UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2008, Número 16, páginas 221-238
ISSN: 1815-0640

Historia

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Problemas matemáticos con historia

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Mucha gente, no matemática, parece pensar que lo esencial en matemáticas fue descubierto hace mucho tiempo y que fue entregado a los primeros matemáticos griegos por semidivinidades como Pitágoras, en forma de teoremas misteriosos que hemos aprendido a usar pero sin comprenderlos verdaderamente. Nada más lejos de la realidad, los matemáticos profesionales no aceptan resultados sin pruebas rigurosas y por otra parte, son conscientes de que aún hay mucho camino por recorrer, de que sólo se ha explorado una parte y que ésta crece sin cesar

Abstract

Much people, nonmathematical, seem to think that the essential in mathematics was discovered long ago and that was given to the first Greek mathematicians by semidivinities like Pitágoras, about form of mysterious theorems that we have learned to use but without including/understanding them truely. Nothing else far from the reality, the professional mathematicians do not accept results without rigorous tests and on the other hand, are conscious that still there is much way to cross, that has only explored a part and that this grows incessa.

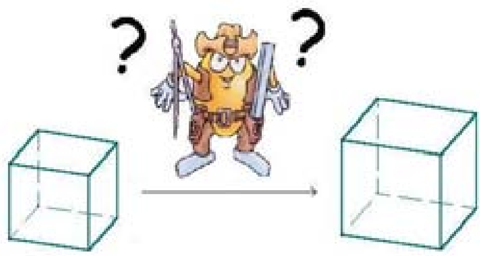
Algunos problemas célebres

Los griegos encontraron algunos de estos problemas coriáceos. En geometría, por ejemplo, trataron de obtener las construcciones perfectas, sin aproximaciones, de algunas figuras con los instrumentos que conocían: el compás y la regla no graduada. Tuvieron éxito en algunos casos difíciles como la construcción de pentágonos regulares pero fracasaron en los tres problemas clásicos.

La conjetura griega por excelencia, en geometría, es el quinto postulado de Euclides sobre la existencia y unicidad de paralelas, existen otras geometrías, las no euclídeas, donde es falso.

Duplicación del cubo

El problema "délico" se remonta al siglo VI a.c. El oráculo de Delos había ordenado a los habitantes de esta ciudad, doblar el volumen de uno de sus altares. En nuestro lenguaje actual, equivale a multiplicar por $\sqrt[3]{2}$ la longitud del lado del altar. Puesto que los geómetras griegos no utilizaban más que la regla y el compás y accedían a los números por un equivalente geométrico, no consiguieron resolver el problema. Hasta el siglo XIX, numerosos matemáticos han tratado de resolver el problema, a menudo infructuosamente. A veces construyendo curvas auxiliares, las duplicatrices, como la cisoide de Diocles o la conchoide de Nicomedes



¿Es posible, con regla y compás, construir un cubo de volumen doble?

Hasta que en 1837 Wantzel, a partir de los trabajos de Abel, demuestra que "todo número construible con regla y compás es solución de un polinomios con coeficientes enteros de grado una potencia de dos (1,2,4,8,16,…)". $\sqrt[3]{2}$ es solución de x^3-2=0, que es un polinomio con coeficientes enteros, pero cuyo grado no es una potencia de dos. Es por este motivo que un problema délico es, incluso en la actualidad, sinónimo de irresoluble.

Cuadratura del círculo

El problema de la cuadratura del círculo, de la cubatura de la esfera y de la rectificación de la circunferencia son equivalentes. ¿Es posible, con regla y compás, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado? ¿es posible, con regla y compás, construir un cubo de igual volumen que el de una esfera dada? ¿Es posible, con regla y compás, trazar un segmento de longitud igual al perímetro de una circunferencia dada? Las tres preguntas exigen construir un segmento de longitud pi a partir de un segmento de longitud 1, con la única ayuda de la regla y compás. Si esto fuera posible, significaría según el teorema de Wantzel, que pi es un número construible y por tanto, raíz de un cierto polinomio. Resulta que en 1882 un matemático alemán de las universidades de Koenigsberg y Munich, Lindemann (1852-1939), demuestra que pi no es raíz de polinomio alguno, se dice que pi es un número trascendente. Esta trascendencia aporta una respuesta definitiva al más celebre problema de las matemáticas, la cuadratura del circulo es imposible, algo que coloquialmente se había aceptado antes de demostrarlo, como demuestran los escritos de Anaxágoras en el siglo V a.c., e incluso la Academia de Ciencias, en 1775, decidió no aceptar más escritos con las supuestas soluciones al problema. Es importante observar que este problema de origen puramente geométrico, sólo pudo resolverse con herramientas algebraicas, Wantel, y analíticas, Lindemann.

Trisección del ángulo

Los griegos eran capaces de trazar, con regla y compás, la bisectriz de un segmento pero trataron, en vano, de dividir en el caso general, un ángulo en tres partes iguales. Para resolver la trisección del ángulo, los matemáticos tuvieron que recurrir a curvas auxiliares, trisectrices, como la espiral de Arquímedes, la cúbica de L'Hôpital, la concoide de Nicomedes, el caracol de Pascal, la cúbica de

Tschirhausen… Es el teorema de Wantzel quien de nuevo permite resolver el problema en 1837. Aunque para algunos valores la trisección del ángulo es posible, es imposible en el caso general.

Apilamiento de esferas

Sir Walter Raleigh (1554-1618), aventurero y escritor inglés que participó en la campaña contra la armada invencible, propuso a su amigo, el matemático ingles Thomas Harriot, un problema, a ver si podía resolverlo: si conocía algún método sencillo capaz de resolver *cuántas balas de cañón se pueden apilar en la cubierta de un barco utilizando el menor espacio posible*. O, matemáticamente, ¿cuál es el empaquetamiento más denso posible para un conjunto de esferas? Harriot no supo contestar a esto y le pasó el problema a Johannes Kepler. Basándose en la intuición, y la observación, Kepler contestó a Raleigh en 1611 que el mejor modo de apilar bolas de cañón tenía que ser el método con el que los fruteros apilaban la fruta en forma piramidal (una esfera encima de tres), el llamado empaquetamiento cúbico centrado en las caras. La cuestión era si se podía demostrar matemáticamente. Según la conjetura de Kepler, la densidad de un empaquetamiento de un conjunto de esferas nunca excede de un número máximo. La densidad de este apilamiento es $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Gauss demostró que este empaquetamiento era el más eficaz de entre los de estructura reticular pero, este resultado, no excluía la posibilidad de empaquetamientos no reticulares.

La dificultad del problema estriba en el inmenso número de posibilidades que deben ser eliminadas. A mediados del siglo XX, los matemáticos ya sabían como reducir el problema a un análisis finito. Un importante avance tuvo lugar en 1953 cuando el matemático húngaro Laszlo Fejes Tóth redujo el problema a un enorme cálculo en el que intervenían muchísimos casos específicos; al mismo tiempo sugirió un procedimiento para resolverlo por ordenador

En 1991, Wu Yi Hsiang de la universidad de California dio una demostración, calificada de poco rigurosa por expertos como Conway En 1998, 387 años después, Hales distribuyó una prueba asistida por ordenador a la conjetura de Kepler, con unas 300 páginas de extensión y unas 40.000 líneas de código hecho a medida para la demostración. Tras un año de verificación del código, la prueba se dio por valida con un uno por ciento de incertidumbre y publicada en 2005 en Annals of Mathematics con un 99 % de verificación.

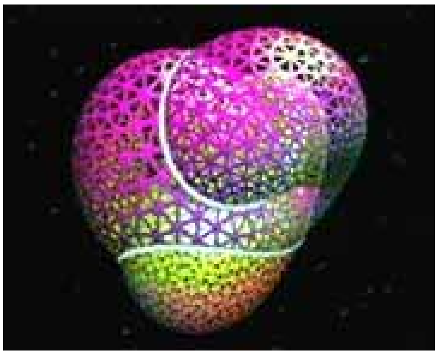
Las trece esferas

¿Se puede encontrar una bola B con otras trece bolas del mismo tamaño de manera que todas toquen a B?

David Gregory, astrónomo en Oxford y amigo de Isaac Newton, anotó en su diario, en 1694, que Newton y él habían estado discutiendo sobre la cuestión. Habían empezado estudiando cómo están distribuidas por el firmamento las estrellas de distintas magnitudes, y de ahí habían pasado a preguntarse si una esfera de radio unitario podría o no estar en contacto con otras 13 iguales a ella. Gregory opinaba que sí; Newton disentía. Como escribe Coxeter, «tuvieron que transcurrir 180 años hasta que R. Hoppe lograra demostrar que Newton tenía razón». Desde entonces han sido publicadas otras demostraciones más sencillas, la más reciente, en 1956, la del matemático británico John Leech.

Newton demostró que era posible con doce bolas y en 1952 Van der Waerden y Schütte demostraron la imposibilidad con trece bolas.

La deformación de una esfera



"¿Es posible deformar una esfera de manera que su cara interior se vuelva su cara exterior y su cara exterior la interior? "

En la deformación no esta autorizada ni los desgarrones ni los cortes aunque si es posible la interpenetración. En estas condiciones, Stephen Smale demostró en 1958 que si era posible .En efecto, en 1957, el joven matemático, Stephen Smale, posterior Medalla Fields, la más alta distinción matemática, presentó a su maestro Raoul Bott un resultado sobre las deformaciones de la esfera. En un primer examen, Raoul Bott rehusó admitir el teorema que Smale había demostrado.

La prueba dada por Smale era no constructiva, es decir había demostrado que la solución existía pero no la construía

Imaginemos una esfera cuyo interior este pintado de rojo y el exterior de azul, es necesario invertir esos dos colores .Bott planteaba el famoso "Muéstreme como es posible".

La solución pasa por deformar la esfera inicial por una serie de transformaciones para formar dos hojas, una superficie de Boy, llamada así en honor del alumno de Hilbert Werner Boy que las inventó en 1901 en otro contexto.

El problema de Waring(1770)

"Sea n un entero natural ¿cuántos cuadrados, cubos,…, potencias k-esimas necesitamos añadir para obtener n?"

Edward Waring (1734-1798) conjeturó, en 1770, que para todo número, dos cuadrados o cuatro cubos o diecinueve potencias cuartas o un número finito g(k) de potencias k-ésimas era suficiente. Lo cual es verdad, la fórmula de Vinogradov da

$$g(k) = 2^k - 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Las etapas más importantes en la resolución de este problema han sido:

En 1780 el teorema de Lagrange o de los cuatro cuadrados, también conocido como conjetura de Bachet, que establece el caso g(2)=4,por ejemplo, $31=5^2+2^2+1^2+1^2$ o $310=17^2+4^2+2^2+1^1$, en general $n=a^2+b^2+c^2+d^2$ siendo n,a,b,c,d naturales no nulos.

Wieferich en 1909 estable el caso g(3)=9.

En 1909 Hilbert establece que g(k) existe para todo k pero no siempre se sabe calcular.

En 1930 Vinogradov encuentra y demuestra la formula para k>5.

En 1964 Chen establece g(5)=37 y en 1985 g(4)=19 es establecido por Balasubramanian, Deshouillers et Dress con ayuda del ordenador, con lo cual el problema esta resuelto. Las investigaciones han proseguido buscando valores mas pequeños de g(k) incluso eventualmente negativos.

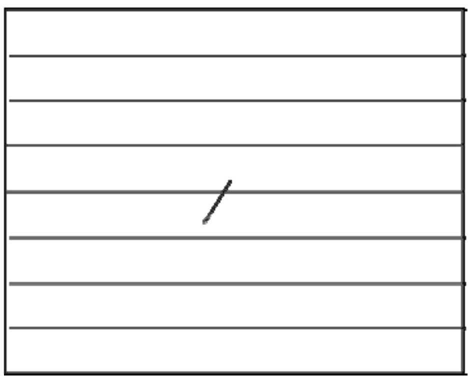
Algoritmo de Siracusa

También llamado algoritmo de Hase o problema de Collatz o problema de Ulam o problema 3n+1. El problema fue inventado en 1930 por Lotear Collatz cuando era estudiante en Hamburgo. Tomemos un entero n, si es par tomemos n/2 y si es impar, 3n+1 y volvemos a empezar con este nuevo número. Parece que al cabo de un cierto número de iteraciones se vuelve siempre a uno. Hase, colega de Collatz, lo difundió desde la Universidad de Siracusa, USA. En 1960 fue relanzado por Kakutani. Thwaites ofreció en 1996 una recompensa de 1000 libras a quien lo resolviera. A pesar de la gran simplicidad del enunciado que ha atraído a numerosos investigadores, los intentos han sido en vano. Hasta ahora solo se ha probado para números naturales $n \leq 32^{53}$

Problema de Alhazen (1010)

El problema fue planteado inicialmente por Tolomeo y conocido hoy con el nombre del matemático árabe Abú Alí Al-Hasan Ibn Al-Haytam, llamado por los latinos Alhazem, famoso por sus escritos en óptica y astronomía. Conocido como problema del billar circular: *"en que dirección hay que lanzar una bola colocada en un punto A en un billar circular para que vuelva al punto A después de dos reflexiones sucesivas"*. Este problema luego se convertirá en la determinación de la curva *anaclástica.* El problema original fue tratado por matemáticos como Huygens, Barrows y Ricatti de forma analítica. El problema conduce a una ecuación de cuarto grado resuelta como intersección de secciones cónicas.

Aguja de Bufón (1750)



El celebre naturalista francés Georges Louis Leclerc (1707-1788), conde de Buffón, planteó y resolvió el siguiente problema: *"Sobre una hoja de carta con líneas escritas, separadas por un espacio d, ¿cuál es la probabilidad para que una aguja de longitud l menor o igual que d, tirada al azar sobre la hoja, corte a una de las líneas?"*. La respuesta es

$$\frac{2\,l}{\pi\,d}$$

Problema de Dido

En la Eneida de Virgilio encontramos:

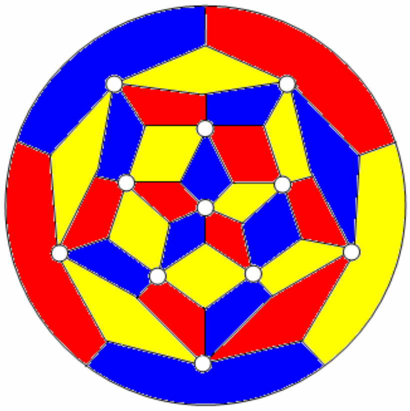
"En el siglo IX antes de Cristo, huyendo la princesa fenicia Dido de su hermano Pigmalión, rey de Tiro, que había asesinado a su marido, llega a las tierras del Norte de África (Túnez) donde alcanza un acuerdo con sus habitantes. Al querer la princesa Dido comprar tierra para establecerse con su pueblo, el rey de aquellas gentes solamente le consiente comprar la parcela de tierra que pueda ser cubierta por la piel de un toro. Dido cortó la piel en finas tiras formando una larga cuerda (de unos 1000 ó 2000 metros) y la dispuso de manera que cubriese la mayor parte de terreno posible…

Resolvió así el problema, también llamado isoperimétrico, de encontrar entre todas las curvas cerradas aquella que delimite la superficie más grande, anticipando un resultado de J. Bernouilli, la circunferencia.

Problema de los n cuerpos

Desde que Newton estableció las reglas de la mecánica astronómica, se ha tratado de saber "como evolucionara un sistema de n cuerpos del que no se conoce más que su posición inicial". Newton fue el primero en formularlo de una manera precisa: "Dadas en un instante las posiciones y las velocidades de tres o más partículas que se mueven bajo la acción de sus atracciones gravitatorias mutuas, siendo conocidas las masas de las partículas, calcular sus posiciones y velocidades para otro instante". Mientras que el caso de 2 (n=2) cuerpos tiene solución, el caso n>3 no puede resolverse. Expresar mediante ecuaciones los movimientos del Sol, la Luna y la Tierra se resistió a los matemáticos hasta que en 1913 Sundmann descubrió un método muy grosero por medio de una serie convergente. Solo con ordenador se puede aplicar este método en mecánica newtoniana.

Problema de los cuatro colores



¿Cuál es el número mínimo de colores necesarios para colorear un mapa de manera que dos regiones adyacentes cualesquiera tengan colores diferentes? Este número se llama número cromático de la superficie. Sabiendo que, si c es la característica de Euler-Poincare de la superficie, se tiene que c=n-m+f para un poliedro de n de vértices, m aristas y f caras; y que c=2-2p-q-r para una esfera con p asas, q gorros cruzados y agujereada r veces. Heawood había conjeturado que ese número (el de colores mínimo) era igual a la parte entera de $\frac{7+\sqrt{49-2c}}{2}$. La conjetura falla para la botella de Klein que puede ser coloreada con seis y siete colores como da la fórmula. En 1968 Ringel y Young demostraron que la conjetura de Heawood era cierta para el resto de superficies excepto el plano y la esfera. Justamente para esas dos superficies había sido planteado el problema por Cayley en 1879 a la Sociedad Matemática de Londres y casi un siglo después, 1976, Appel y Haken mostraron, tras 1200 horas de cálculos con ordenador, que cuatro colores eran suficientes

Medida universal

Podemos partir un segmento en n partes tales que 1) ninguna de las partes tenga una longitud nula 2) la longitud de la unión de dos partes es la suma de las longitudes de cada una de ellas 3) dos partes idénticas (simétricas) tienen la misma longitud.

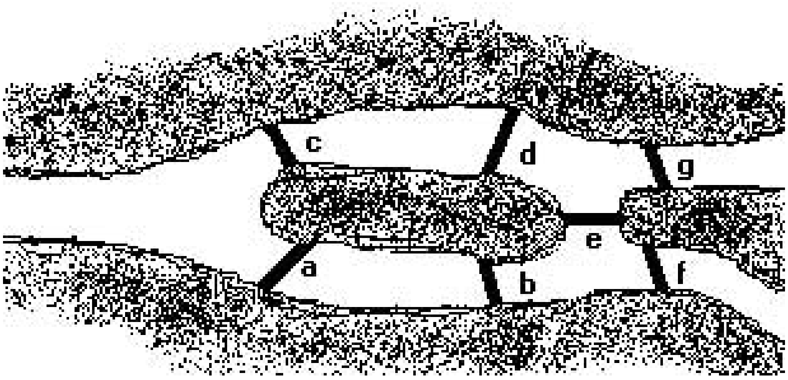
De la misma forma, se puede encontrar para el plano una manera de medir, m, por ejemplo la idea intuitiva de área, tal que para toda parte finita A del plano se cumpla: 1) $m(A) \neq 0$ 2) $m(B \cup C) = m(B) + m(C)$ para dos partes de A disjuntas 3) $m(A) = m(B)$ si B se puede deducir de A por una traslación o una rotación.

Haussdorff planteó la siguiente cuestión:" ¿Se puede encontrar siempre una medida como esta en un espacio n dimensional?"

La respuesta es si para n=1 y n=2 y no para n>2. Este sorprendente resultado da origen a numerosas paradojas entre la que destaca la de Banach-Tarski.

Los siete puentes de Koenigsberg

La ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado, se encuentra a orillas del Mar Báltico, en territorio Ruso y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia. En el pasado perteneció a Prusia. Uno de sus habitantes más ilustres fue el filósofo Immanuel Kant.



En Königsberg se juntan dos ríos, formando una isla en su confluencia. Siete puentes unían (ya no, pues la ciudad fue parcialmente destruida durante la Segunda Guerra Mundial. En el siglo XVIII se hizo popular como adivinanza o pasatiempo averiguar si era posible cruzar los siete puentes de la ciudad pasando sólo una vez por cada uno de ellos. La respuesta es no y fue dada en 1736, por el matemático suizo, radicado en San Petersburgo, Leonhard Euler en su artículo "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis", en el que resolvía el problema en el caso general. Este trabajo es considerado como el nacimiento de la Teoría de Gráfos, utilizada hoy en día en una multiplicidad de aplicaciones, y también uno de las primeras apariciones de una «nueva geometría» en la que importan sólo las propiedades estructurales de un objeto y no sus medidas. A esto se refieren las palabras «geometriam situs» en el título de Euler, palabras que hoy se traduce como topología.

Los 23 problemas de Hilbert

En un resumen rápido de la carrera de Hilbert podríamos citar su interés y conocimiento de una gran variedad de disciplinas y una fuerte conexión con las tradiciones matemáticas del siglo XIX. A diferencia de otros matemáticos como Peano o Hausdorff, Hilbert era moderadamente modernista, su mayor habilidad consistió en profundizar y desarrollar las tradiciones existentes. Los problemas de 1900 encajan dentro de esta descripción

Al recibir la invitación a dirigirse al congreso matemático en París, Hilbert era ya uno de los matemáticos más destacados de Alemania, y ampliamente reconocido fuera de su país. Tres años antes, Henri Poincaré (1854-1912), el único matemático contemporáneo cuyos campos de interés y conocimiento se comparaban en amplitud y variedad con los de Hilbert, había escrito la charla central que fue leída en su nombre en el congreso de Zurich. La charla trató de las relaciones entre el análisis puro y la física matemática, y Hilbert pensó inicialmente que la mejor manera de afrontar debidamente el importante honor que se le hizo al invitarlo sería referirse a las ideas de Poincaré y presentar una visión alternativa. Su amigo Minkowski, sin embargo, lo disuadió de tal plan, y a cambio le sugirió una dirección totalmente distinta:

Lo más atractivo, escribía Minkowski desde Zurich, sería que intentes dar un vistazo al futuro, a enumerar los problemas a los cuales deberían dedicarse los matemáticos en adelante. Así podrías crear las circunstancias para que se siga hablando de tu charla en las décadas venideras. Eso sí, debes tener en cuenta que la profecía tiene sus dificultades.

El 8 de Agosto de 1900 en el II Congreso Internacional de Matemáticas de París, Hilbert presentó su famosa conferencia acerca de los 23 problemas abiertos en Matemáticas. De ellos, 8 eran de naturaleza meramente de investigación. De los restantes 15, 12 han sido ya resueltos. Hilbert comenzó su discurso con las siguientes palabras:

"*¿Quien de nosotros no quisiera levantar el velo tras el cual yace escondido el futuro, y asomarse, aunque fuera por un instante, a los avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo ulterior en los siglos futuros? ¿Cuáles serán las metas particulares que tratarán de alcanzar los líderes del pensamiento matemático de las generaciones futuras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán los siglos por venir en el ancho y rico campo del pensamiento matemático*?"

Los 23 problemas planteados por Hilbert fueron:

1) ¿Puede probarse las hipótesis del continuo? Esta hipótesis establece que no existe ningún conjunto de cardinalidad mayor del conjunto numerable (números racionales) y estrictamente menor que la del continuo (números reales). La respuesta depende de la versión particular elegida para la teoría de conjuntos. En 1939, Gödell demostró que la negación de la hipótesis del continuo no se puede obtener de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermello-Fraenkel. En 1963 Paul Cohen demostró que no se puede obtener como consecuencia de Zermello-Fraenkel, por tanto la H.C. es independiente de ZF. En definitiva a la pregunta ¿están bien ordenados los números reales?, Cohen contesta que si, si se admite el axioma de elección. Estos trabajos le valieron a Cohen la medalla Field.

2) ¿Puede probarse la consistencia de la aritmética?

No, según estableció Gödell en 1931, todo sistema formal capaz de formular su consistencia, puede también probar su inconsistencia: 2º teorema de incompletitud de Gödell.

Un resultado positivo lo dio Goentzen probando la consistencia de la aritmética por inducción transfinita

3) ¿Es aplicable el método euclideo de descomposición de poliedros a todos los volúmenes? Lo que se plantea es encontrar dos tetraedros, con bases y alturas iguales, que no puedan descomponerse en tetraedros congruentes ni puedan combinarse con otros poliedros congruentes para formar dos poliedros que puedan dividirse en tetraedros congruentes. La respuesta es NO. Este fue el primer problema de la lista resuelto en 1902 por un alumno de Hilbert, Max Dehen e, independientemente, por W.F. Kagon en 1903.

Un resultado positivo lo da la paradoja de Banach-Tarski: dos poliedros cualesquiera, incluso de volúmenes diferentes, pueden transformarse uno en otro por descomposición en un número finito de partes y desplazando esas partes (las partes no son medibles Lebesque).

4) ¿Cuáles son las geometrías en las cuales el camino más corto entre dos puntos es un segmento de recta? En el fondo lo que se investiga es el concepto de distancia y, en general, se considera resuelto por George Hamel (1877-1954)

5) ¿Existen grupos de Lie continuos? Lie estableció un sistema de axiomas para la geometría y demuestra que este sistema es suficiente con la ayuda del concepto de grupo continuo y asumiendo que las funciones que definen su grupo son diferenciables. Lo que se plantea es si la diferenciablidad es inevitable o se puede suprimir.

En 1930 John Von Newman resuelve el problema afirmativamente para los grupos bicompactos, en 1952 Andrws Glean para los grupos localmente compactos y para el caso abeliano. En 1953 Montgomery y Zipin cierran la respuesta afirmativamente. Combinando sus resultados con los de Yamabe tenemos: ”todo grupo local euclídeo es un grupo de Lie”

6) ¿Puede axiomatizarse la Física? La matematización de los problemas físicos se volvió rápidamente obsoleta por la evolución divergente de ambas disciplinas (basta observar la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad), aunque la investigación de “aquellas ciencias físicas en las que las matemáticas juega un papel importante” tuvo un importante avance con los axiomas de probabilidad de Kolmogorov en 1933.

7) Los números del tipo α^{β} con α, β algebraicos, β irracional y $\alpha \neq 0$ ¿son irracionales? ¿son trascendentes? Esto supone la irracionalidad o trascendencia de $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}...$. El problema fue resuelto por Gelfand en 1934 y generalizado por Schneider (1934) y Baker en 1966.

8) Riemann conjeturó que los ceros no triviales de la función zeta ς se encuentran en línea recta, sobre el eje crítico $\sigma = \frac{1}{2}$ Aún sin resolver aunque Hardy y Weil obtuvieron resultados parciales. Probablemente lo que interesaba a Hilbert fuese ***la distribución de los números primos.*** El problema para variedades algebraicas fue demostrado en 1973 por Pierre Deligne con la ayuda de la cohomología l-ádica introdicida con los tabajos de Artin y Grothendieck.

9) Demostrar la ley más general de reciprocidad en cualquier cuerpo algebraico.

En 1923 E. Artin conjeturó una ley de reciprocidad general y la demostró en algunos casos particulares. En 1927 resolvió el caso general inspirándose en los trabajos de Takagi. Ese mismo año, Artin también resolvió el problema número 17 de Hilbert convirtiéndose en el primero en resolver dos problemas de Hilbert en su totalidad.

10) ¿Existe un algoritmo general para la resolución de ecuaciones diofánticas?

En 1970 Yuri Matiyasevich estableció la respuesta negativa basándose en los trabajos de Julio Robinson y Martin Davis. La respuesta es que no todas las ecuaciones diofánticas son solubles algorítmicamente.

11) Clasificar las formas cuadráticas sobre cuerpos numéricos algebraicos.

Parece ser que Hilbert deseaba extender el trabajo de Minkowski sobre formas cuadráticas con coeficientes racionales a cualquier cuerpo algebraico. Lo logró Helmut Hasse en 1923.

12) ¿Se puede extender el teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraica? O equivalentemente, ¿Se pueden construir funciones holomórficas de varias variables que tengan propiedades análogas a las funciones exponenciales y a las funciones elipticas modulares?.

El problemas esta parcialmente resuelto por los trabajos de Takagi y Hasse, y los más recientes de Halzapfel (1995)

13) Mostrar la ***imposibilidad de la resolución de ecuaciones de séptimo grado por descomposición de funciones continuas de dos variables***. Más generalmente, se trata de estudiar funciones continuas de tres variables que no puedan expresarse por composición a partir de funciones continuas de dos variables. En 1954, Kolmogorov y Arnold demostraron que esta clase estaba vacía: existen n(2n+1) funciones continuas universales $\phi_{ij}([0,1]\to[0,1])$ tal que para toda función continua $f:[0,1]^n\to[0,1]$ existen 2n+1 funciones continuas $g_j[0,1]\to[0,1]t.q. f(x_1,x_2,..)=\sum_{j=1}^{2n+1} g_j \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(x_i)$

En contrapartida, la cuestión de la resolubilidad de ecuaciones de séptimo grado por funciones analíticas de dos variables aún está abierta.

14) Estudio de la ***existencia de un sistema finito de generadores de un álgebra de funciones racionales sobre un cuerpo abstracto***

Si se considera un cuerpo k y un subcuerpo K de E=(X_1,X_2,..,X_n) y hacemos R=k[X_1,..,X_n] entonces el anillo $R\bigcup k$ ¿es una k-álgebra de tipo finito?

La respuesta es negativa como mostró Zariski dando una interpretación geométrica: existe una variedad proyectiva X de cuerpo de funciones K y un divisor efectivo D sobre X tal que $k\bigcup R$ sea el conjunto de funciones de k que no tienen polos sobre R. M. Nagata en 1959 resolvió negativamente el problema.

15) Establecer el fundamento de la geometría algebraica, ***¿se puede fundamentar, en sentido formal, la geometría enumerativa de Schubert?*** La respuesta afirmativa la dio Bell en 1945.

16) Problema de la topología de curvas y superficies algebraicas.

El problema comporta dos partes: la primera concierne al número de ramas reales de una curva algebraica. La segunda plantea la cuestión de la existencia de un número maximal de ciclos límite para una ecuación diferencial lineal definida por polinomios homogéneos de grado n (aún abierta)

El problema esta parcialmente resuelto con los trabajos de Gudkov y Utkin de 1978 y los de Ilyashenko y Yokovenko en 1995.

La conjetura de Shimura-Taniyama, propuesta en 1995, postula simplemente esta ligazón, afirma que toda curva elíptica es una forma modular enmascarada. Los trabajos de Wiles para obtener el Último Teorema de Fermat la demostraron parcialmente y, posteriormente, Taylor y otros la demostraron totalmente.

17) Determinar las funciones racionales con coeficientes reales que no toman más que valores positivos y son suma de cuadrados de funciones racionales, ¿una función racional positiva sobre R^n puede escribirse como suma de cuadrados de funciones racionales? La respuesta afirmativa fue dada por Artin en 1927.

Artin da una demostración existencial: dada una forma definida, demuestra que existe alguna suma de cuadrados de funciones racionales que la expresa pero no dice como construir esa suma. En 1957 George Kreisel dio un método utilizando el análisis no estandar de Robinson, del método dijo Artin: “prefiero una prueba clara de existencia a una construcción con $2^{2^{100}}$ pasos”.

18) Construir el espacio con poliedros congruentes. El problema consta de tres partes: a) Determinar si es finito el número de grupos cristalográficos en los espacios euclídeos de grandes dimensiones, fue resuelto por Bieberbach en 1910. b) ¿se puede llenar el espacio con regiones fundamentales idénticas que no estén asociadas a un grupo cristalográfico?, fue resuelto afirmativamente por K.Reinhart en 1928 presentando un ejemplo en tres dimensiones c) Determinar la manera más eficiente de rellenar el espacio con varios sólidos regulares, la respuesta la dio Thomas Hale en el año 2000.

19) Las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones ¿son necesariamente analíticas? Existen distintas variaciones del problema dependiendo del número de ecuaciones o de variables involucradas. La solución fue iniciada por Berstein en 1904, le siguen Liechtenstein (1912), Hopf (1929), Leray-Schauder (1934), Petrovsky (1939), Caccioppoli (1934 y más tarde 1950-51), Morrey (1958), De Giorgi y Nash (1958).

20) ¿Tiene solución cualquier problema regular del cálculo de variaciones?, la solución parcial fue iniciada por Berstein

21) Partiendo de los trabajos de Riemann, Hilbert plantea ***“demostrar que siempre existe un sistema de ecuaciones diferenciales de la clase de Fuchs, con un conjunto de puntos singulares y grupo monodrómico preestablecido.”***

En 1908 el esloveno Josip Pleelj dio una respuesta alternativa a la dada por el propio Hilbert que le valió el reconocimiento general. En 1989 el ruso Andrei Bolibruch encontró un contraejemplo, por tanto la respuesta dada por Pleelj no solo era incompleta, era falsa.

22) Uniformización de Relaciones Analíticas mediante funciones automórficas.

Fue resuelto por Poincare en 1907 utilizando un espacio de cubrimiento universal, toda relación analítica entre dos puntos de la esfera de Riemann resulta de la eliminación de la variable compleja entre dos funciones meromorfas definidas bien sobre el plano complejo, bien sobre el semiplano o bien sobre la esfera de Riemann. El problema también fue resuelto por Paul Koebe en el mismo año.

23) Extender el desarrollo de los métodos del cálculo de variaciones ***¿existe un procedimiento automático que resuelva todos los problemas matemáticos uno tras otro?*** Se ha trabajado en ello y dadas respuestas parciales como la maquina de Turing o la teoría de decisiones.

Problemas del milenio

En una conferencia publica en París el 24 de Mayo del año 2000 el Clay Mathematics Institute de Boston (USA) anunció siete premios de un millón de dólares cada uno a quienes resolviesen, a satisfacción de la comunidad matemática internacional, siete celebres problemas matemáticos que permanecían sin solución en esas fechas y, que a juicio de un selecto comité de profesionales, estaban entre los mas difíciles e importantes de la matemática en ese momento. En el comité figuraban Arthur Jaffe (Harvard), presidente que fue de la American Mathematical Society, y presidente-fundador del Clay M. Institute, y los medalla Fields, Michael Atiyah (Cambridge), Edward Witten (Princeton) y Alain Connes (París). Entre los proponentes de problemas concretos figuraban, además, los conocidos matemáticos Enrico Bompieri, John Milnor y Andrew Wiles. Los siete problemas son:

a) P versus NP

Es un problema acerca de la eficiencia de los ordenadores al resolver problemas. Fue planteado de manera independiente en 1971 por Stephen Cook y Leonid Levin, se considera que es el problema central de la computación teórica. Existen problemas P que son aquellos resolubles de manera determinista mediante algoritmos polinómicos y en un tiempo polinomial como, por ejemplo, resolver ecuaciones; sin embargo existen otros problemas NP que pueden resolverse de manera indeterminista conjeturando una solución, es más fácil y rápido comprobar una solución que generar una nueva. Está claro que todo problema resoluble en tiempo polinomial (P) admite también una comprobación rápida (NP) pero y recíprocamente, ¿existen problemas NP que no son P?

b) La conjetura de Hodge

Fue formulada en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Cambridge (USA) en 1950 por William Vallance Douglas Hodge (1903-1975). El tema de la conjetura es la geometría compleja, prediciendo una estrecha relación entre Geometría, Álgebra, Topología y Análisis. El problema de Hodge consiste en identificar qué elementos de la homología de una variedad proyectiva compleja y lisa se pueden representar algebraicamente.

Dicho de otra forma, el problema de Hodge pretende identificar qué formas topológicas son homólogas a una combinación lineal con coeficientes racionales de subvariedades algebraicas.

La conjetura de Hodge afirma que para ciertos espacios particulares llamados Variedades Proyectivas Algebraicas, todo ciclo de Hodge es una combinación lineal racional de ciclos algebraicos.

Atiyah y Hirzebruch mostraron en 1962 que la conjetura es falsa si se usan coeficientes enteros en vez de coeficientes racionales..

c) La Conjetura de Poincaré

Jules Henri Poincaré (1854-1912), padre de la Topología, dedicó parte de su trabajo a clasificar algunas de las superficies que existen en el universo, así como que objetos permanecen constantes por mucho que se deformen. En su conjetura trata de establecer que, en un mundo de 4 dimensiones, una esfera no tiene ningún agujero. A esta conclusión llegó a través del siguiente experimento: si se pone una goma elástica alrededor de una esfera (mundo de tres dimensiones) podemos encogerla, sin romperla y sin que deje de estar en contacto con la superficie, hasta que forme un punto. Es la llamada conectividad simple. La conjetura, planteada en 1904, se demostró primero para dimensiones superiores, asi en 1961 Zeeman la demostró para la 5-esfera, y Smale para las n-esferas con n mayor o igual que 7, para n=6 fue probada por Stallings en 1962 y para la 4-esfera por Freedman en 1982.La conjetura original resistido un siglo de esfuerzos, hasta los trabajos del ruso Grigori Perelman en 2002 y 2003 que le valieron la medalla Field, rechazada por este, en el Congreso Internacional de Madrid. Los chinos Xi-Ping Zhi y Huai- Dong Cao realizaron el esfuerzo de entender y escribir por primera vez los detalles de la prueba de Perelman.

d) La Hipótesis de Riemann

Los primos han resistido el asedio de los matemáticos de todos los tiempos y siguen sin desvelar sus secretos más profundos. Desde Euclides se sabe que los números primos son infinitos, desde entonces hay una caza de ellos. Gauss estableció, aproximadamente, el número de primos que hay entre 1 y N mediante la ley $\frac{N}{\log N} \cong n^{o}\, primos$. Sobre 1730 Euler construyó la piedra Roseta de los números primos: la función zeta $\xi(s)$, la construyó de dos maneras, como suma de números naturales: $\sum \frac{1}{n^{s}}$ o como producto de primos: $\prod \frac{p^{s}}{p^{s}-1}$. Riemann conjeturó que los ceros no triviales de $\xi(s)$ están sobre una misma recta. La HR fue propuesta en 1859 y desde entonces nadie ha podido demostrarla, ni se sabe cuánto tiempo puede llevar el hacerlo. La hipótesis puede ser verdadera o falsa, si es verdad en los primos reina la armonía, en caso contrario, el caos.

El 13 de Julio de 1885 Hermite y Stieltjes,en una nota en Comptes Rendus, anuncian la demostración de la hipótesis de Riemann que resultó falsa.

En 1896 Hadamard y La Vallée Poussin demuestran, independientemente, la conjetura de Legendre bajo la forma definitiva del teorema de los números primos: $(\pi(x)\log x)/x$ se acerca indefinidamente a 1 cuando *x* crece (el teorema de los números primos). Quizás sea el mejor resultado obtenido hasta ahora.

e) El problema de Yang-Mills

El problema de la masa en las teorías de Yang_Mills es, de los siete, el más directamente vinculado a la Física contemporánea y el más desconocido para la comunidad matemática.

Sin entrar en los detalles técnicos del problema, hay una manera sencilla e intuitiva de comprender el problema en términos puramente físicos.

Desde finales de los años sesenta existe una teoría fundamental que explica a la perfección la teoría de las interacciones fuertes responsables de la estabilidad del núcleo atómico.

Esta teoría recibe la denominación de *Cromodinámica Cuántica* y su elemento esencial consiste en la descripción de la propagación relativista de dicha interacción fuerte a través de una partícula transmisora virtual conocida como gluón. El gluón juega en el mundo nuclear un papel análogo al del fotón en el mundo de las interacciones electromagnéticas. Ambas se propagan a la velocidad de la luz, sin embargo existen dos diferencias esenciales entre las mismas. El fotón posee una realidad experimental que nuestro ojos detectan en cada instante, sin embargo del gluón sólo observamos sus efectos secundarios. La otra gran diferencia estriba en que el fotón es una partícula sin masa lo que permite que se propague más lejos lo que da un alcance infinito a la interacción electromagnética y un gran tamaño, en términos de distancias fundamentales, al átomo y las moléculas. La interacción fuerte generada por los gluones sin embargo es de corto alcance y no va más allá del núcleo atómico. Esto sugiere que el gluón o sus partículas derivadas responsables de la interacción fuerte poseen en realidad una masa no nula. El explicar este fenómeno en términos de la cromodinámica cuántica, es decir a partir de primeros principios es el objeto del problema Clay.

Las leyes de física cuántica son al mundo de las partículas elementales lo que las leyes de la mecánica clásica de Newton son al mundo macroscópico. Hace casi medio siglo, Yang y Mills descubrieron que la física cuántica revela una relación importante entre la física de partículas elementales y las matemáticas de objetos geométricos. Las predicciones basadas en la ecuación de Yang-Mills han sido verificadas en experimentos con altas energías realizados en varios laboratorios alrededor del mundo: Brookhaven, Stanford, CERN (European Organization for Nuclear Research) y Tskuba. Sin embargo, no se conocen soluciones para tales ecuaciones que describan partículas con masa y que sean matemáticamente rigurosas al mismo tiempo. En particular, la hipótesis de "abertura de masa", la cual es tomada como cierta por los la mayoría de los físicos y usada en la explicación de la invisibilidad de los"quarks", nunca ha recibido una justificación matemática satisfactoria. Para obtener progreso en este problema se requerirá la introducción de nuevas ideas fundamentales en la física y la matemática.

f) Las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, surgieron del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes.

El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente.

A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos; el problema es que si uno estudia el movimiento de un fluido con estas ecuaciones, es incapaz de prever si ese movimiento se va a mantener siempre o se va a complicar. Los matemáticos creen que una explicación para la predicción de estos fenómenos pasa por la comprensión de las soluciones de estas ecuaciones. El reto es realizar algún progreso substancial hacia la teoría matemática que permita comprender los secretos escondidos dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes. En definitiva se trata de encontrar una teoría matemática que fundamente estas ecuaciones que estudian las turbulencias en líquidos y gases.

g) La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Ya sabemos que no existen métodos generales para resolver las ecuaciones diofánticas tal y como estableció en 1970 Matiyasevich al establecer la irresolubilidad del décimo problema de Hilbert sin embargo, la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer afirma que en el caso de las soluciones de las ecuaciones diofánticas generales, cuando éstas son los puntos de una variedad abeliana, el conjunto de los puntos que son soluciones racionales de las mismas depende de la función zeta, z(n), asociada, de modo que si z (1) = 0, hay infinitas soluciones, y si z(1) $\neq$ 0, el número de soluciones es finito.

Bibliografía

- Boyer,C.B. (1986): *Historía de la matemática*, A.U./94,Madrid
- N. Bourbaki(1976): "*Elementos de historia de las matemáticas*". Alianza Universidad
- Collete,J.L. (1985): *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid
- Hilbert, D. (1902): *Mathematical Problems.* Bull. AMS vol 8, 437-479.
- Kline ,M (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II),AU/724, Madrid
- Jeremy J. Gray. (2003): El reto de Hilbert: *Los 23 problemas que desafiaron a la matemática*. Crítica, Barcelona
- S. Smale. (1998) *Mathematical problems for the next century*. Math. Intelligenzer. 20, 7-15. (una traducción de este artículo puede encontrarse en la Gaceta de la RSME, vol3, nº3, 413-434)
- D.J. Struik. (1986). *"A source book in mathematics, 1200-1800"*. Princeton University Press
- Taton, R. (1988): *Historia general de la ciencia*,(VIII),Orbis, Barcelona

http://www.claymath.org/annual meeting/2000 Millennium Event/Video/
www.unizar.es/acz/05Publicaciones/Monografias
http://www.bibmath.net/dico/

Antonio Rosales Góngora, licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerce la docencia en el IES Bahía de Almería. Ha publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon y en el Boletín matemático de la UAL. anrogo58@yahoo.es