



MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

La comprensión de gráficas de porcentaje de variación en situaciones cotidianas

María C. Espinel; Alicia Bruno; Inés Plasencia

Resumen

Los porcentajes aparecen a diario en nuestra vida de muchas formas, una de ellas es para poner de manifiesto cambios que expresen aumento o disminución (crecimiento o decrecimiento) del valor de una variable, y con frecuencia ese cambio se muestra mediante un gráfico. El estudio que se presenta recoge en qué medida estudiantes universitarios comprenden y perciben la variación, expresada por porcentajes, en el uso cotidiano y cómo lo aprecian cuando se refleja sobre un gráfico con rectángulos. Los resultados del estudio sugieren que los estudiantes tienen una débil comprensión del uso del porcentaje como indicador de cambio, por lo que la formación matemática básica debería incidir en concepto.

Abstract

The percentages appear daily in our lives in many ways, one of them is to highlight changes expressing increase or decrease of the value from a variable, and often this change is shown by a chart. The study presented here reflects the extent to which students understand and perceive the change, expressed in percentages, in common usage and how they appreciate it when it is reflected on a graph of rectangles. The study results suggest that students have a weak understanding of this concept, and therefore the basic mathematical training should stress on the use of the percentage as a statistic indicator of change.

Resumo

Em muitos aspectos diários da nossa vida aparecem percentagens. Nomeadamente, para destacar as mudanças de uma variável que aumenta ou diminui. Muitas vezes esta mudança surge na forma de um gráfico. O estudo apresentado reflecte em que medida estudantes universitários compreendam e percebem a variação, expressa em percentagens, numa situação de uso comum ou numa situação apresentada na forma de um gráfico de rectângulos. Os resultados do estudo sugerem que os estudantes têm uma fraca compreensão deste conceito pelo que a sua formação inicial em matemática deveria incidir mais sobre a utilização da percentagem como indicador de variação.

1.Introducción

Los cambios o variaciones que sufre el valor de una variable en el tiempo se acostumbra, en muchas ocasiones, a presentar utilizando porcentajes. Estos porcentajes aparecen en los medios de comunicación y están presentes en

nuestra vida cotidiana. Tópicos como “el IPC ha subido respecto a...”, “el precio de la gasolina ha bajado un...”, “el paro ha subido respecto al mismo mes del año anterior en...”, etc., son frases que encontramos a diario en la prensa. Además, estas informaciones suelen venir acompañadas de una gráfica con dos rectángulos que permite visualizar y sintetizar la información. Nos preguntamos si los estudiantes interpretan correctamente dicha información gráfica, sabiendo que es frecuente en los medios de comunicación y que es útil para todas las personas en su vida cotidiana o profesional, por lo que debe formar parte de la cultura estadística de cualquier ciudadano.

Según Gal (2002, pp. 2-3), el término cultura estadística fundamentalmente, alude a las siguientes dos competencias:

- a. Interpretar y evaluar de forma crítica la información estadística, los argumentos apoyados en datos, o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación.
- b. Discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones cuando sea relevante.

En la prensa, es frecuente, recurrir a un gráfico con dos rectángulos para mostrar la variación relativa en términos de porcentajes. En estadística, para la presentación y análisis de datos es fundamental la construcción y lectura de gráficas, y una referencia obligada, ya que muestra el estado de la cuestión sobre gráficos, se debe a Friel, Brigh y Curcio (2001), que consideran que comprender y saber usar gráficas es una parte clave en el desarrollo del pensamiento estadístico.

También el término *Quantitative Literacy* incluye el dominio de los porcentajes, ya que se considera que éstos han de formar parte de la cultura cuantitativa de todo ciudadano. Así, este término se entiende como una forma de habitar la mente, y requiere la interacción entre el profesor y el alumno para que estos últimos integren el conocimiento construido en el contexto social en que viven (Madison, 2006).

El estudio de los porcentajes ha sido objeto de distintas investigaciones (Schield, 2006), debido a las dificultades que manifiestan los alumnos para su uso correcto, muchas veces debidas a problemas lingüísticos. Se puede encontrar trabajos en los que se proponen pautas para mejorar y ampliar el tipo de problema sobre porcentaje que se plantee a los alumnos (Martín, 1987).

Esta dificultad y preocupación por el tema se puede observar en el diseño de *applet*, como los que aparecen en la página:

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0249-04/apartado1.htm>

En el proyecto *Descartes* del Ministerio de Educación en España, la enseñanza de los aumentos porcentuales e índices de variación se tratan en el bloque de algebra, en el tema de proporcionalidad, pero quizás de una forma demasiado formal para estudiantes de secundaria, a los que va dirigida la página:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/porcentajes.htm

En el bloque de números, la variación expresada en porcentajes no aparece, posiblemente, porque se considera que es una idea más propia de estadística, y sin embargo, en ésta se considera sólo los números índices. Un número índice es

un indicador diseñado para describir los cambios de una variable en el tiempo, esto es, su evolución a lo largo de un determinado período. El porcentaje de variación es uno de los temas transversales en la enseñanza y precisamente por eso, muchas veces no se enseña (Vegas, 2005). En los textos escolares de secundaria se proponen ejercicios para encontrar aumentos o disminuciones porcentuales, pero no suelen considerar el porcentaje de variación, con algunas excepciones (véase, por ejemplo, Nortes Checa, 1996).

La poca importancia explícita que se da a este concepto en el currículo de España, choca con la que se observa en el currículo de otros países. Así, por ejemplo, en América Latina se utiliza el término variación porcentual, como se recoge en la página:

http://www.ine.cl/canales/chile_estadistico/estadisticas_precios/ipc/metodologia/pdf/metodocalculo.pdf

En los Estándares Curriculares del año 2000 de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en Estados Unidos aparece el concepto acompañado de una fórmula, y expresamente se indica que para calcular el porcentaje de variación se aplica:

$$\frac{(\text{Valor Final} - \text{Valor Inicial}) \times 100}{\text{Valor Inicial}}$$

Las variaciones que, con frecuencia, aparecen en la prensa son un buen motivo para introducir el concepto de variaciones absoluta y relativa, y su interpretación en términos de porcentajes, tal como aparece en algunas actividades de aula que se puede encontrar en el proyecto para la enseñanza de la estadística:

http://www.deie.mendoza.gov.ar/aem/material/word/Que%20sabemos%20sobre%20variaciones_%20Activ3.pdf

En el Informe PISA 2003 (MEC, 2005) aparece una actividad de uso de del concepto de variación como porcentajes. Así, en la actividad con título: "Cambio de los niveles de CO₂", se presentan tres preguntas que se refieren a la interpretación de un gráfico sobre la base de datos reales, acerca de los niveles de emisión de dióxido de carbono. En la primera pregunta, se pide a los estudiantes que expliquen el método para calcular un porcentaje de variación dado en un gráfico. La segunda pregunta requiere que los estudiantes razonen el significado de los porcentajes en dicho contexto. La tercera pregunta pide a los estudiantes que reflexionen sobre los posibles significados matemáticos de la palabra "aumento" en la actividad dada, y proporcionen una explicación verbal.

Las tres cuestiones fueron relativamente difíciles para los estudiantes evaluados en la prueba de PISA de 2003. (Ver página 29, del documento del ICME donde se comenta la dificultad de las preguntas:

<http://www.icme-organisers.dk/tsg02/proceedingsTSG2.pdf>

1.1. Antecedentes

Una de las gráficas más usuales en la prensa económica es la representación con dos rectángulos para mostrar el porcentaje de variación de una variable en dos fechas determinadas. Otros gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en la prensa son las series temporales, en los que también aparece el concepto de porcentaje de variación, o incluso el número índice. El estudio de los gráficos que aparecen en los medios, es una línea de trabajo

fructífera y que siguen algunos investigadores en educación estadística (Monteiro y Ainley, 2007).

En Espinel (2007) se tomó el gráfico de la figura 1, para estudiar la comprensión del mismo por parte de estudiantes universitarios. Concretamente, se pidió a un grupo de estudiantes, futuros profesores de primaria que justificaran el 7% que aparece en dicho gráfico.

Se esperaba que los alumnos justificaran el resultado del 7%, realizando la operación: $[(309,5 - 289,3) \times 100] : 289,3 = 6,98$, y que por aproximación, dieran el 7%. Si bien, se encontró que la mayoría de los alumnos recurrían a una “regla de tres” y así conseguían la respuesta que no siempre era la justificación correcta. El ejercicio puso de manifiesto que los alumnos no saben cómo se calcula la variación de porcentaje. Sin embargo, quizás el no saber el cálculo apropiado no necesariamente implica no captar su significado en el sentido de aumento o disminución respecto a un año base. La “fijación” que muchos alumnos manifiestan con la “regla de tres”, y que ésta ejerce después de que la aprenden, es motivo de algunas investigaciones y se le ha etiquetado como “la ilusión de la linealidad” (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008).



Figura 1

Nuestra investigación estudia en qué medida los estudiantes universitarios conocen y captan el uso de los porcentajes, cuando se utilizan para indicar la variación de crecimiento o decrecimiento, respecto a una cantidad origen, y en especial, la apreciación visual del porcentaje de variación.

2. Metodología de la investigación

Para analizar el conocimiento del porcentaje de variación se diseñó una prueba en la que aparecen usos cotidianos de este concepto y gráficos tomados de la prensa.

Muestra: La población que responde a la prueba está formada por 94 estudiantes, pertenecientes a dos facultades, 65 alumnos de la Facultad de Educación del título de Maestro (especialista en Educación Musical y en Educación Infantil) (EDU); y 29 alumnos de la Facultad de Empresariales que cursan segundo de Administración y Dirección de Empresas (ADE). Se considera de interés para el estudio los dos grupos de alumnos, ya que los estudiantes de la Facultad de Educación tendrán en el futuro que enseñar el concepto de porcentaje y de los

estudiantes de la Facultad de Empresariales se espera que dominen el concepto para el desarrollo de su vida profesional.

Prueba: La prueba consta de 6 preguntas cuyos enunciados corresponden a datos reales y gráficos tomados de la prensa, con los que se pretende conocer la percepción gráfica del porcentaje de variación que tienen los estudiantes. El cuestionario combina preguntas en las que el alumno debe seleccionar o emparejar la solución que considera correcta (elección múltiples), con otras en las que ha de operar o construir gráficos para encontrar la solución. La prueba que se administró a los alumnos se recoge en el ANEXO.

2.1. Resultados

A continuación se recoge cada una de las preguntas, acompañada de algunos comentarios que justifican su pertinencia. Mediante una tabla se muestran los resultados de las respuestas de los dos grupos de alumnos expresadas en porcentajes. En cada tabla se resalta la respuesta correcta. Se acompaña de un somero análisis de estos resultados, teniendo en cuenta las estrategias que utilizan los alumnos para dar su respuesta.

Cuestión 1:

1. Una chocolatina que antes costaba 100 pesetas, ahora vale 1 euro (166 pesetas). Hallar el porcentaje de aumento experimentado en el precio de la chocolatina.

Esta pregunta presenta el cálculo de un porcentaje usual, lo realizan los alumnos como actividad escolar, y en este sentido se puede encontrar en los libros de texto de la enseñanza obligatoria. Y además, por las monedas a que alude el enunciado, tiene cierto interés cotidiano, ya que aun en la calle, muchas personas discuten lo que han subido los precios con el cambio de pesetas a euros.

Los resultados se recogen en la tabla 1 según las dos facultades. Se presentan los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y respuestas en blanco.

Tabla 1: Respuestas de los estudiantes por facultades

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
Correcta: 66%	41,5%	69%
Incorrecta	41,5%	31%
Blanco	17%	

Como se puede observar en la tabla 1, sólo un 41,5% de los estudiantes para profesores (EDU) responden correctamente, escribiendo que el aumento del precio de la chocolatina ha sido del 66%, el resto de los alumnos dan otros porcentajes, o no responden. En el grupo de estudiantes de ADE los resultados son manifiestamente mejor, ya que casi el 70% de ellos responde correctamente. Las respuestas incorrectas en ambas facultades corresponden a dar porcentajes de aumento muy diferentes, tales como: 60; 66; 60,2; 62,24; 0,6; 0,0066; 40; 39,7; 37; 35,7; 36; 1,66.

En relación con las estrategias que utilizan los estudiantes para hallar el porcentaje pedido, destaca el uso de la "regla de tres". Así, de los 94 alumnos hay

52 que aplican una regla de tres para encontrar la respuesta, ya sea esta correcta o no (un 55,3% del total de los alumnos, un 58,5% de EDU y un 48,3% de ADE). Esto es, más de la mitad disponen como único recurso para averiguar la variación, el planteamiento y cálculo de una regla de tres. Se observa que recurren a ella, tanto los estudiantes para profesores como los de empresariales. A continuación se muestran tres casos ilustrativos de los procedimientos seguidos por los alumnos que apoyan su respuesta en el uso de esta regla.

Caso 1: Entre los estudiantes para profesores, que dan el resultado correcto (66%), aparece con frecuencia la pauta: $166-100 = 66$ aumento

$$\begin{array}{l} 100 \text{ ___ } 100\% \\ 66 \text{ ___ } x \qquad \qquad \qquad x = 66\%. \end{array}$$

Caso 2: Entre los estudiantes de empresariales con respuesta correcta, señalamos la estrategia:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ ptas. ___ } 100\% \\ 166 \text{ ___ } x \qquad \qquad \qquad x = 166\% \end{array}$$

Y luego, escriben: $166-100= 66\%$ de aumento.

En esta forma de proceder está la idea de número índice, que los estudiantes de ADE probablemente sí conocen.

Caso 3: Como ejemplo de aplicar regla de tres con respuesta incorrecta, se tiene:

$$\begin{array}{l} 166 \text{ ___ } 100\% \\ 66 \text{ ___ } x \qquad \qquad \qquad x = 39,7\% \end{array}$$

En las tres siguientes preguntas del cuestionario, el estudiante sólo tiene que marcar la respuesta que considera correcta de las tres que se le proponen (elección múltiple).

Cuestión 2

2. A un agricultor le pagan las papas a 0,50 euros y la misma clase de papa se vende en el supermercado a 1,50 euros. Señalar qué incremento ha sufrido el precio de las papas desde el agricultor al supermercado.

- a. Incremento del 150%
- b. Incremento del 200%
- c. Incremento del 300%

En esta cuestión 2, las tres opciones muestran un incremento superior a 100. Los números que aparecen en las opciones pueden jugar en contra, si no se domina el concepto de variación. Puede reflejarse una confusión en los usos de los porcentajes, entendidos como una aritmética de mitad (50%), doble (200%) o triple (150% o 300%).

En la tabla 2 se recoge el porcentaje de alumnos que eligen cada una de las tres opciones. Si bien, para el grupo de ADE los resultados son un poco mejores que para EDU, en ambos grupos de estudiantes se observa que la opción correcta b (200%) y la opción incorrecta c (300%), están equiparadas, en cuanto al número de alumnos que las eligen. El hecho de que 1,50 es tres veces 0,50 lleva a una

interpretación errónea del incremento, esto es, confundir porcentaje con la idea de triple que sugieren los números. En este caso, además, sin prácticamente diferencia entre los alumnos de las dos facultades.

Tabla 2: Porcentaje de respuestas por facultad y opción

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
a. 150%	15,4 %	10,3 %
b. 200%	40 %	48,3 %
c. 300%	44,6 %	41,4 %

A pesar de que es una pregunta en la que sólo deben señalar la opción que consideran correcta, hay 14 estudiantes de EDU que muestran sus cálculos con una regla de tres, que a la mayoría les lleva a elegir una solución incorrecta. Entre los de ADE sólo aparece en las producciones de dos alumnos. A continuación, se recogen tres casos para ilustrar las estrategias.

Caso 1. Eligen la solución 300%, debido al siguiente planteamiento:

$$\begin{array}{l} 0,50 \quad _ \quad 100 \\ 1,50 \quad _ \quad x \end{array} \quad x = 300\%$$

Caso 2. Algún estudiante aporta la solución 150% con la regla de tres:

$$\begin{array}{l} 1 \quad _ \quad 100\% \\ 1,50 \quad _ \quad x \end{array}$$

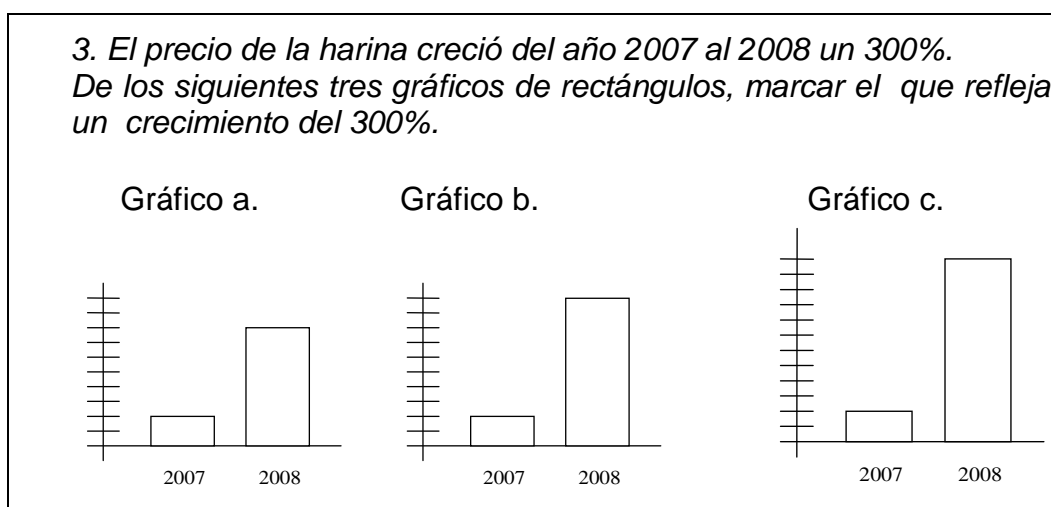
Caso 3. Basan la respuesta correcta, 200%, por el resultado de la regla de tres:

$$\begin{array}{l} 0,5 \quad _ \quad 100 \\ 1,50 \quad _ \quad x \end{array} \quad x = 300 - 100 = 200\%$$

En este caso, en la respuesta se aprecia una incorrecta escritura matemática, puesto que x es 300.

Cuestión 3:

La siguiente pregunta se dedica a la apreciación gráfica del incremento de variación del precio de un producto.



Se trata de saber si hay una apreciación del concepto de porcentaje mostrado de forma visual o gráfica. Se muestran tres opciones de aumento, y el estudiante ha de discriminar entre las tres, si bien se aporta una escala que facilita la elección.

Los porcentajes de elección en esta pregunta se recogen en la tabla 3.

Tabla 3: Porcentaje de respuestas por facultad y opción

Respuesta	EDU (N=65)	ADE (N=29)
Gráfico a.	63, 1 %	75, 9 %
Gráfico b.	24, 6 %	-
Gráfico c.	1,5 %	24,1%
Ninguno	3,1 %	-
Blanco	7,7 %	-

En esta pregunta los resultados de los estudiantes de ADE, un 76% de éxito, son mejores que los de EDU. Además, hay un comportamiento muy diferente para los alumnos de las dos facultades, que eligen erróneamente su respuesta. Así para ADE todos se inclinan por la opción c, aumento del 300%, sin embargo, entre los de EDU predomina la opción b. Dado que no hacen cálculos pensamos que la elección se hace considerando que una barra grande es la lógica para un aumento del 300%.

Este tipo de gráfico se encuentra a diario en la prensa escrita y aunque los resultados muestran un éxito relativo, es preocupante, ya que debería ser parte de la cultura numérica de todo ciudadano, el saber apreciar y leer gráficos de este tipo de forma correcta.

Cuestión 4

Para la siguiente pregunta del cuestionario, se emplearon los datos vigentes en las fechas que se pasó la prueba. Se trata de un dato llamativo, pues el precio del gasóleo, más barato en la Comunidad Canaria, subió casi a equipararse al de la gasolina.

4. El precio del gasóleo ha pasado de 0,792 euros a 0,975 en tres años. Esto supone un incremento del...:

- a. 8% b. 23% c. 81%

Esta pregunta 4 es análoga a la pregunta 1, en el sentido de que es un aumento inferior a 100%, aunque ahora el estudiante sólo ha de señalar una de las tres opciones. Si bien el hecho de aparecer números decimales menores que 1, puede ser una dificultad. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4: Porcentaje de respuestas según opción y facultad

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N= 29)
a. 8%	18,5 %	3,4 %
b. 23%	67,7%	82,8%
c. 81%	7,7%	13,8%
Blanco	6,1%	-

Los porcentajes de elección muestran que esta pregunta la responden correctamente la mayoría de los estudiantes, especialmente los de ADE.

De los alumnos que eligen la opción a del 8%, no hay ninguno que refleje los cálculos realizados, suponemos que sencillamente consideran que al ser números menores que la unidad, el resultado debe ser un incremento pequeño. Además, la diferencia entre los números 0,975 y 0,792 que aparecen en el enunciado es 0,183, lo que podría llevar a los estudiantes, que no dominen el concepto, a elegir la opción a, por ser un número pequeño.

También algún alumno puede quedar confundido con la opción c, ya que $0,975 - 0,792 = 0,183$, y $183 - 100 = 83$ está próximo a 81.

A continuación, se muestra lo apuntado por algunos alumnos que señalaron las otras opciones y dónde se ve que, de nuevo, la regla de tres es el recurso básico para resolver este tipo de problemas.

Caso 1. De los alumnos que responden correctamente (23%):

$0,975 - 0,792 = 0,183$, y luego regla de tres

$$\begin{array}{rcl} 100 & _ & 0,792 \\ x & _ & 0,183 \end{array} \quad x = 23 \%$$

Caso 2. Los que marcan 81% se debe a que realizan:

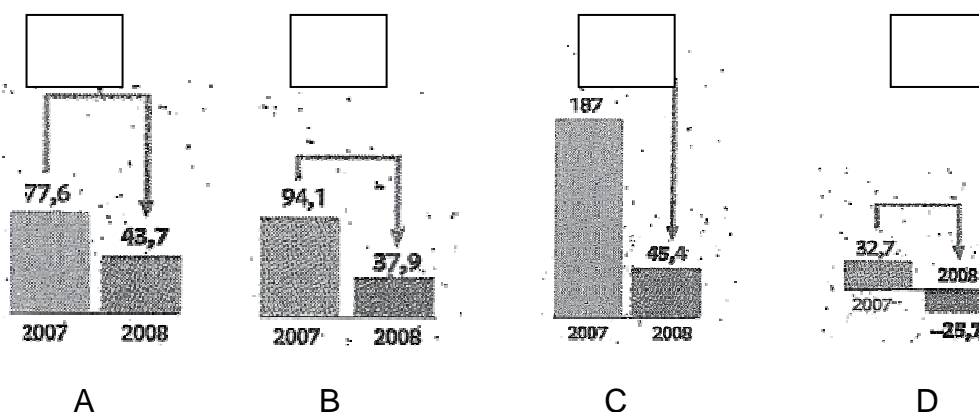
$$\begin{array}{rcl} 100 & _ & 0,975 \\ x & _ & 0,792 \end{array} \quad x = 81,23 \%$$

Cuestión 5

En la siguiente pregunta se utilizan gráficos tomados de la prensa y se trata de emparejar los porcentajes de variación que corresponden a cada gráfico, en los que las variaciones son negativas y una de ellas supera el 100%.

5. Los gráficos reflejan en millones de euros las ventas de diferentes inmobiliarias en los años 2007 y 2008.

Escribir en los recuadros cuál de los siguientes porcentajes se corresponde con el gráfico: -178,6% ; -75,7% ; -59,7% y -43,7%.



La asignación esperada a colocar en cada recuadro es:

A	B	C	D
- 43,7 %	- 59,7 %	- 75,7 %	- 178,6 %

En la siguiente tabla se recogen los porcentajes de éxito de cada gráfico:

Tabla 5: Porcentaje de emparejamiento correctos según facultades

Solución	EDU (N=65)	ADE (N =29)
A: - 43,7%	63,5%	62%
B: - 59,7%	54%	52%
C: - 75,7%	25,4%	41,4%
D: - 178,6 %	30%	41,4%

En esta pregunta, la mayoría de los alumnos emparejan correctamente las dos primeras gráficas cuyos porcentajes eran menores en valor absoluto, y mayor confusión les produjeron los gráficos C y D. En estos casos, muchos alumnos consideran que la mayor distancia, gráfica C, debe emparejarse con el porcentaje mayor, en valor absoluto. Y la confusión es más pronunciada para los futuros profesores, EDU, que para los alumnos de ADE. A una gran mayoría de los estudiantes les cuesta asociar una distancia pequeña, como la que aparece en la última gráfica, con un porcentaje superior a 100 en valor absoluto.

Cuestión 6:

La última pregunta del cuestionario utiliza datos de la vida cotidiana para pedir a los alumnos que elijan el porcentaje de incremento que consideran se ha producido en la situación planteada. Para ello deben elegir entre tres porcentajes dados.

A continuación, se les pide un gráfico con rectángulos para dicha situación.

6. En el año 2001, el litro de leche costaba 0.60 euros y en la actualidad cuesta 1,20 euros.

i. Señala el incremento que ha experimentado el precio de la leche:
 a. 100% b. 60% c. 50%.

ii. Construye un gráfico de rectángulos que refleje el incremento experimentado.

La primera parte de esta pregunta es análoga a las preguntas 1 y 4. Se espera confirmar la posible confusión con doble y mitad que puedan tener algunos alumnos.

Por otro lado, *a priori* se espera que sea más fácil que la pregunta 2, que mostraba un incremento mayor que 100. Los resultados de la primera parte de la pregunta se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 6: Porcentaje de respuestas en cada opción por facultad

Respuesta	EDU (N = 65)	ADE (N= 29)
a. 100%	47,7 %	75,9 %
b. 60%	9,2%	10,3%
c. 50%	40%	13,8%
Blanco	3,1%	-

En esta pregunta, los resultados son claramente mejores en los estudiantes de ADE. Los estudiantes para profesores, EDU, son los que más confunden el 50% con la mitad del precio de la leche, lo que lleva a un 40% de estos estudiantes a marcar la opción c.

En la segunda parte de la pregunta 6ii, se quiere observar la capacidad de los alumnos para construir un gráfico que recoja el incremento. Los resultados se muestran en la tabla 7.

Tabla 7: Porcentaje de respuestas en cada opción por facultad a la pregunta 6ii

Pregunta 6,ii	EDU (N = 65)	ADE (N=29)
Gráfico	52,3%	79,3%

Los datos muestran que prácticamente el 80% de los alumnos de ADE trazan un gráfico correcto de acuerdo con su opción en el apartado 6i.

Hay que observar cómo muchos de los alumnos que han respondido incorrectamente a la primera parte de la pregunta, pues han elegido la opción c (50%), luego construyen un gráfico teóricamente correcto, ya que el segundo rectángulo es el doble que el primero, es decir, que para ellos un aumento del 50% es duplicar el tamaño del gráfico. Así que esta pregunta (6 ii) tiene un falso éxito, ya que no refleja si realmente comprenden el porcentaje de variación, más bien, al contrario, refleja la confusión de que un 50% de variación se dibuja con un gráfico de doble altura.

3. Análisis de los resultados de la prueba

Los resultados anteriores muestran un primer análisis de la información, principalmente en cuanto a porcentajes de las respuestas elegida por los alumnos. A continuación se recurre a otras técnicas estadísticas que expliquen en mayor medida el comportamiento de los alumnos ante las preguntas consideradas.

Para ello, el cuestionario con 6 preguntas se ha desglosado en 10 ítems, como se muestra en la tabla 7. De forma que todas las preguntas se corresponden con un ítem, menos la pregunta 5 que pasa a tener 4 ítems, uno por cada gráfico, y la pregunta 6 que tiene dos ítems, uno por cada apartado.

3.1. Resultados según porcentajes de éxitos de los ítems

En la siguiente tabla se muestra un resumen del número de respuestas correctas y porcentaje de éxito de cada uno de los ítems para el total de los 94 alumnos que han participado en la experiencia.

Tabla 8: Todos los ítems con porcentaje de éxito

Clave	Euro	Papa	Harina	Gas	A	B	C	D	Leche	Gráf.
Pregunta	1	2	3	4	5	5	5	5	6	6
Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº correctas	47	40	63	69	60	51	30	33	53	60
Éxito	50%	43%	67%	73%	64%	54%	32%	35%	56%	64%

La observación conjunta de todas las preguntas muestra un éxito relativo en relación a la idea y percepción gráfica de variación que tienen los estudiantes universitarios que han participado en este estudio. Es preocupante un éxito tan insuficiente, teniendo en cuenta que además la prueba se ha diseñado utilizando enunciados con datos reales y gráficos de la prensa, algo que en principio se pensó que podría facilitar la elección de las respuestas correctas.

Dado que el cuestionario tiene algunos ítems muy parecidos, parece oportuno realizar una comparación de los resultados, para observar en qué medida la confusión o error está arraigado en algunos alumnos. El mejor resultado en cuanto a porcentaje de respuestas correctas corresponde a la pregunta 4, un 73% de éxito, cuando el incremento que interviene es menor que 100. Sin embargo, en la pregunta 1, en la que la variación es un 66%, también menor que 100, el éxito es menor, ya que sólo responden correctamente la mitad de los estudiantes. Entendemos que el hecho de darle opciones múltiples para dar la respuesta facilita el éxito en la respuesta.

La pregunta 2, que muestra uno de los resultados más pobres, aporta información cuando se compara con la pregunta 6. Ocurre que de los 41 alumnos, de un total de 94, que en la pregunta 2, marcaron la respuesta incorrecta c (incremento de 300%), luego en la pregunta 6 reflejaron el siguiente comportamiento: 23 alumnos eligieron la correcta, opción a; 3 eligieron b, y 15 alumnos marcaron la respuesta c. De lo que se deduce que hay errores que persisten y que los alumnos cambian de estrategia sin tener un comportamiento eficaz, lo que muestra cierta confusión en el concepto.

De los resultados obtenidos, en relación a la percepción del porcentaje de variación en el uso cotidiano y mediante un gráfico de dos rectángulos paralelos, preguntas 3 y 5, se deduce que el gráfico induce a respuestas erróneas o que hay un conocimiento que no es el correcto en muchos estudiantes.

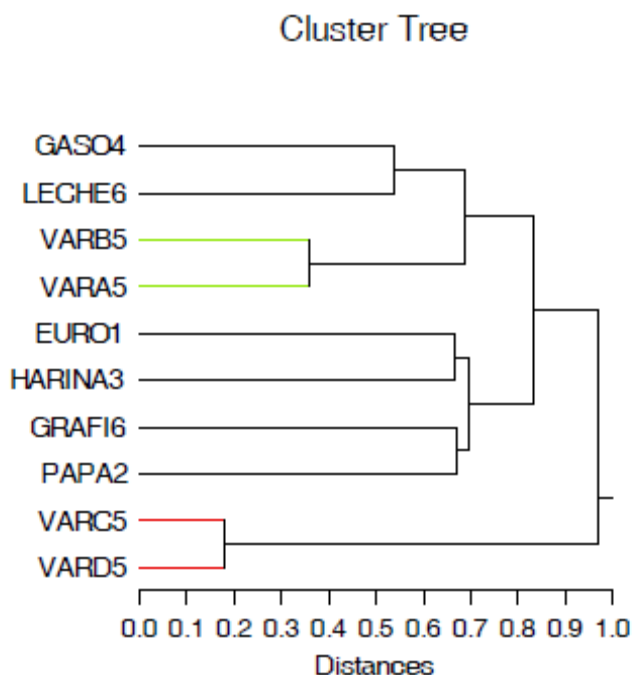
3.2. Análisis de similitud de los ítems según respuestas

Para estudiar a los alumnos por similitud entre sus elecciones en las preguntas se recurren a técnicas multivariante. Se trata de observar la relación o correlación entre el comportamiento de los alumnos en los diez ítems en que se han codificado las seis preguntas. En qué medida de proximidad se encuentran cuando a cada alumno se le ha asignado una ristra de diez ceros y unos según su respuesta sea correcta (1) incorrecta o blanco (0).

Se realiza un estudio sobre el comportamiento homogéneo que tienen los alumnos en los 10 ítems mediante un análisis por conglomerados. Para identificar

los grupos homogéneos de casos se utiliza la distancia euclídea y se utiliza como agrupamiento el método de Ward, esto es, minimizando la varianza dentro de cada grupo, se obtiene grupos homogéneos y tamaños similares. El resultado para los 94 estudiantes se muestra en la figura 2, con un diagrama de similitud de las respuestas de los estudiantes en la prueba.

Figura 2: Dendograma con las similaridad de los ítems según las respuestas



Para el análisis del dendograma de la figura 2 se consideran tres grupos de preguntas:

Un primer grupo (G1) formado por cuatro ítems: la pregunta 4 (GAS4) y el primer ítem de pregunta 6 (LECHE6) y los dos ítems más difíciles de la pregunta 5 (VARB5 y VARA5).

Un segundo grupo (G2) también de cuatro ítems que procede de primero agrupar la pregunta 1 (EURO1) con la 3 (HARINA3) y el segundo apartado de la pregunta 6 (GRAFI6) con la pregunta 2 (PAPA2).

El tercer grupo (G3) lo forman sólo los dos ítems de la pregunta 5 (VARC5 y VARD5) que presentaron la mayor confusión para los estudiantes, y que en la figura muestran la mayor disimilaridad con respecto al resto de los ítems.

Este análisis confirma la semejanza de algunas preguntas, por el resultado de cómo algunos alumnos mantienen sus respuestas correctas o no, y que ya se había señalado, observando sólo los porcentajes de éxito, al final del apartado 1. Es el caso, por ejemplo, de las preguntas 4 y 6.

3.3. Resultados mediante el modelo de Rasch

El procedimiento más acudido para resumir los datos que aportan los ítems es calcular el porcentaje de respuestas correcta. Este tipo de análisis es el primero que se ha recogido en el apartado de metodología de este trabajo, sin embargo, para mostrar los resultados de una forma más razonable sería deseable conocer

el nivel de dificultad de los distintos ítems. Desde el punto de vista matemático, la probabilidad de que un estudiante conteste correctamente a un ítem depende de la diferencia entre el nivel del estudiante y el nivel del ítem a través de un modelo logístico de un parámetro, según propone el matemático danés George Rasch en 1960 para el caso de ítems dicotómicos.

La formulación más conocida del modelo de Rasch se deriva de la predicción de la probabilidad de una respuesta al ítem (resolverlo correctamente, estar de acuerdo, etc.) a partir de la diferencia en el atributo entre el nivel de la persona (θ_v) y el nivel del ítem (β_i).

$$P_i(\theta_v) = \frac{\exp(\theta_v - \beta_i)}{1 + \exp(\theta_v - \beta_i)}$$

El modelo de Rasch, siendo una función probabilística, aporta un continuo relativo en el que se localizan la dificultad de ítems y la capacidad del estudiante. En este continuo, la dificultad de un ítem resulta de la comparación con los demás. Para ello, se centra la dificultad de los ítems en cero y se crea una escala relativa para comparar los ítems y las puntuaciones de los estudiantes. Este escalamiento común de estudiantes e ítems es una de las mayores ventajas de modelo ya que aporta una gran riqueza diagnóstica.

Para realizar el análisis de los datos, en este estudio, se ha recurrido al modelo citado por medio del programa informático Winsteps (www.winsteps.com). El análisis descriptivo de los datos, cuando las preguntas se convierten en diez ítems que se corrigen como bien o mal, da una calificación para los 94 estudiantes que oscila entre 0 y 10 puntos.

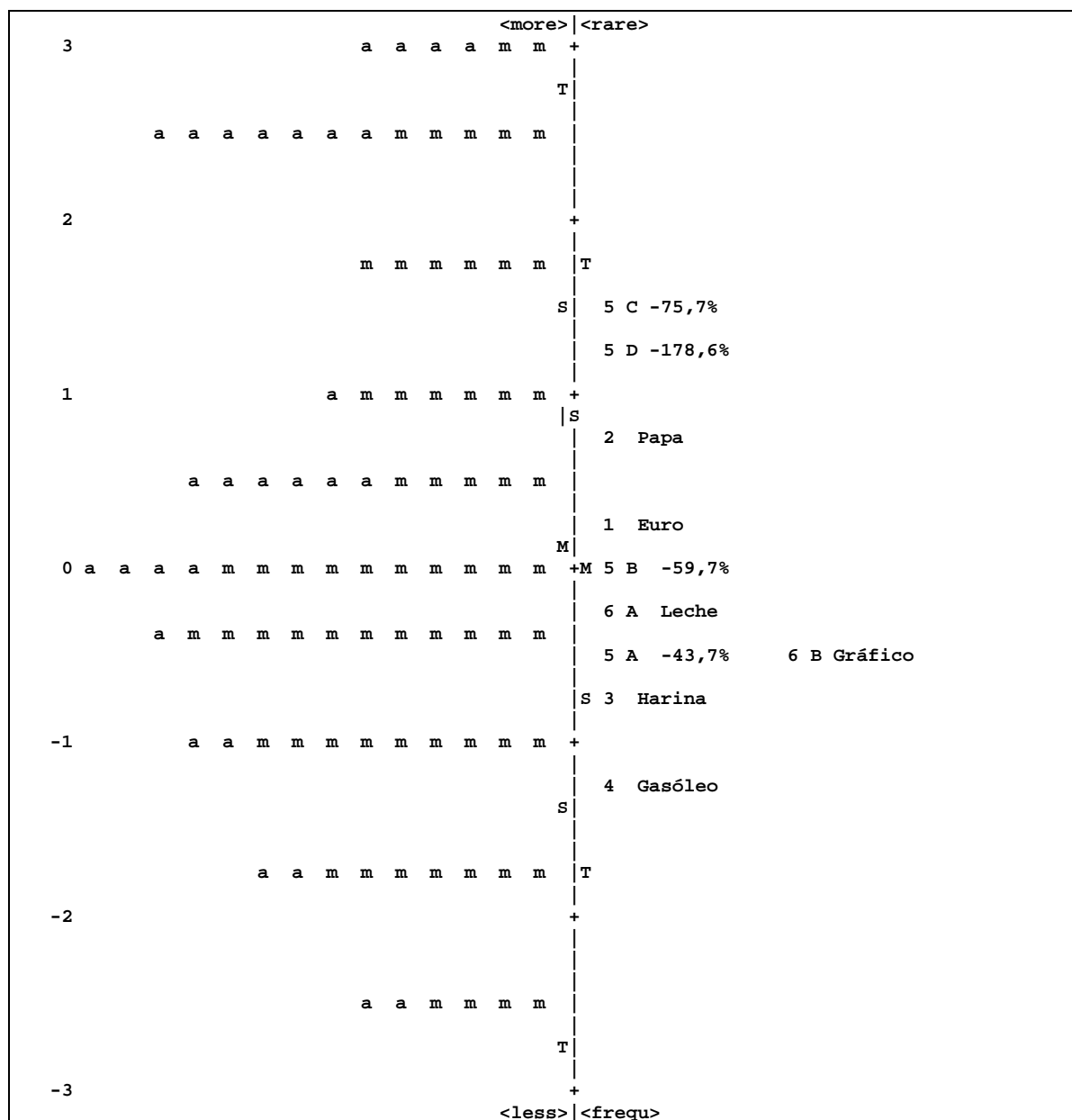
Los resultados, que se muestran en la tabla 8, para el total de 94 alumnos, dan que la calificación media es 5,4 y desviación típica 2,6. Siendo la calificación media más baja para los estudiante de educación (EDU), sólo un 5, que para los de empresariales (ADE), que es de 6,3, pero esos últimos tienen una mayor dispersión.

Tabla 8: Puntuación

Estudiantes	Media Aritmética	Desviación Típica
Total (N = 94)	5,4	2,6
EDU (N = 65)	5	2,4
ADE (N = 29)	6,3	2,8

El resultado del programa informático Winsteps (Linacre, 2007) proporciona que la fiabilidad de las preguntas es 0,89 y ofrece el mapa conjunto de personas e ítems que se recoge en la figura 3.

Figura 3. Mapa de medición conjunta de estudiantes e ítems
(m: EDU, a: ADE)



En la representación del continuo lineal característico de la metodología de Rasch, en el caso del estudio considerado, hay un rango de variación entre ± 3 *logit*. A la derecha de la línea están localizados los diez ítems y a la izquierda los 94 estudiantes.

El mapa permite observar que, en relación a los ítems, se tiene cómo el ítem más fácil ($-1,5$ *logit*), el de la pregunta 4, relacionado con el incremento del precio del gasóleo, y los más difíciles ($+1,5$ *logit*), son dos de los ítems de la pregunta 5 (C y D). Las preguntas 5 A, y 6 B se solapan, es decir, se localizan en un mismo nivel de dificultad.

A la izquierda de la figura 2 se muestra la localización de los alumnos de EDU (codificados con la letra m), y los de ADE (codificados con la letra a). Hay 17

estudiantes de ADE de los 29, que están en el mapa por encima de la media. Entre los 18 alumnos competentes, hay 11 de ADE y 7 de EDU, y en el nivel más bajo se localizan 15 alumnos, 4 de ADE y 11 de EDU. Los estudiantes de ADE están colocados en mejor posición en su mayoría que los de EDU. En este caso, la prueba resultó muy fácil para 18 alumnos y muy difícil para los 15 alumnos localizados en el extremo inferior del mapa.

4. Conclusiones

En un estudio previo al que se muestra en este trabajo, se pidió a estudiantes para profesores que indicaran cómo se calculaba un porcentaje correspondiente a la variación que aparecía en prensa (Espinel, 2007). Debían explicar y escribir todas las operaciones para encontrar dicho porcentaje de variación y cómo obtenían los datos para calcularlo. La mayoría de los estudiantes procedió por ensayo y error, mediante una regla de tres, cambiando los términos hasta que consiguieron un resultado que se aproximara al dado. Este tipo de acción tan deficiente fue el que nos animó a investigar qué está detrás de estos procedimientos tan deficientes, y por ello se preparó la prueba que aquí se ha presentado y analizado.

De los resultados del estudio, con estudiantes futuros profesores y de empresariales, llama la atención la alta frecuencia con la que recurren a una regla de tres para encontrar el porcentaje pedido. Y parece que la comprensión del concepto es mejor cuando se apoya en una gráfica. Les resulta más fácil cuando el porcentaje de variación que interviene es menor que cien. La combinación de las dos variables, porcentajes mayores que cien y negativos, son las preguntas que muestran una mayor dificultad.

Para un análisis conjunto de alumnos e ítems se recurre al modelo de Rasch (Linacre, 2007), y en el caso de esta prueba permite al investigador visualizar el ranking según nivel de dificultad de los ítems y su poca dispersión ($\pm 1,5$ *logit*), que contrasta con la distribución de los estudiantes que presenta una mayor dispersión (± 3 *logit*), debido a que hay unos pocos alumnos que dominan totalmente el concepto y una mayoría considerable que parece que lo desconocen y resuelven por intuición.

Las dificultades que presentan algunos conceptos estadísticos son objeto de varias investigaciones. El conocimiento deficiente de la recta numérica (Bruno y Espinel, 2005; Arteaga, Contreras y Gonzato, 2009) y de algunos gráficos estadísticos (Espinel, Bruno y Plasencia, 2008; Bruno y Espinel, 2009) ha quedado constatado en profesores de primaria en formación.

Pensamos que el concepto de variación y el procedimiento para calcularlo está deficientemente desarrollado en el currículo. Así que las personas llegan a desarrollar una idea completamente equivocada. Para avanzar se propone una modificación del conocimiento que puede incentivarse desde un racionalismo crítico e incluso desde la intuición. La permanencia en el tiempo de una concepción errónea perjudica y lleva a producir un error porque se ha fijado un conocimiento que en algún ámbito resultó eficaz. Este concepto de variación deficientemente desarrollado es muy grave en los dos colectivos de alumnos analizados. En los estudiantes de administración de empresas (ADE) porque este va a ser de uso cotidiano. Y en los futuros profesores (EDU) porque demuestran

una débil comprensión de los porcentajes que puede transmitirse a una generación. Consideramos que el concepto considerado ha de formar parte de una alfabetización cuantitativa de todo ciudadano.

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I).

Bibliografía

- Alsina, C. (2009): La dramatización de los números. *SUMA*, 60, 61-62.
- Arteaga, P., Contreras, J. M., & Gonzato, M. (2009): Elaboración de gráficos estadísticos y sentido numérico en profesore de pimaria en Formación. *Actas XIV JAEM (Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matematicas)*, Girona.
- Bruno, A., & Espinel, M. C. (2005): Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 57-85.
- Bruno, A., & Espinel, M. C. (2009): Construction and evaluation of histograms teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1, 1-21.
- Espinel, M. C. (2007): Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Actas XI SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática)*, 99-119. La Laguna. Tenerife. España.
- Espinel, M. C., Bruno, A., & Plasencia, I. (2008): Statistical graphs in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Joint ICMI/IASE* Monterrey: ICMI and IASE. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons
- Gal, I. (2002): Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1, 1-25.
- Madison, B. L. (2006): Pedagogical Challenges of Quantitative Literacy. American Statistical Association, Section on Statistical Education, Proceedings of the Joint Statistical Meeting, pp. 2323-2328. Alexandria V.A. Disponible en: <http://www.statlit.org/pdf/2006MadisonASA.pdf>
- Martinón, A. (1987): Nota sobre la enseñanza de los porcentajes en primero de BUP. *Números*. Revista de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, 2, 5, 59-63.
- Monteiro, C., & Ainley, J. (2007): Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2(3), 188-207. Disponible en: www.iejme/
- Niss, M. (2003): Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. Disponible en: http://www.maa.org/ql/pgs215_220.pdf
- Nortes Checa, A. (1996): *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Madrid, Santillana.
- Linacre, J. M. (2007): *Reliability and Separations. A User's Guide to Winsteps/Ministep Rasch – Model Computer Programs* Chicago: Winsteps. Disponible en: www.winsteps.com

- MEC (2005): *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Inecse. Madrid.
- Schild, M. (2000): Statistical literacy: Difficulties in Describing and Comparing Rates and Percentages. *Statistical Literacy ASA JSM 2000*. Disponible en: <http://web.augsburg.edu/~schild/MiloPapers/2000ASA.pdf>
- Schild, M. (2006): Statistical literacy survey results: Reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D, & Verschaffel, L. (2008): The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 3, 311-342.
- Vegas, M. I. (2005): Matemáticas y educación en valores. *SUMA*, 50, 37-45. Disponible en: www.revistasuma.es/index.php

María Candelaria Espinel, mespinel@ull.es; **Alicia Bruno**, abruno@ull.es;
Inés Plasencia, incruz@ull.es. Profesoras Titulares de Didáctica de la
Matemática en la Universidad de La Laguna.

ANEXO:

Nombre:.....

1. Una chocolatina que antes costaba 100 pesetas, ahora vale 1 euro (166 pesetas). Hallar el porcentaje de aumento experimentado en el precio de la chocolatina.
2. A un agricultor le pagan las papas a 0,50 euros y la misma clase de papa se vende en el supermercado a 1,50 euros. Señala qué incremento ha sufrido el precio de las papas, desde lo que le pagan al agricultor al precio del supermercado.
 - a. Incremento del 150%
 - b. Incremento del 200%
 - c. Incremento del 300%
3. El precio de la harina creció del año 2007 al año 2008 un 300%. De los siguientes tres gráficos de rectángulos, marcar el que refleja este crecimiento del 300%.

Gráfico a.

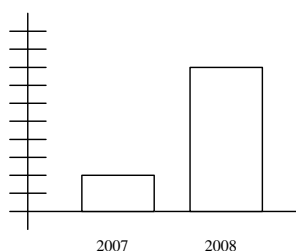


Gráfico b.

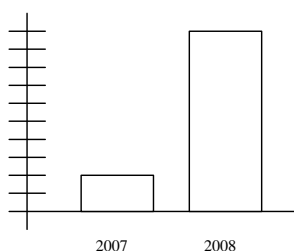
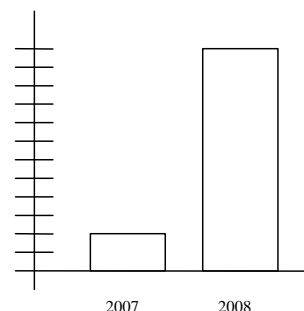
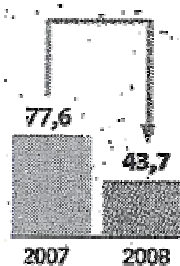
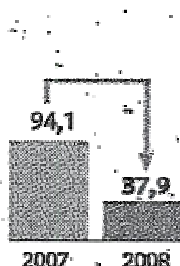


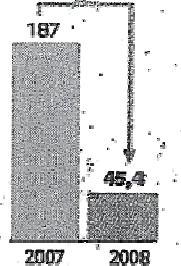
Gráfico c.

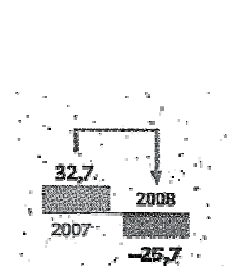


4. Los gráficos reflejan en millones de euros las ventas de diferentes inmobiliarias en los años 2007 y 2008. Escribir en los recuadros cuál de los siguientes porcentajes se corresponde con el gráfico: -178,6% ; -75,7% ; -59,7% y -43,7%









5. En el año 2001, el litro de leche costaba 0.60 euros y en la actualidad cuesta 1,20 euros.
- i. Señala el incremento que ha experimentado el precio de la leche:
- a. 100% b. 60% c. 50%
- ii. Construye un gráfico de rectángulos que refleje el incremento experimentado.