UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 34-46
ISSN: 1815-0640

¿Alguien sabe qué es el número?

Juan D. Godino, Vicenç Font Moll, Miguel R. Wilhelmi, Mario Arrieche

Resumen

Presentamos una visión global sobre los números naturales que puede ser útil para los profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria. Usamos un episodio de clase, en el que un formador de profesores presenta la construcción logicista de los números naturales, como contexto de reflexión sobre los diversos significados de los números. Nuestro análisis está basado en la noción de significado personal e institucional de los objetos matemáticos, entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a la solución de situaciones – problemas.

Abstract

We present a global view about whole numbers, which can be useful for primary and secondary school teachers. A class episode, in which a teacher educator introduces the set theoretical construction of these numbers to a group of students' teachers, is used as a context to reflect on the different meanings of numbers. The analysis is based on the ideas of personal and institutional meanings of mathematical objects. Meanings are here understood as systems of operative and discursive practices linked to specific problem-situations.

Resumo

Apresentamos uma visão global sobre os números naturais que pode ser útil para os professores de matemáticas de educação primaria e secundaria. Usamos um episódio de aula, onde um formador de professores apresenta a construção logística dos números naturais, como contexto de reflexão sobre os diversos significados dos números. Nossa análise está baseada na noção de significado pessoal e institucional dos objetos matemáticos, entendidos como sistemas de práticas operativas e discursivas ligadas à solução de situações – problemas.

1. Introducción

Uno de los temas de estudio usuales en el programa de formación inicial de maestros es "Números naturales. Sistemas de numeración", cuyo objetivo es la profundización por parte del estudiante del concepto de número natural y sus usos y de las relaciones con los sistemas de símbolos que los representan. Parece razonable que cuando preguntemos a un estudiante, *¿qué son los números naturales?*, no se limiten a recitar la serie 1, 2, 3,…, sino que sean capaces discriminar entre el concepto "número" de los símbolos y las palabras mediante los cuales se expresan. Sin embargo, es también esperable que no sean capaces de dar una definición de la noción de “número natural”. Esto no debe sorprendernos: el concepto de número natural ha sido motivo de fuertes controversias filosóficas; de hecho, la conceptualización actual es relativamente reciente (data de finales del siglo XIX y principios del XX). Asimismo, para cualquier concepto matemático, podemos encontrar distintas definiciones coherentes entre sí, pero que resaltan un determinado aspecto del número.

La naturaleza de los números naturales, y en particular su relación con los conjuntos, es una cuestión que interesa tanto a las matemáticas como a la filosofía de las matemáticas. Pero los números[1] son también herramientas esenciales en nuestra vida cotidiana y profesional, por lo que constituyen un tema de estudio imprescindible en la escuela desde los primeros niveles. El maestro debe tener, por tanto, ideas claras sobre los usos de los números, los sistemas de numeración, los procedimientos de cálculo, así como sobre el origen y naturaleza de los números.

En este trabajo, a partir de un episodio de clase en la formación de maestros, abordamos el estudio de las relaciones entre las nociones conjuntistas y los números naturales. Consideramos necesario distinguir entre los usos prácticos e “informales” de los números (responder cuestiones tales como, ¿cuántos elementos hay? o ¿qué lugar ocupa un objeto?), y los usos “formales” (qué son los números y cómo se construyen los sistemas numéricos); cuestiones estas últimas, relativas a los fundamentos de la matemática como cuerpo organizado de conocimientos. Dentro de estos dos grandes contextos de uso es posible distinguir diversos momentos históricos en los cuales las cuestiones se abordan con diversos recursos y desde distintas aproximaciones, poniéndose en juego prácticas operativas y discursivas propias. Vistos de manera retrospectiva podemos identificar ciertas invariancias que permiten hablar del “número natural”, en singular, pero desde un punto de vista local parece necesario distinguir entre los diversos números naturales que “manejaron” los pueblos primitivos y culturas antiguas (egipcios, romanos, chinos,…), como también entre las prácticas numéricas que se realizan actualmente en la escuela infantil o primaria, y las que realizan los matemáticos logicistas del siglo XIX o las formulaciones axiomáticas hilbertianas.

> "En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. <<No hay una matemática; hay muchas matemáticas>>." (Spengler, 1918, 96).

Así pues, la comprensión de la naturaleza y significado de los números requiere adoptar una visión antropológica sobre la matemática, como la propuesta, entre otras aproximaciones, por el “enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (Godino, Batanero y Font, 2007). Esta es la razón por la que en la sección 3 incluimos algunas ideas básicas sobre este marco teórico, las cuales son seguidamente aplicadas a discernir las características principales de los significados informales y formales de los números.

[1] En este artículo, por defecto, “número” es “número natural”.

Comenzamos presentando el episodio de clase mencionado[2], que nos va a servir de motivación inicial para el abordaje de este problema.

2. El episodio de clase

Incluimos, a continuación, un extracto de una interacción profesor-estudiantes de maestro en torno a la coexistencia, no siempre coherente, de concepciones diversas de los números naturales. El episodio es una muestra de los conflictos semióticos tanto de los estudiantes como del propio formador.

[El formador comienza la clase sobre "los números naturales" expresando]:

Trabajaremos primero el concepto de número, la idea, y después pensaremos en el idioma en que podemos escribirlo. ¿Qué son los números?, por ejemplo: ¿Qué es el número cinco? Se nos presenta un problema, utilizamos los números desde muy pequeños. Sin embargo, se nos pregunta, ¿qué es un número?, y tenemos dificultad para responder.

[Pregunta a los estudiantes]

¿Alguien sabe qué es un número?[3]

[Un alumno responde]

"Un signo que designa una cantidad".

[El profesor vuelve a preguntar],

"¿Qué es el número cuatro?"

[Los alumnos no responden].

[El profesor escribe en la pizarra el símbolo "4" y dice]:

Esto no es más que un signo. ¿Cuál sería la idea que hay detrás de esto?, ¿Cómo podría definirlo?

[El profesor se responde]

*Si quiero comunicar qué significa el número cuatro ponemos ejemplos de grupos que vengan de cuatro en cuatro, como por ejemplo: cuatro tizas, cuatro dedos, cuatro personas, cuatro sillas, etc****. Lo que tienen de común todos estos conjuntos es lo que llamamos la idea de ser cuatro.***

¿De qué manera se trabaja en Educación infantil y en Educación primaria? Se empieza a mostrar los números como útiles, pero como futuros maestros, lo vamos a tomar como objeto de estudio.

[Continúa la clase explicando la construcción logicista de los números naturales como conjunto de las clases de equivalencia de conjuntos finitos obtenidas mediante la relación de equipotencia o coordinabilidad de conjuntos]

[El profesor, mientras dice "*vamos a partir de dos conjuntos*" escribe en la pizarra]

A, B conjuntos finitos: $A \approx B \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$, biyectiva

[2] Tomado de Arrieche (2002), p. 305-306.
[3] Esta pregunta del formador nos ha sugerido el título de este trabajo.

[Explica que la relación de coordinabilidad entre conjuntos es una relación de equivalencia, es decir, cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Explica que la relación de equivalencia clasifica a los conjuntos, se forman clases de conjuntos].

Para denotar la clase de un conjunto escribiremos Cl(A) = {conjuntos B tales que, $B \approx A$}.

¿Qué tienen en común los conjuntos equipotentes con uno dado?

El número de elementos. Aquello que tienen en común es lo que se llama número natural*. Se han clasificado todos los conjuntos, y a cada una de estas colecciones de conjuntos equipotentes es lo que se llama número natural.*

El episodio muestra un modelo didáctico del tipo "mayéutica socrática", esto es, las preguntas del profesor son retóricas, ya que él detenta toda la carga del discurso. De hecho la respuesta inicial dada por el alumno ("un signo que designa una cantidad") no es considerada, ni discutida, ni valorada… El profesor tiene una "hoja de ruta" que cumplir y en ella no se contemplan las intervenciones de los estudiantes como "motor" del proceso instruccional. Las intervenciones de los estudiantes cumplen una mera función fática o de contacto, esto es, mostrar una buena disposición mutua entre emisor y receptor. Este hecho es indicador de la presunción, por parte del profesor, de la existencia de un "significado privilegiado" del número natural; a saber, aquel asociado a la definición conjuntista.

En la siguiente sección describimos algunas nociones teóricas que consideramos útiles para entender la pluralidad de significados de las nociones matemáticas, las cuales aplicaremos al caso de los números naturales.

3. Los significados como sistemas de prácticas

En el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función,…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. Según el EOS, el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (una institución, comunidad de prácticas,…) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene. En los sistemas de prácticas intervienen diversos tipos de objetos interrelacionados (*configuración*); además de la propia situación-problema que motiva las prácticas matemáticas en el EOS se consideran como objetos intervinientes y emergentes de las prácticas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre las facetas personal e institucional. La primera hace referencia a las prácticas idiosincrásicas de un individuo particular; la segunda, a las prácticas sociales y compartidas por un grupo de personas miembros de una misma institución. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. De esta manera, la interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales). La figura 1 resume los tipos de significados personales e institucionales introducidos en el EOS.

Desde esta perspectiva se entienden los procesos de aprendizaje en términos de *acoplamiento* de significados, como se indica en la parte central de la figura 1. La *enseñanza* implica la *participación* del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el *aprendizaje*, en última instancia, supone la *apropiación* por el estudiante de dichos significados.

Figura 1: Tipos de significados pragmáticos

3.1. Significados informales de los números

Para comunicar a otras personas, y como medio de registrar para nosotros mismos en otros momentos, el tamaño o cantidad de elementos de un conjunto de objetos discretos podemos hacerlo usando diferentes recursos y procedimientos:

1) En nuestra cultura occidental actual está generalizado el uso de las “palabras numéricas”, uno, dos, tres…, y los símbolos numéricos indoarábigos, 1, 2, 3,… Estas colecciones ilimitadas de palabras y símbolos son las que usan nuestros estudiantes cuando preguntamos, por ejemplo, ¿Cuántos alumnos hay en clase?, y responden “hay noventa y un estudiantes”, o, escriben, “91”. Para ello han debido aplicar un procedimiento riguroso de conteo, poniendo en correspondencia biyectiva cada alumno de la clase con una y solo una palabra numérica recitadas en un orden establecido[4].

[4] Véase en Cid, Godino y Batanero (2004) una descripción sistemática de las diversas técnicas de recuento de cardinales y ordinales.

Podemos observar que al contar han aplicado los principios del conteo:

- *Principio del orden estable*. Las palabras numéricas uno, dos, tres,… deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
- *Principio de la correspondencia uno a uno*. A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- *Principio cardinal*. La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el lugar que ocupa ese objeto en el recuento efectivamente realizado, sino también el cardinal del conjunto.

Como consecuencia de la aplicación sistemática de estos principios se tiene:

- *Principio de irrelevancia del orden*. El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.

Además, en relación con el desarrollo cognitivo del niño, se tiene el:

- *Principio de abstracción*: no importa la naturaleza de los objetos que se estén contando, ni si la colección es un conjunto homogéneo o heterogéneo de objetos.
- *Principio de conservación de la cantidad*: la variación de la posición espacial de los objetos no afecta a la cantidad.

2) Si les pedimos que comuniquen el resultado del recuento sin usar las “palabras o los símbolos numéricos” los alumnos pueden inventar otros medios de expresar el tamaño, numerosidad, número de elementos (o cardinal) del conjunto de alumnos de la clase. Por ejemplo:

- La colección de marcas ///…, o cuadraditos, sobre el papel, tantos como elementos tiene el conjunto.
- Una combinación de símbolos para distintos agrupamientos parciales (* para indicar diez alumnos, / para expresar una unidad).

Cada uno de estos “sistemas de objetos” usados para expresar la “propiedad” de los conjuntos “número de elementos”, o cardinal, es un “sistema numeral”. Para que efectivamente sirvan a este fin deben cumplir una serie de reglas (axiomas de Peano):

1. *Uno es número natural*.
2. *A cada número le corresponde otro número que se llama su siguiente o sucesor.*
3. *Uno no es sucesor de ningún otro elemento.*
4. *Dos elementos diferentes de N no pueden tener el mismo sucesor (la función sucesor es inyectiva).*
5. *Todo subconjunto de* **N** *que contiene un primer elemento y que contiene el sucesor de cada uno de sus elementos coincide con* **N** (*principio de inducción*).

Como tenemos libertad para inventar símbolos y objetos como medio de expresar el cardinal de los conjuntos, esto es, de responder a la cuestión, *¿cuántos hay*?, la colección de sistemas numerales posibles es ilimitada. En principio cualquier colección ilimitada de objetos, cualquiera que sea su naturaleza, se podría usar como un sistema numeral: diversas culturas han usados conjuntos de piedrecitas, o partes del cuerpo humano, etc., como sistemas numerales.

De esta manera, es clave aceptar la vinculación del "número" con el "sistema de representación", pero también hay que aceptar que el número no tiene una relación "necesaria" con un sistema concreto de símbolos.

Asimismo, la conservación de la cantidad y del número de elementos de las colecciones de objetos (cardinalidad) no es la única característica del número. El orden lineal, el carácter conexo de la serie o las propiedades iterativas de los números son características consustanciales y que configuran asimismo su significado.

3.2. Significados formales

Hemos mencionado en el apartado anterior la formulación axiomática de Peano para los números naturales, la cual se apoya esencialmente en el uso iterado de la función siguiente S. De hecho, la axiomática de Peano es común a todos los subconjuntos de números enteros positivos minorados, es decir, que tienen un elemento mínimo o primer elemento. Si denotamos por α este primer elemento, la axiomática de Peano permite definir cualquier conjunto **E** entero minorado. En efecto, sea **E** un conjunto **E** entero minorado, entonces:

1. $\alpha \in$ **E**.
2. $\exists$S, S: **E** $\rightarrow$ **E**, tal que: $\forall$ *e* $\in$ **E**, S (*e*) $\in$ **E**.
3. No $\exists$ *e* $\in$ **E** tal que: S (*e*) = α.
4. Sean *e*, *u* $\in$ **N** y S (*e*) = S (*u*), entonces *e* = *u*.
5. (*Principio de inducción*). Sea A $\subseteq$ **E**, tal que:
    a) $\alpha \in$ A.
    b) Si e $\in$ A $\Rightarrow$ S (*e*) $\in$ A.

    Entonces A = **E**.

De tal manera que si asignamos "α = 1, E = **N**" se retoma la definición empírica de los números naturales antes introducida.

Pero en el debate "fundacional" de las matemáticas, surgido a finales del siglo XIX y principios del XX, se introdujeron otras maneras de concebir los números naturales.

A finales del siglo XIX se fundamenta toda la matemática sobre los números naturales y esta última sobre la teoría de conjuntos. Sin entrar en detalles formales, la idea de fondo de esta alternativa es la que usa el formador del episodio mencionado en la sección 2: partir de un conjunto formado por un solo elemento (y todos los equipotentes, o coordinables, con él); todos tienen "la propiedad", o cardinal, de tener un elemento. A continuación, se considera un conjunto que tiene la propiedad, o cardinal, de tener dos elementos, y todos los equipotentes con él. Y así sucesivamente, se construye el sistema de todos los cardinales finitos. Es claro que este sistema de cardinales finitos cumple los axiomas de Peano.

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones de cardinación y cálculo aritmético son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados, bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano[5]. En este contexto de formalización matemática se plantean cuestiones tales como,

- ¿Cómo se deberían definir los números?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto **N** de los naturales dotado de la ley de composición interna adición?

La respuesta a estas cuestiones requiere la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo con elemento neutro para la adición y multiplicación) y argumentaciones (deductivas), en definitiva un sistema de prácticas operativas y discursivas con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático.

A pesar de las diferencias entre los significados informales-empíricos y formales de los números siempre ha existido una fructífera relación sinérgica entre los mismos: "Los requerimientos prácticos han inducido innovaciones de escritura como el refinamiento de los sistemas de notación posicionales y la introducción de la notación numérica negativa. Los desarrollos conceptuales han sustentado estas innovaciones, asegurando que las reglas de los procedimientos reflejen las estructuras de significados subyacentes, así como desarrollando el conocimiento de otras propiedades" (Ernest, 2006, 80).

4. ¿Qué son los números naturales?

¿Qué son realmente los números, si llamamos números tanto a '1, 2, 3…', como a 'uno, dos, tres,…', como a 'one, two, three,…', etc.? (Ferreirós, 1998, 52). Esta cuestión es sin duda de difícil respuesta, si tenemos en cuenta las fuertes controversias que se plantearon entre autores de la talla de Frege, Russell, Peano, Dedekind, etc., a propósito de las diferentes formulaciones del número natural. Según Russell, con el fin de proporcionar al concepto de número con alguna extensión, que sea real, tenemos que comprender "el número como el número de una cantidad" y proporcionar una aplicación para el concepto así definido demostrando la existencia de conjuntos de cardinalidad arbitraria (Otte, 2003, 222).

[5] La caracterización de los números naturales según la teoría de conjuntos o según la axiomática de Peano no agotan las formalizaciones del número natural. Por ejemplo, Bedoya (2003) introduce y relaciona de manera sucinta las axiomáticas de Peano, Pierce y Lawvere (según la teoría de categorías). Oostra (2008) analiza de manera más extensa el artículo *On the Logic of Number* de Peirce, afirmando que Peirce desarrolló una presentación axiomática para N antes que Peano.

De esta manera la intuición aritmética se sustituye por una intuición conjuntista, lo que no deja de ser conflictivo.

Para Frege los números son objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis de los naturales se desarrolló de acuerdo con esa idea. Por el contrario, Dedekind se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de números naturales (Ferreirós, 1998, 52).

El trabajo de Benacerraf (1983) ha dado argumentos de peso para cuestionar las visiones conjuntistas de los números naturales. Benacerraf concluye que los números no pueden ser conjuntos, o conjuntos de conjuntos, ya que existen muy diferentes presentaciones del significado y referencia de las palabras numéricas en términos de la teoría de conjuntos. El número 3 no es ni más ni menos que aquel que es precedido por 2 y 1 (y, en su caso, el 0)[6], y seguido por 4, 5, etc. O, de manera más precisa, es un objeto que está precedido por dos (o tres) objetos en un orden preestablecido y seguido por infinitos también ordenados, de tal manera que dos elementos definidos como "contiguos" lo serán siempre. Con otras palabras, cualquier objeto puede desempeñar el papel de 3; esto es, cualquier objeto puede ser el tercer elemento en alguna progresión (preestablecida de manera arbitraria). Lo que es peculiar a 3 es que él define ese papel - no por ser un paradigma de ningún objeto que lo juegue, sino por representar la relación que cualquier tercer miembro de una progresión guarda con el resto de la progresión.

> "Por tanto, los números no son objetos en absoluto, porque al dar las propiedades (necesarias y suficientes) de los números simplemente caracterizamos una *estructura abstracta* - y la distinción está en el hecho de que los 'elementos' de la estructura no tienen ningunas propiedades distintas de las que relacionan unos con otros 'elementos' de la misma estructura" (Benacerraf, 1983, 291).

Una vez que tomamos conciencia de que, además de los símbolos indoarábigos, 1, 2, 3,…, podemos usar una infinita variedad de "objetos" (perceptibles, manipulables o mentales) para expresar el tamaño de las colecciones finitas de otros objetos debe resultar conflictivo decir que los números naturales son, 1, 2, 3… La única solución es aceptar que un número natural es un elemento de *cualquier sistema numeral* y el conjunto de los números naturales es la clase de sistemas numerales, no un sistema numeral particular. Ahora bien, como todo sistema numeral viene caracterizado por una estructura u organización recursiva específica (los axiomas de Peano, por ejemplo) también podemos decir que *el conjunto de números naturales se caracteriza por la estructura de cualquier sistema numeral*. Cada número particular será un elemento de dicho sistema.

En la vida cotidiana y en la práctica escolar los números naturales se asimilan al sistema de símbolos y palabras numéricas, 1, 2, 3…, uno, dos, tres…, one, two, three…, pues estos sistemas numerales constituyen *sistemas naturalmente ordenados,* sistemas que cumplen los axiomas de Peano. Pero el maestro debe

[6] ¿Es el cero número natural? El desarrollo histórico establece que el 0 se introdujo tardíamente por la matemática hindú (siglo VIII) y, por lo tanto, no goza del marchamo de "naturalidad"… Sin embargo, en la actualidad, no hay consenso entre los matemáticos. Así, por ejemplo, algunos investigadores en Teoría de Números prefieren no reconocer el cero como un número natural, mientras que otros, cuyo campo de investigación es la Complejidad de Algoritmos, sostienen la postura opuesta.

tomar conciencia de que cuando considera la serie de símbolos, 1, 2, 3…, como los números naturales, está haciendo uso de una *metonimia*, esto es, tomar la parte por el todo: no es lo mismo un ejemplar particular que la clase o tipo al que pertenece.

El profesor de matemáticas debe conocer que la expresión "El conjunto **N** de los números naturales" induce a confusión, ya que fuerza a pensar en una secuencia de objetos, identificables de manera unívoca. Con ella se oculta la arbitrariedad de la naturaleza de los objetos que forman los sistemas naturalmente ordenados, o simplemente a identificarlos con los símbolos numerales indoarábigos 1, 2, 3…

Dada la abstracción que supone este discurso teórico, la enseñanza de los números en los niveles de educación primaria deberá limitarse a los componentes operatorios (situaciones de cardinación y ordenación, lenguajes y técnicas), evitando definiciones innecesarias para el trabajo efectivo con los números.

La figura 4 representa la pluralidad (sin buscar la exhaustividad) de significados informales y formales de los números naturales. Las situaciones de cardinación han sido abordadas por diversas culturas mediante prácticas e instrumentos diferentes, dando lugar a objetos "número" diferentes. Estas diversas configuraciones numéricas son articuladas en nuevos contextos de uso formales dando lugar a distintas construcciones numéricas[7].

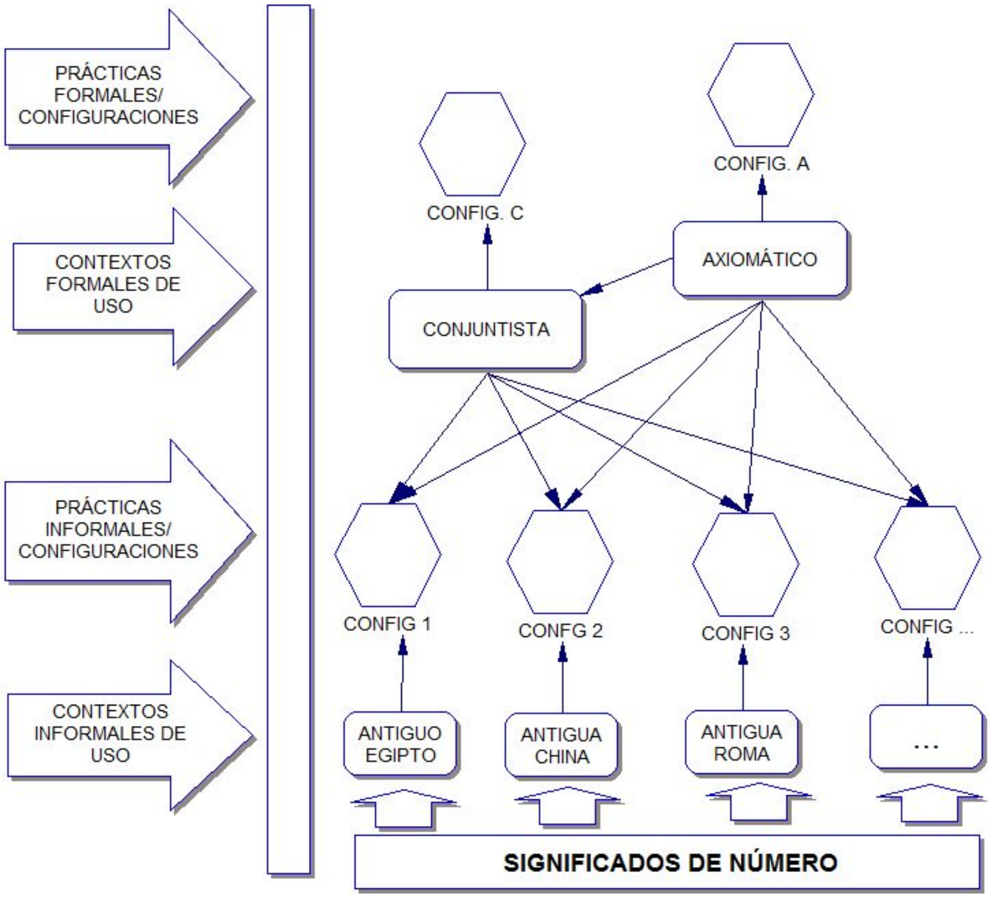

Figura 4: Pluralidad de significados de los números

[7] En la figura 2 el contexto "conjuntista" refiere a las construcciones de N basadas en la coordinabilidad de conjuntos, mientras que "axiomático" a las basadas en los axiomas de Peano (u otros equivalentes).

Es importante resaltar que las prácticas informales no tienen una existencia meramente “histórica”. Coexisten en el tiempo con la formalización científica en las prácticas usuales de las escuelas y determinan el progreso de los significados personales. No son un “mal menor”, sino hitos necesarios en el desarrollo cognitivo de los niños y consustanciales a los procesos de transposición didáctica.

5. Análisis del episodio y reflexiones finales

En la respuesta del estudiante: *“Un signo que designa una cantidad”,* se pone de manifiesto una manera de concebir los números, que proviene de la experiencia empírica de uso de los números, pero que puede servir de base para describir de manera “rigurosa”, “lo que son los números”. Cualquier sistema de signos que pueda cumplir el papel de designar cantidades (discretas o discretizables) estará formado por un primer elemento y una función siguiente unívoca, en definitiva, un sistema de “objetos” que cumple los axiomas de Peano, o una axiomática equivalente (Peirce, Dedekind).

Ciertamente que el conjunto cociente asociado a la relación de equipotencia definida entre los conjuntos finitos constituye un sistema “naturalmente ordenado”, y por tanto, cumple los axiomas de Peano. Son también los números naturales. Pero no hay razón matemática ni filosófica para privilegiar la configuración de objetos y significados de la construcción logicista de los números. La comprensión de los números requiere, en particular, articular esta configuración con la generada a partir de los axiomas de Peano, que es semejante a la construcción elaborada por Dedekind (1888).

Además, hay que tener en cuenta que la formalización matemática no agota todos los usos de los números. Cuando un niño pequeño solicita presionar el botón del ascensor del piso donde vive, sabe que el número que ahí aparece representa un lugar en una botonadura, no el número de personas que viven, ni los años que él tiene, ni ninguna otra cantidad. De manera similar, cuando juega al juego del pañuelo y sale corriendo cuando se nombra su número entiende que es una forma de designación de una persona, no el número de personas que deben salir o que constituyen el equipo. Este uso como ordinal, o como código, hace que tanto la respuesta del estudiante como del profesor formador sean restrictivas. Por ejemplo, ¿qué hubiera dicho el profesor si un alumno contesta a la pregunta qué es el número con “signo que designa la posición de un objeto en un una colección ordenada”?

Los números, la aritmética, es la respuesta social al problema de comunicar el tamaño o numerosidad de los conjuntos, de ordenar una colección de objetos y de analizar procesos iterativos-recurrentes. Pero cada pueblo, cada forma de vida comenzó dando su propia respuesta a este problema. En principio cada sociedad, cultura, etapa histórica, tiene sus propios números, y su propia aritmética asociada, distinguible según la configuración de objetos y significados que la caracteriza. En cada configuración existen objetos organizados de manera recursiva, con un primer elemento, y un siguiente determinado de manera unívoca para cada elemento. Estas organizaciones son las que permiten solucionar los problemas genéricos de la cuantificación, la ordenación, la iteración y la codificación. Una mirada retrospectiva a todas estas configuraciones es la que permite identificar las regularidades que hoy describimos como *número natural* (Rotman, 1988).

Desde un punto de vista del aprendizaje, esto es, de la construcción de significados personales, los números aparecen inicialmente en formas repetitivas de expresión (///.., uno, dos,…), ligadas a gestos y movimientos corporales (señalar, apartar, caminar,…), en definitiva en representaciones actuativas.

> "Inicialmente esto da lugar a una concepción ordinal del número, como actividad rítmica corporal que tiene lugar en el tiempo, y como conjuntos icónicos de marcas que resultan de simbolizar la actividad repetitiva mediante la que fueron creados. La experiencia de completar tales actividades con su resultado final, como un conjunto de marcas o un recuento final, también da lugar a una concepción cardinal de número como una representación de la cantidad" (Ernest, 2006, 87).

En este proceso de desarrollo inicial del número la noción más importante es la de "siguiente" (inmediato sucesor). Otro principio central posterior es la correspondencia uno a uno en el emparejamiento de signos a objetos. El aprendizaje del sistema morfosintáctico de los números naturales y del recuento supone que el alumno sea capaz de participar en ciertas prácticas sociales, y en particular que pueda enunciar o producir signos numéricos de manera pertinente. La apropiación de estos significados de una manera creativa requiere varios años de intenso aprendizaje y supone, no solo el uso de los números para la solución de problemas prácticos y competencia en diferentes sistemas de cálculo y representación, sino también conocimiento de propiedades y relaciones numéricas que justifican los procedimientos y aplicaciones prácticas.

Reconocimiento:

Investigación realizada en el marco del proyecto: SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER.

Bibliografía

Arrieche, M (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España

Bedoya, L. M. (2003). *Peano, Lawvere, Peirce: tres axiomatizaciones de los números naturales*, Trabajo de Grado en Matemáticas. Universidad del Tolima: Ibagué, Colombia. Disponible en: *www.unav.es/gep/TesisDoctorales/Axiomatizaciones.pdf* [2 mayo 2009].

Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En, P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics.* Selected reading, 2nd edition (pp.272–294). Cambridge: Cambridge University Press.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

Ferreirós, J. (1998). *Introducción al libro, ¿Qué son y para qué sirven los números? de R. Dedekind.* Madrid: Alianza Editorial.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 67–101.
Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2), 127-135.
Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.
Oostra. A. (2008). *Acerca del artículo On the Logic of Number, de Charles S. Peirce*. Disponible en: www.unav.es/gep/Articulos/AcercaDeLogicOfNumber-Boletin.pdf [2 mayo 2009].
Rotman, B. (1988). Toward a Semiotics of Mathematics. *Semiotica*, 72 (1/2), 1-35.
Spengler, O. (1918). *La decadencia de Occidente*. Madrid: Espasa Calpe, 1958.

Juan D. Godino, Universidad de Granada (España)
Web personal: http://www.ugr.es/local/jgodino

Vicenç Font Moll, Universidad de Barcelona (España)
Web personal: http://www.webpersonal.net/vfont/

Miguel R. Wilhelmi. Doctor en Matemática. Área Didáctica de las Matemáticas Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra (Pamplona, España) miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Mario Arrieche. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Actual coordinador General de Postgrado de la Universidad pedagógica Experimental Libertador-Maracay Venezuela. marioarrieche@hotmail.com