinan que para facilitar el aprendizaje, la visualización es necesaria en general. Algunos docentes agregan otros temas a la lista propuesta en la encuesta: gráficas de sólidos en tres dimensiones, sucesiones y series numéricas.

Una frase interesante que proporciona uno de los encuestados es: "v*isualizar, en sentido amplio, es una de las tantas formas de relacionar*".

5. Conclusiones

La opinión de los docentes de la cátedra manifiesta la importancia de la *visualización* en matemática. La incorporación de imágenes y simulaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje proporcionará un escenario propicio para el descubrimiento y el entendimiento de conceptos abstractos. Una perspectiva visual aportará estímulos en la construcción de ideas y conceptos sin dejar de lado las representaciones formales y simbólicas. Consideramos que el uso de diversos recursos que permitan manipular imágenes, relacionar y combinar distintas representaciones simbólicas y geométricas, complementará el proceso cognitivo del alumno. Esto favorecerá la comprensión de conceptos matemáticos que presentan gran riqueza de contenido visual, promoviendo la autonomía y participación activa del alumno.

Bibliografía

Ausubel, D. P., Novak J. D. & Hanaseian H. (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Bruner, J. (1972). *Hacia una teoría de la Instrucción*. México: Hispano Americana.

Bucari, N., Abate S. y Melgarejo A. (2004). *Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcances*. Anales IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, 104 - 111, 1 al 3 de septiembre, Buenos Aires, Argentina.

Costa, V., Di Domenicantonio, R. y Vacchino, M. C. (2010). *Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial*. UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Nº 21, 173-185.

Davis, P. J. (1993). *Visual theorems*. Educational Studies in Mathematics, 24 no. 4, 333–344. Springer. Netherlands.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid.

De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Primera Edición, Pirámide, Madrid.

Hilbert, D. (1900). *Problemas Matemáticos*. Conferencia ante el Congreso Internacional de Matemáticos, París.

Hitt, F. (2003). *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003) 213.

Malbrán, M. y Pérez, V. (2002). *Lectura en medios electrónicos. Una experiencia universitaria*. Trabajo presentado en el 5º Congreso Internacional de Promoción de la Lectura y el Libro. 28º Feria Internacional del Libro de Buenos Aires, Abril, Buenos Aires, Argentina.

Oostra, A. (2001). *Los diagramas de la Matemática y la Matemática de los diagramas*. Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen VIII Nº. 1, 1–7.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España. Recuperado en línea el 24 de marzo de 2011: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=940

Ricardo, H (2008). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Editorial Reverte.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4ª. Edición. Editorial Thomson Learning.

Vallejo, D. y Vacchino, M.C. (2009) *Un material destinado a un curso de integración en una y varias variables para alumnos de primer año de Ingeniería*. Actas del Congreso Nacional de Enseñanza de la Matemática y de las Ciencias Naturales, Mendoza, 12 al 13 de Noviembre de 2009. Argentina.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, D.C. Mathematical Association of America*. Notes and Report Series, Vol 19. 1-8.

Zill, D. (2009) *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning Editores, 532 pp.

Rossana Di Domenicantonio. Profesor Adjunto Interino, en Matemática A y Matemática B, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Calculista Científico (1987) y Especialista en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática Universidad Nacional de La Plata (2010).
rossanadido@ing.unlp.edu.ar

Viviana Angélica Costa, Profesor Adjunto Ordinario, Matemática B, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina. Licenciada en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP (1989). Magíster de la Universidad de Buenos Aires (2002). Coordinador de la Unidad de Investigación y Desarrollo, "Investigación en metodologías alternativas para la enseñanza de las ciencias".
www.ing.unlp.edu.ar/fismat/imapec vacosta@ing.unlp.edu.ar,

María Cristina Vacchino. Profesor Titular Ordinario en Matemática B, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina. Profesora en Filosofía y Pedagogía (1969). Licenciada en Matemática, UNLP (1973), Especialista en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática, UNLP (2008) Argentina.
cristina.vacchino@ing.unlp.edu.ar