

BIHARY ZSOLT-VÍG ATTILA ANDRÁS

# Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra

Egy folytonos idejű, heterogén ágenseken alapuló tőkepiaci modellt javasolunk, amely támaszkodik *He-Li* [2015] hasonló modelljére. A piacon fundamentális, trendkövető, valamint indexkövető kereskedők vannak jelen, ők mozgatják az egyetlen kockázatos eszköz árfolyamát. Modellünk statisztikai tulajdonságait mintatrajektóriákon szemléltetjük, valamint megvizsgáljuk az invariáns eloszlásokat. A kapcsolódó szakirodalom a piaci stabilitást a modellek determinisztikus csontvázán, illetve sztochasztikus esetben Monte-Carlo-szimuláció segítségével vizsgálja. Cikkünkben az általános modell esetében az invariáns eloszlást a Kolmogorov-féle parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásával kapjuk. Bemutatunk továbbá két – egyszerűsített – modellt is, amelyekben analitikus eredményekre jutunk. Ha kevés a fundamentális kereskedő, akkor a piaci ár jelentősen elszakad a fundamentális értéktől. Trendkövetők által dominált piacon permanens trendek és buborékok alakulnak ki, a piac akár destabilizálódhat is. Modellünk eredményeit összevetjük a valós piaci árfolyammozgásokkal. A számottevően eltérő SP500- és bitcoinpiacok empirikus jellegzetességei összhangban állnak modellünk karakterisztikus tulajdonságaival.\*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11, G17.

## Bevezetés

Ebben a cikkben különböző, tipikusnak mondható kereskedési stratégiák hatását vizsgáljuk a piaci árfolyamokra. Folytonos idejű modellünk aktív szereplői a fundamentális és a trendkövető kereskedők, illetve passzív karakterként megjelennek az indexkövető kereskedők. A fundamentális kereskedők ismerik az egyetlen kockázatos eszköz fundamentális értékét, és a félrearázottság vezérli keresletüket. A trendkövető

\* Köszönjük a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület 2019. évi konferenciáján kapott hozzászólásokat, különösen *Koncz Imre* diszkuszióját.

*Bihary Zsolt* a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének docense (e-mail: zsolt.bihary2@uni-corvinus.hu).

*Víg Attila András* a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének tanársegédje (e-mail: attila.vig@uni-corvinus.hu).

A kézirat első változata 2020. február 14-én érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: <http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2020.7-8.688>

kereskedők az árfolyam mozgóátlaga alapján kereskednek. Ez a – gyakorlatban is sokat használt – technikai indikátor jelenik meg többek közt a *Moskowitz és szerzőtársai* [2012] és *Goyal–Jegadeesh* [2017] írásokban is.

A cikkünkben bemutatotthoz hasonló, heterogén ágenseken alapuló piaci modellek alkalmasnak bizonyultak arra, hogy a pénzügyi piacok bizonyos stilizált tényeit (vastag szélű hozameloszlások, momentumhatás és átlaghoz visszatérés) megmagyarázzák. *Brock–Hommes* [1998] az elsők között mutatta meg, hogy a heterogén várakozásokkal rendelkező, korlátozottan racionális befektetők miként okozhatnak piaci instabilitást. Diszkrét idejű modellje nagy lökést adott a heurisztikus szabályokat követő kereskedők elméleti irodalmának (lásd például *Hommes és szerzőtársai* [2005], *Chiarella és szerzőtársai* [2006], [2013]).

A diszkrét idejű modellekre építve, *He és szerzőtársai* [2009] számos folytonos idejű modellt vezetett be a piaci szereplők heterogenitása és a piaci stabilitás vizsgálatára. A folytonos idejű modellek előnyeit ismerteti *Li* [2014]. *He és szerzőtársai* [2009] a technikai elemzők által számolt mozgóátlag-időablak szélességének a piaci hatását vizsgálja. *He–Zheng* [2010] megmutatja, hogy az árfolyam az időablak szélességével stabilitási átalakuláson megy át: egy közepes szélességű időablak a trendkövetők révén a piaci árat destabilizálja, míg nagy szélesség esetén újra stabilá válik a piac. *He–Li* [2012] modelljében a szokásos stratégiák populációs aránya adaptív módon változik, a befektetők racionális viselkedése piaci instabilitáshoz és rendkívüli árfluktuációkhoz vezethet. *He–Li* [2015] azt találta, hogy a momentum alapuló stratégia sikeressége függ a mozgóátlag időablakának szélességétől és a momentumkereskedők piaci dominanciájától is.

Cikkünkkel ehhez a folytonos idejű irodalomhoz kívánunk csatlakozni. A piaci szereplők viselkedését indikátorok vezérik, amelyek a piac állapotjelzőiként is értelmezhetők. A modell posztulál egy, az árfolyamtól különböző fundamentális értékfolyamatot. Az egyik indikátor az árdiszlokáció, amely a piaci ár és a fundamentális érték különbsége. Ezt követik a fundamentális kereskedők. A másik a trendindikátor, amely a pillanatnyi ár és annak mozgóátlaga közti különbség. A trendkövetők erre alapozzák stratégiájukat. Az eredetileg az árfolyamra vonatkozó dinamikus egyenletekből levezethető az indikátorok dinamikája. Eltérően az idézett cikkek megszokott megközelítésétől, számításainkban nem tekintünk el a dinamika sztochasztikus jellegétől. Éppen ellenkezőleg, tárgyalásunk az árfolyam, illetve az indikátorok hosszú távú statisztikai viselkedésére koncentrál. Az árfolyam bolyongás, ezért nem beszélhetünk az invariáns eloszlásáról. Az indikátorok azonban – mint a piac állapotát meghatározó mennyiségek – viselkedhetnek stacionárius módon. Sztochasztikus leírásmódunkban éppen ezen keresztül definiálhatjuk a piac stabilitását – akkor beszélünk stabil piacról, ha az indikátoroknak létezik invariáns eloszlása.

A cikk felépítése a következő: először a modellt és annak különböző variánsait ismertetjük, majd részletezzük elméleti és empirikus eredményeinket. Tanulmányunkat összefoglalással zárjuk.

## A modell

A következőkben a folytonos idejű eszközárzási modellt mutatjuk be, támaszkodva *He-Li* [2015] heterogén ágenseken alapuló modelljére. A piacon eltérő karakterisztikájú kereskedők kereskednek egyetlen kockázatos és egyetlen kockázatmentes eszközzel. A heterogén ágenseken alapuló modellek szakítanak a pénzügyi közgazdaságtan racionális befektetőre épülő paradigmájával. Ehelyett olyan befektetőket modellezünk, akik korlátozott racionalitásúak, várakozásaik heterogének, és így kereskedési stratégiájukban is heterogének. A heterogén ágenseken alapuló piaci modellek két klasszikus karaktere (fundamentális és trendkövető kereskedő) mellett egy harmadik kereskedőt (indexkövető) is modellezünk.

Modellünkben a befektetői heterogenitás a befektetők által követett piaci indikátorban, illetve az ez alapján hozott befektetési döntésben nyilvánul meg. A befektetési döntést közvetlenül modellezzük, a hasznosság alapú optimalizációt a háttérben tartjuk. A kockázatos eszköz ára egy stilizált árjegyzői hatás eredményeként fejlődik, amelynek egyik első előzménye a *Beja-Goldman* [1980] tanulmány.

### A heterogén kereskedőtípusok

Jelöljék  $S_t: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $F_t: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sztochasztikus folyamatok rendre az egyetlen kockázatos eszköz piaci árát és fundamentális értékét a  $t \in [0, \infty)$  időpontban. Jelölje  $s_t = \log S_t$  és  $f_t = \log F_t$  rendre a piaci ár logaritmusát és a fundamentális érték logaritmusát. A továbbiakban általában elhagyjuk a log rövidítést, és egyszerűen piaci árként és fundamentális értéként hivatkozunk a kisbetűs mennyiségekre. Feltesszük, hogy a fundamentális érték egyszerű Brown-mozgást követ:

$$df_t = \sigma^{(f)} d\mathbf{W}_t, \quad (1)$$

ahol  $\sigma^{(f)} \in \mathbb{R}^2$  a fundamentális érték volatilitásvektora,  $\mathbf{W}: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  egy standard kétdimenziós Wiener-folyamat, amelynek komponensei függetlenek. Modellünkben a véletlennek két releváns forrása van, ezek közül az egyik jelenik meg a fundamentális értéken keresztül, majd hamarosan a másik a piaci áron keresztül. Megtehetnénk, hogy mindkét folyamatot egy saját Wiener-folyamat hajtja meg, amelyek között megjelenne egy tetszőleges korrelációs paraméter a  $[-1, 1]$  intervallumból. Ehelyett modellünkben két független Wiener-folyamatot feltételezünk, amelyek megjelennek minden sztochasztikus differenciálegyenletben, és a volatilitások is vektormennyiségek. Az (1) egyenlet jobb oldalán így egy skalárszorzat jelenik meg. A továbbiakban is követjük azt a konvenciót, hogy a vektoriális (illetve mátrix-) mennyiségek félkövérek.

A piaci ár és a fundamentális érték különbségét *árdiszlokációnak* nevezzük:

$$u_t = s_t - f_t. \quad (2)$$

Az árdiszlokáció folyamata a kockázatos eszköz félreárazottságát méri a  $t$ -edik időpontban. A logaritmusok különbsége az eredeti mennyiségek százalékos eltéréseként

is értelmezhető. A kockázatos eszköz felülértékelt, ha  $u_t > 0$ , és alulértékelt, ha  $u_t < 0$ . Az árdiszlokáció a fundamentális kereskedők által követett piaci indikátor, ők ez alapján hozzák meg befektetési döntésüket. Alulárazottság esetén keresletet támasztanak a kockázatos eszköz iránt, felülárazottság esetén pedig az eladói oldalon jelennek meg. Túlkeresleti függvényük:  $Z_t^{(f)} = Z^{(f)}(u_t)$  az árdiszlokáció monoton csökkenő függvénye. A fundamentális kereskedők esetén egy egyszerű lineáris függvénnyel specifikáljuk a túlkeresleti függvényt:

$$Z_t^{(f)} = -\alpha^{(f)} u_t, \quad \alpha^{(f)} \geq 0. \tag{3}$$

Az  $\alpha^{(f)}$  paraméter segítségével állítható az, hogy a fundamentális kereskedők milyen erősen reagálnak egységnyi félreárazottságra. Ahogy később látni fogjuk, a fundamentális kereskedők hatása – egy átlaghoz való visszahúzás formájában – egyfajta hosszú távú stabilitásként jelenik meg a piacon.

Definiáljuk továbbá a piaci árfolyam mozgóátlagát, amelyet gyakorló technikai kereskedők gyakran követnek figyelemmel. Két szokásos módja van a mozgóátlag kiszámításának: az egyik véges időablakon egyenlő súlyozással számol, a másik pedig exponenciális súlyozással végtelen időhorizonton. Mi az utóbbit választjuk, mert ezt – mint látni fogjuk – számottevően könnyebb kezelni analitikus számításokban.

$$m_t = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-v)} s_v dv, \tag{4}$$

ahol a  $\tau > 0$  paraméter jelöli azt, hogy a mozgóátlag a múlt hány évnyi részét veszi releváns módon figyelembe. Egyszerű számolás eredményeként kapjuk a mozgóátlagra vonatkozó sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$dm_t = \frac{1}{\tau} (s_t - m_t) dt, \tag{5}$$

amiből kitűnik, hogy  $m_t$  Markov-folyamat.

Piaci indikátornak azonban nem magát a mozgóátlagot tekintjük, hanem a segítségével képezzük a *trendindikátort* a pillanatnyi árfolyam és a mozgóátlag különbségéeként:

$$x_t = s_t - m_t. \tag{6}$$

A trendindikátor megváltozása az (5) és (6) egyenletekből közvetlenül adódik:

$$dx_t = -\frac{1}{\tau} x_t dt + ds_t. \tag{7}$$

A sztochasztikus differenciálegyenlet drift tagja mutatja, hogy a trendindikátor inherens módon egy átlaghoz visszahúzó tulajdonsággal rendelkezik. Ez a tulajdonság szolgál reménnyel arra, hogy modellünk (legalábbis  $x_t$ -ben) stationer jellegű lesz.

A trendindikátort követik és ez alapján hozzák meg befektetési döntésüket a trendkövető kereskedők. A trendkövetők hisznek a perzisztens trendekben, ezért pozitív trend ( $x_t > 0$ ) esetén vásárolnak, míg negatív trend ( $x_t < 0$ ) esetén az eladói oldalon

jelennek meg. Túlkeresleti függvényükre  $[Z_t^{(c)} = Z^{(c)}(x)]$  nézve a következő feltevésekkel élünk:

$$(Z^{(c)})'(x) > 0, \quad (Z^{(c)})'(0) = \alpha^{(c)} > 0, \quad x(Z^{(c)})''(x) < 0. \quad (8)$$

Ezek a feltevések egy monoton növekvő, S alakú túlkeresleti függvényt eredményeznek. A feltevések elméleti megalapozását lásd *Chiarella és szerzőtársai* [2006]-ban. A továbbiakban a következő – a (8) feltevéseket teljesítő – specifikációval<sup>1</sup> élünk a trendkövetők túlkeresleti függvényére:

$$Z_t^{(c)} = \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{x_t}{x^*}\right), \quad \alpha^{(c)}, x^* > 0. \quad (9)$$

Az  $\alpha^{(c)}$  paraméter jelöli a trendkövetők keresleti érzékenységét, amikor a pillanatnyi ár és a mozgóátlag közötti eltérés kicsi. Az  $x^*$  paraméter kontrollálja a túlkeresleti függvény minimumát és maximumát.

A harmadik és egyben utolsó modellezett kereskedőtípusunk az indexkövető kereskedő. Az indexkövető kereskedő nem aktív résztvevője a piacnak, nem kereskedik, hanem egyszerűen az egyetlen kockázatos eszközt tartja. Túlkeresleti függvénye ezért azonosan nulla:

$$Z_t^{(i)} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (10)$$

Az indexkövető kereskedő tehát nem rendelkezik piaci hatással modellünkben, egyetlen szerepe, hogy a – hamarosan bevezetésre kerülő – populációs arányokban nagyobb szabadságunk legyen, mint ha csak két kereskedőtípusunk lenne.

### Árazási egyenlet

Jelölje  $p^{(f)}$ ,  $p^{(c)}$  és  $p^{(i)}$  rendre a fundamentális, a trendkövető és az indexkövető kereskedők populációs arányát, azzal a természetes feltételezéssel, hogy  $p^{(f)} + p^{(c)} + p^{(i)} = 1$ , és  $0 \leq p^{(j)} \leq 1 \quad \forall j \in \{f, c, i\}$ . A piaci árfolyam egy árjegyzői mechanizmus eredményeként fejlődik (egyik előzményként lásd *Beja–Goldman* [1980], az árhatás egy újabb megközelítésére lásd például *Cont–Yu* [2018]). Abból indulunk ki, hogy az árfolyamot a piaci résztvevők keresletének és kínálatának eredője mozgatja. A nem közvetlenül modellezett, látens árjegyző összegzi a kereskedők túlkeresletét, egy ellentétes előjelű (*long* vagy *short*) pozícióval kielégíti azt, majd úgy igazítja az árat, hogy a túlkereslet a nullához közelítsen. Így az árigazítás előjele pozitív, ha az aggregált túlkereslet pozitív, illetve negatív, ha az aggregált túlkereslet negatív. Az aggregált túlkereslet figyelembe veszi a kereskedők populációs arányát is. Egy egyszerű lineáris összefüggést feltételezünk az árfolyam fejlődésére:

$$ds_t = \beta \sum_{j \in \{f, c, i\}} p^{(j)} Z_t^{(j)} dt + \sigma^{(s)} d\mathbf{W}_t, \quad (11)$$

<sup>1</sup>  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

ahol  $\beta \geq 0$  jelöli az árjegyző árigazításának a sebességét, míg  $\sigma^{(s)} \in \mathbb{R}^2$  az árfolyamat volatilitását jelölő vektor. Az árjegyzői mechanizmus hatása kizárólag a drift tagban jelenik meg. Akárcsak a fundamentális érték esetében, az árban is konstans volatilitást feltételezünk, amely nem függ sem a kereskedők keresletétől, sem a populációs arányoktól.

Helyettesítsük most be mindhárom kereskedőtípus (3), (9) és (10) túlkeresleti függvényét a (11) árazási egyenletbe, és megkapjuk a modellspecifikus árazási egyenletet:

$$ds_t = \beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{x_t}{x^*}\right) - p^{(f)} \alpha^{(f)} u_t \right] dt + \sigma^{(s)} dW_t. \tag{12}$$

Eljuthatunk a piac két meghatározó mennyiségének  $(u_t, x_t)$  sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszeréhez, ha  $ds_t$ -t behelyettesítjük a (2) és (7) egyenletekbe:

$$\begin{aligned} du_t &= \beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{x_t}{x^*}\right) - p^{(f)} \alpha^{(f)} u_t \right] dt + [\sigma^{(s)} - \sigma^{(f)}] dW_t, \\ dx_t &= \left\{ \beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{x_t}{x^*}\right) - p^{(f)} \alpha^{(f)} u_t \right] - \frac{1}{\tau} x_t \right\} dt + \sigma^{(s)} dW_t. \end{aligned} \tag{13}$$

Cikkünk központi vizsgált objektuma a (13) egyenletrendszer által definiált  $(u_t, x_t)$  rendszer invariáns (határ-) eloszlása, melyet a Kolmogorov-féle parciális differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásaként kapunk (lásd a *Függelék A* részét).

Az itt részletezett általános modell nemlineáris árdinamikát eredményez [lásd (12) és (13) egyenlet]. Ez a nemlinearitás a trendkövető kereskedők nemlineáris túlkeresleti függvényéből (9) fakad. Nemlineáris többdimenziós sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer analitikus vizsgálata rendkívül nehéz. Ezért a következőkben az általános modellünknek egy-egy olyan egyszerűsítését mutatjuk be, amelyekben analitikus eredményekre jutunk. Először a trendkövetők túlkeresleti függvényét linearizáljuk, majd megtartjuk a nemlinearitást, de a fundamentális érték folyamatainak újradefiniálásával megszabadulunk egy dimenziótól.

### A linearizált modell

Ebben a specifikációban a trendkövetők túlkeresleti függvényét (9) linearizáljuk a nulla körül:

$$Z_t^{(c)} = \alpha^{(c)} x_t.$$

Ismét lineáris árdinamikát (11) feltételezünk. Így a következő lesz az ezt a piacot leíró sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned} du_t &= \beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} x_t - p^{(f)} \alpha^{(f)} u_t \right] dt + [\sigma^{(s)} - \sigma^{(f)}] dW_t, \\ dx_t &= \beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} x_t - p^{(f)} \alpha^{(f)} u_t \right] dt - \frac{1}{\tau} x_t dt + \sigma^{(s)} dW_t, \end{aligned}$$

amely szintén egy lineáris rendszer. Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{Y}_t = (u_t, x_t)^\top$  vektorértékű folyamat egy kétdimenziós Ornstein–Uhlenbeck (O–U) folyamat, azaz felírható

$$d\mathbf{Y}_t = -\Theta \mathbf{Y}_t dt + \Sigma d\mathbf{W}_t, \quad \text{ahol} \quad (14)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \beta p^{(f)} \alpha^{(f)} - \beta p^{(c)} \alpha^{(c)} \\ \beta p^{(f)} \alpha^{(f)} \frac{1}{\tau} - \beta p^{(c)} \alpha^{(c)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{és} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{(s)} - \sigma^{(f)} \\ \sigma^{(s)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

alakban. Az O–U folyamatok gaussi eloszlása jól ismert, amennyiben bizonyos feltételek teljesülnek  $\Theta$ -ra nézve. A feltételeket és azok következményeit az *Eredmények* című fejezetben tárgyaljuk.

### *Az egydimenziós modell*

Ebben a specifikációban megtartjuk a trendkövetők stratégiájából fakadó nemlinearitást, azonban egy dimenzióredukcióval egyszerűsítjük a modellt. Míg a fő specifikációnkban a fundamentális érték egy exogén sztochasztikus folyamat volt, most azt feltételezzük, hogy a fundamentális kereskedők magával a mozgóátlaggal közelítik a fundamentális értéket. Ez a feltételezés nem ritka valós piacokon, különösen olyan termékek esetén, amelyeknek reálpiaci értéke nehezen megfogható vagy nehezen becsülhető.

Legyen tehát  $f_t = m_t$ , és így  $u_t = x_t$ . A fundamentális kereskedő túlereslete továbbra is egy csökkenő lineáris függvény, de ebben az esetben a piaci indikátor  $x_t$  lesz:

$$Z_t^{(f)} = -\alpha^{(f)} x_t, \quad \alpha^{(f)} \geq 0.$$

Bizonyos tanulmányok (lásd például *He–Li* [2015]) az ilyen stratégiát követő kereskedőt *kontrariánusnak* nevezik, de mi ebben a cikkben maradjunk a fundamentális kereskedő megnevezésnél.

A lineáris árdinamikát (11), valamint a nemlineáris trendkövető túleresletét (9) megtartva így a piacot leíró egyetlen sztochasztikus differenciálegyenlet a következő lesz:

$$dx_t = -\left[ \beta p^{(f)} \alpha^{(f)} + \frac{1}{\tau} \right] x_t dt + \beta p^{(c)} \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{x_t}{x^*}\right) dt + \sigma^{(s)} d\mathbf{W}_t. \quad (15)$$

Ebben a sztochasztikus differenciálegyenletben az első drift tag tartalmazza a fundamentális kereskedők átlaghoz visszahúzó hatását (illetve a mozgóátlag inherens visszahúzását), míg a második, nemlineáris tag a trendkövetők extrapolatív erejét. Mivel (15) – szemben (13)-mal – az invariáns eloszlásokat tekintve egydimenziós, analitikus eredményben is reménykedhetünk.

# Eredmények

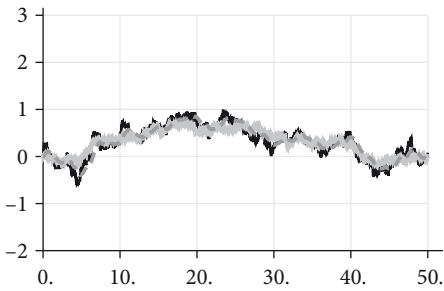
## Illusztrációk az árdinamikára

Az 1. ábra generált trajektóriák segítségével szemlélteti a fundamentális és a trendkövető kereskedők piaci szerepét és árhatását a fő (többdimenziós, nemlineáris) specifikáció esetében. A fundamentális érték logaritmusa ( $f_t$ ) egy drift nélküli, exogén Brown-mozgás viszonylag kis volatilitással. A piaci árfolyam logaritmusa ( $s_t$ ) a fundamentális kereskedőknek köszönhetően a fundamentális érték felé húz, körülötte ingadozik. A volatilitásvektorokat illusztrációinkban úgy választjuk, hogy az árfolyam volatilitása nagyobb legyen a fundamentális érték volatilitásánál (Shiller [1981] például azt találja, hogy az árfolyamok volatilitása messze felülmúlja azt a mértéket, mint amely az osztalékok változásából következne), továbbá hogy a zajkomponensek pozitívan korreláljanak. A mozgóátlag ( $m_t$ ) lemaradva követi a piaci árfolyamot. Az alsó két ábrán mutatjuk be a piaci indikátorokat, amelyekre a befektetési döntéseiket alapozzák a kereskedők. Az árdiszlokáció,  $u_t = s_t - f_t$  a piaci árfolyam és a fundamentális érték különbsége, a trendindikátor,  $x_t = s_t - m_t$  a piaci árfolyam és a mozgóátlag különbsége. Előbbit a fundamentális, míg az utóbbit a trendkövető kereskedők követik.

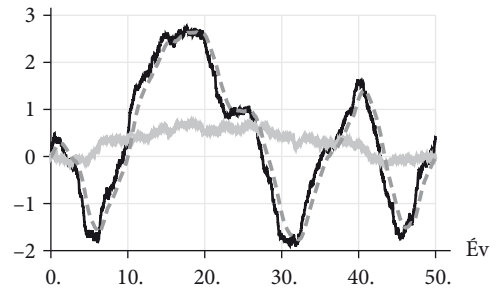
1. ábra

Mintatrajektóriák a fő (nemlineáris, kétdimenziós) specifikáció esetén

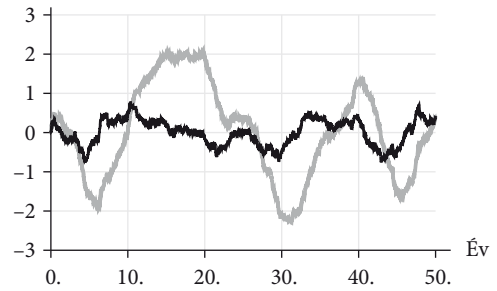
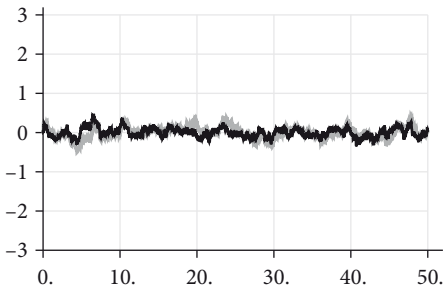
$p^{(f)} = 0,9, p^{(c)} = 0,1$



$p^{(f)} = 0,1, p^{(c)} = 0,9$



— Piaci árfolyam      — Fundamentális érték      - - - Mozgóátlag



— Árdiszlokáció      — Trendindikátor

Paraméterek:  $\beta = 1, \tau = 0,75, \alpha^{(f)} = 1, \alpha^{(c)} = 1,75, x^* = 0,5, \sigma^{(f)} = (0,1, 0), \sigma^{(s)} = (0,1, 0,2).$



A bal oldali két ábra egy érett, kiforrott piacot szemléltet, ahol a kockázatos termék fundamentális értéke jól becsülhető. Modellünkben ekkor többségben vannak azok a kereskedők, akik a fundamentális érték alapján kereskednek [ $p^{(f)} = 0,9$ ]. A jobb oldali két ábra olyan piacot szemléltet, ahol a fundamentális érték nehezen megfogható, itt a trendkövető technikai kereskedők vannak többségben [ $p^{(c)} = 0,9$ ]. A kereskedők piaci hatása jól látható a trajektóriák alapján. A bal oldalon a piaci árfolyam szorosan követi a fundamentális értéket, mert a nagyszámú fundamentális kereskedő a fundamentum felé húzza az árat. Az árdiszlokáció kilengései ekkor kicsik. A jobb oldalon az árfolyam rendszeresen és jelentősen eltér a fundamentális értéktől. Ezek a kilengések a nagyszámú trendkövető kereskedő aktivitásának köszönhetőek, akik a trendekre felülve periodikusan buborékokat fújnak. Nemlineáris specifikációnk miatt azonban a trendkövetők csak korlátozott nagyságú pozíciót építhetnek ki, ezért előbb-utóbb a viszonylag kevés fundamentális kereskedő árhatása visszatéríti az árat a fundamentum felé. A piaci ár erősen oszcillál, de nem robban fel.

### *Az invariáns eloszlások*

A (13) sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer alapján numerikus számítással jutunk el az  $(u, x)$  rendszer hosszú távú állapotát jellemző invariáns eloszlásig (sűrűségfüggvényig). Az invariáns sűrűségfüggvényhez a Kolmogorov-féle parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásán keresztül jutunk el (lásd a *Függelék A* részét). Röviden összefoglalva, ez egy Wiener-folyamat által meghajtott rendszer sűrűségfüggvényének időbeli fejlődését leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását jelenti a véges differenciák segítségével egy rácson. Ez a módszer pontosabb, és gyorsabban eredményre vezet, mint egy Monte-Carlo-szimulációból számolt tapasztalati sűrűségfüggvény. A 2. ábrán látjuk az invariáns sűrűségfüggvényét ugyanannak a két, karakterisztikusan eltérő piacnak, mint amelyeket az 1. ábrán is illusztráltunk.

A bal oldali ábrán (ahol a fundamentális kereskedők dominálnak) a sűrűségfüggvény az  $(u, x) = (0, 0)$  origó szűk környezetére koncentrálódik. Ez megfelel az 1. ábra bal oldalának, ahol mind az árdiszlokáció, mind a trendindikátor a nulla szint környékén bolyong.

A jobb oldalon (ahol a trendkövető kereskedők dominálnak) a sűrűségfüggvény sokkal kiterjedtebb, illetve észrevehetünk egy gyenge bimodalitást is. A nagy kiterjedtség az 1. ábra jobb oldali trajektóriáin látható nagy kilengéseknek felel meg, míg a bimodalitás összhangban van a periodikus (bár a sztochasztika miatt zajos) felfutásokkal és zuhanásokkal.

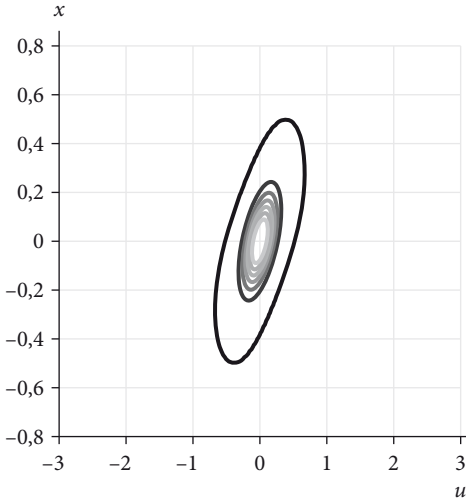
Ezek a piaci jelenségek az egyszerűsített modellvariánsokban is tetten érhetők. Az első állításunk a lineárizált, kétdimenziós modell invariáns eloszlásával kapcsolatos.

1. ÁLLÍTÁS • A linearizált specifikáció esetén az árdiszlokáció és a trendindikátor  $\mathbf{Y}_t = (u_t, x_t)^\top$  együttes dinamikáját leíró (14) sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer akkor és csak akkor rendelkezik invariáns eloszlással, ha a következő feltételek együttesen teljesülnek:

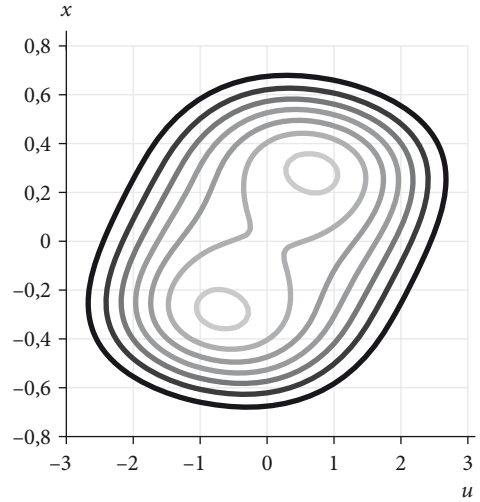
2. ábra

Az invariáns sűrűségfüggvények szintvonalai a fő (nemlineáris, kétdimenziós) specifikáció esetén

$$p^{(f)} = 0,9, p^{(c)} = 0,1$$



$$p^{(f)} = 0,1, p^{(c)} = 0,9$$



Megjegyzés: a paraméterek megegyeznek az 1. ábra paramétereivel.

$$\beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} - p^{(f)} \alpha^{(f)} \right] < \frac{1}{\tau}, \tag{C1}$$

$$\beta p^{(f)} \alpha^{(f)} > 0. \tag{C2}$$

Továbbá, feltéve, hogy (C1) és (C2) teljesül, az invariáns eloszlás kétdimenziós normális lesz az alábbi momentumokkal:

$$E[u_\infty] = E[x_\infty] = 0,$$

$$D^2[u_\infty] = \frac{\left[ \frac{1}{\tau} \sigma^{(u)} + q^{(c)} \sigma^{(f)} \right] \left[ \frac{1}{\tau} \sigma^{(u)} + q^{(c)} \sigma^{(f)} \right]^T + q^{(f)} \frac{1}{\tau} \sigma^{(u)} \left[ \sigma^{(u)} \right]^T}{2q^{(f)} \frac{1}{\tau} \left[ q^{(f)} + \frac{1}{\tau} - q^{(c)} \right]},$$

$$\text{COV}[u_\infty, x_\infty] = \frac{\left[ q^{(c)} - \frac{1}{\tau} \right] \sigma^{(f)} \left[ \sigma^{(f)} \right]^T + \frac{1}{\tau} \sigma^{(s)} \left[ \sigma^{(s)} \right]^T}{2 \frac{1}{\tau} \left[ q^{(f)} + \frac{1}{\tau} - q^{(c)} \right]},$$

$$D^2[x_\infty] = \frac{q^{(f)} \sigma^{(f)} \left[ \sigma^{(f)} \right]^T + \frac{1}{\tau} \sigma^{(s)} \left[ \sigma^{(s)} \right]^T}{2 \frac{1}{\tau} \left[ q^{(f)} + \frac{1}{\tau} - q^{(c)} \right]},$$

ahol  $\sigma^{(u)} = \sigma^{(s)} - \sigma^{(f)}$ ,  $q^{(j)} = \beta p^{(j)} \alpha^{(j)}$ ,  $j \in \{f, c\}$ . Az  $\mathbf{Y}_\infty = (u_\infty, x_\infty)^\top$  jelölést használjuk arra a gaussi valószínűségi változóra, amelyhez  $\mathbf{Y}_t$  eloszlásban konvergál.

BIZONYÍTÁS • Lásd a *Függelék B*) részében. ■

Az 1. ÁLLÍTÁS (C1) feltétele – egyfajta stabilitási kritériumként – azt mutatja meg, hogy ha a trendkövető kereskedők elég erősek [a  $p^{(c)} \alpha^{(c)}$  relatív erejük elég nagy], akkor a piacot olyan mértékben destabilizálják, hogy a piaci indikátorok még invariáns (határ-) eloszlással sem rendelkeznek. Ez egy trajektória mentén azt jelenti, hogy ha a trendkövetők elég erősek, akkor egy soha nem kidurranó buborékot fújnak. Ez a linearizált modell velejárója – a fő specifikációban a trendkövetők túlkereslete a  $\tanh x$  függvénnyel kerül tompításra, így ott nem alakulhat ki permanens buborék. Az állítás (C2) feltétele azt jelenti, hogy ha egyáltalán nincsenek a piacon fundamentális kereskedők, akkor nincs árhatás, amely a fundamentumhoz visszahúzná az árfolyamot, így az  $u_t$  árdiszlokáció egyszerű bolyongásként viselkedik, amelynek nincs határeloszlása.

Az 1. ÁLLÍTÁS második részében a momentumok nevezőjében a (C1) feltételre emlékeztető  $\beta p^{(f)} \alpha^{(f)} + 1/\tau - \beta p^{(c)} \alpha^{(c)}$  mennyiség szerepel. A gaussi sűrűségfüggvény kiterjedtsége tehát annak a függvénye, hogy a piac mennyire van közel a (C1) stabilitási határhoz.

A következő állításunk az egydimenziós, nemlineáris specifikáció invariáns eloszlására vonatkozik. Ebben a specifikációban a trendkövetők túlkereslete korlátos, így mindig lesz invariáns eloszlás, amely azonban a gaussinál izgalmasabb karakterisztikájú.

2. ÁLLÍTÁS • Az egydimenziós nemlineáris specifikáció esetében a trendindikátor dinamikáját leíró (15) sztochasztikus differenciálegyenlet mindig rendelkezik invariáns eloszlással. Az invariáns sűrűségfüggvény:

$$f_\infty(x) = C \left[ \cosh\left(\frac{x}{x^*}\right) \right]^{\frac{2\beta p^{(c)} \alpha^{(c)} (x^*)^2}{\sigma^{(s)} [\sigma^{(s)}]^\top}} \exp\left\{ -\frac{\frac{1}{\tau} + \beta p^{(f)} \alpha^{(f)}}{\sigma^{(s)} [\sigma^{(s)}]^\top} x^2 \right\}, \quad (16)$$

ahol  $C > 0$  egy megfelelő normalizáló konstans.

BIZONYÍTÁS • Lásd a *Függelék B*) részében. ■

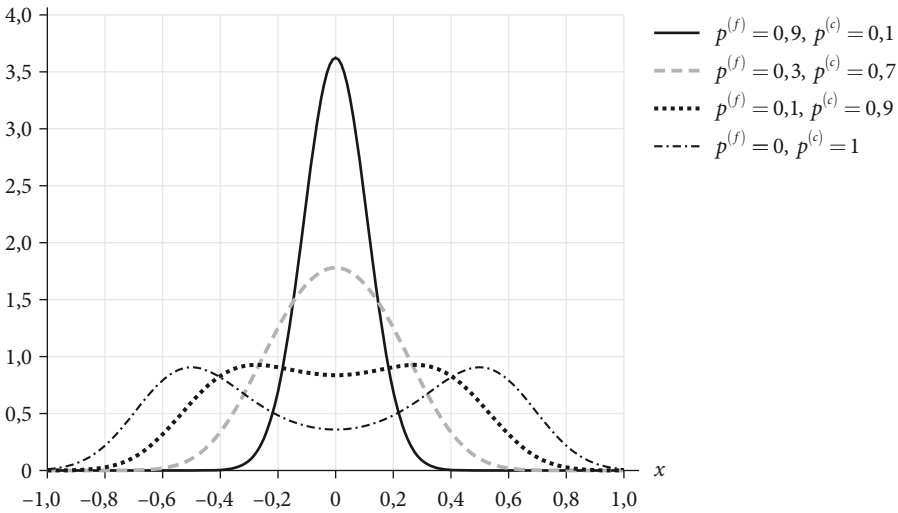
MEGJEGYZÉS • Vegyük észre, hogy ha a (16) egyenletben a  $\cosh$  tényező kitevője éppen egységnyi, akkor a sűrűségfüggvény egy szimmetrikus, kevert normális eloszlást ír le. Ennek belátására gondoljuk meg, hogy

$$\cosh(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \right].$$

A 3. ábrán néhány jellegzetes sűrűségfüggvényt mutatunk be. A görbék úgy követik egymást, ahogy a trendkövetők populációja fokozatosan növekszik a fundamentális kereskedők kárára. A folytonos sűrűségfüggvény egy érett piacra jellemző, ahol többségben vannak a fundamentális kereskedők (a jellemző trajektóriát lásd az 1. ábra bal oldalán). A piaci indikátor ekkor kis varianciájú és egymódusú, jellegét tekintve közel gaussi. A pontozott sűrűségfüggvény esetén többségben vannak a trendkövetők (az erre a piacra jellemző trajektóriát lásd az 1. ábra jobb oldalán). Ekkor a trendindikátor jóval nagyobb varianciájú és kétmódusú. A szaggatott görbe egy köztes állapotot ábrázol, míg a pontozott, szaggatott egy extrém piacot ír le, ahol csak trendkövetők kereskednek.

3. ábra

Az egydimenziós, nemlineáris modell sűrűségfüggvénye – (16) egyenlet – különböző populációs arányok mellett



Megjegyzés: a populációs arányokon kívüli paraméterek megegyeznek az 1. ábrán használtakkal.

A 2. és 3. ábra tartalma hasonló. A kereskedők aránya szerint a folytonos görbe megfelel a 2. ábra bal oldalának, a pontozott görbe pedig a jobb oldalának. Érdekes, hogy a modellünk a fundamentális értékfolyamat specifikációjától függetlenül eredményezhet egy- vagy többmódusú eloszlásokat is. Az egydimenziós specifikáció esetén analitikusan is vizsgálhatjuk a kétmódusúság megjelenését: a két módusz akkor jelenik meg, amikor a (16) sűrűségfüggvény nullabeli második deriváltja negatívból pozitívba vált. Ebből adódik a következő állítás.

3. ÁLLÍTÁS • A (15) sztochasztikus differenciálegyenlet által definiált egydimenziós, nemlineáris specifikáció esetén az  $x_t$  trendindikátor invariáns eloszlása egymódusú, ha:

$$\beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} - p^{(f)} \alpha^{(f)} \right] < \frac{1}{\tau}. \tag{C3}$$

BIZONYÍTÁS • Lásd a *Függelék B*) részében. ■

A (C3) feltétel azt mutatja, hogy a trendindikátor akkor mutat kétmódusú viselkedést, amikor a trendkövető (technikai) kereskedők dominálnak a piacon a fundamentális kereskedőkkel szemben. Vegyük észre továbbá, hogy ez a (C3) feltétel megegyezik az 1. ÁLLÍTÁS (C1) stabilitási feltételével. Ez a formális egyezés azt sugallja, hogy a nemlineáris modellben megjelenő kétmódusú invariáns eloszlás tulajdonképpen az instabilitásnak egy enyhébb formája.

Amíg a fundamentális kereskedők vannak túlsúlyban, addig visszahúzó hatásukkal stabilizálják a piacot, erős trendek nem alakulnak ki. Ha a trendkövetők piaci ereje túllép egy kritikus értéket, akkor kialakulnak a feltételei egy öngerjesztő buborékfújásnak. Lineáris specifikáció mellett nincs, ami gátat szabjon a trendkövetők buborékgerjesztésének, a piac felrobban. Ilyenkor invariáns eloszlás nem alakul ki. A nemlineáris specifikáció azonban erős trend esetén is gátat szab a trendkövetők túlkeresletének, és így a buborékoknak. Ilyenkor az árfolyam közepes erősségű emelkedő és csökkenő trendek zajos, kváziperiodikus sorozata lesz.

### *Empirikus eredmények*

Az előzőkben láttuk, hogy az egyszerűsített (egydimenziós, nemlineáris) modellben az  $x_t$  trendindikátor eloszlása karakterisztikusan különböző lehet (lásd 3. ábra). Most megvizsgáljuk, hogy ennek a mennyiségnek az eloszlása hogyan alakul két valós pénzügyi termék esetén. Első példánk az SP500 részvényindex, amely az empirikus munkákban elterjedt választás. Ez egy érett piacot reprezentál, ahol a valós fundamentális érték becslésével nagyon sokan foglalkoznak (például *Abarbanell–Bushee* [1998] és *Richardson és szerzőtársai* [2010]), ennek megfelelően a fundamentális kereskedési stratégia súlya jelentős a technikaihoz képest. A másik végletet a bitcoin árfolyamán keresztül vizsgáljuk. Ezen a piacon vitatott és nehezen mérhető a termék fundamentális értéke (*Cheah–Fry* [2015] például amellel érvel, hogy a bitcoin fundamentális értéke nulla, míg *Hayes* [2019] határkölségen alapuló modellje annak több ezer dolláros értékével is összhangban van), ezért úgy gondoljuk, hogy itt a technikai elemzők dominálnak.

Mindkét idősor esetén napi záró árfolyamokat használtunk. Az adatsorok egységesen 2010. július 19-én indulnak, és 2020. január 16-ig tartanak. Összhangban az elméleti modellünkkel, kiszámítottuk az árfolyamok  $s_t = \log S_t$  logaritmusát, majd ezek mozgóátlagát. A mozgóátlagképzéshez mindkét idősor esetén az (5) egyenlet diszkretizált alakját használtuk:

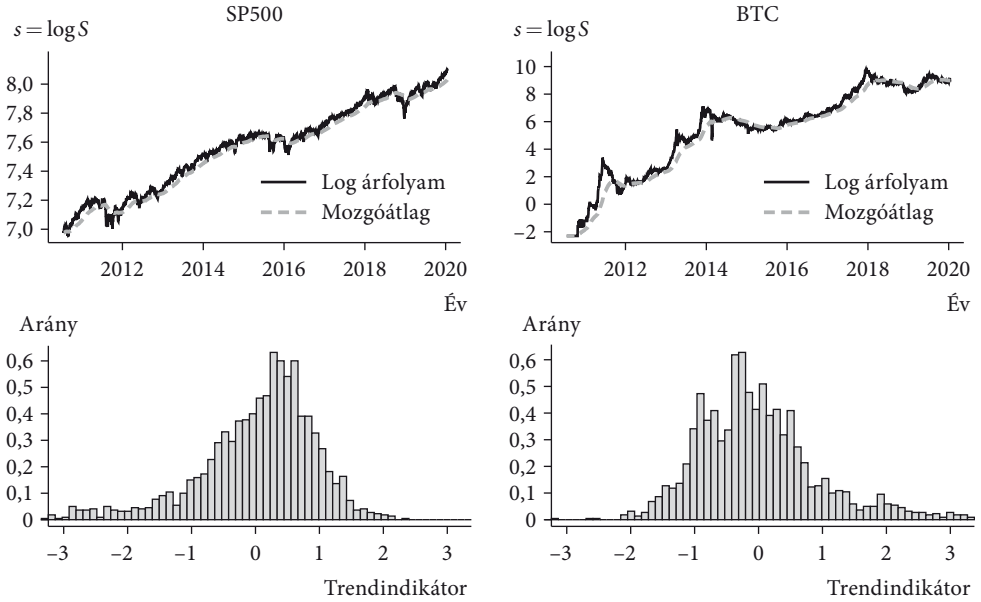
$$m_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{\tau} \Delta t\right) m_t + \frac{1}{\tau} s_t \Delta t,$$

ahol  $\Delta t = 1$  nap,  $\tau = 1/4$  év, az  $m_t$  kezdőértékét önkényesen a kezdeti  $s_t$ -nek választottuk. Az önkényes választás hatását kiküszöböltük azzal, hogy az idősor első egy évét nem vettük figyelembe. Végül minden napra kiszámítottuk az  $x_t$  trendindikátor értékeket – lásd (6) egyenlet.

A 4. ábra mutatja empirikus eredményeinket. A bal felső blokkban az SP500 logaritmizált árfolyamát és a számított mozgóátlagot látjuk. A jobb felső blokkban ugyanezt mutatjuk a bitcoin esetén. Az alsó blokkokban az  $x_t$  trendindikátorok sztenderdizált empirikus sűrűségfüggvényét (hisztogramját) ábrázoljuk a két termékre.

4. ábra

Az SP500 és a bitcoin trendindikátorainak a hisztogramjai



Mindkét idősor erősen emelkedő volt a vizsgált időszakban, de a hosszú távú trendhez viszonyított kilengések a bitcoin esetében hangsúlyosabbak, és jobban tetten érhető a kváziperiodikus mintázat. A hisztogramok is mutatják a két idősor különbözőségét. Az SP500 esetén egy egymódusú eloszlást látunk (3. ábra szaggatott görbe). A bitcoin hisztogramja strukturáltabb eloszlásra utal, jellegetben a 3. ábra pontozott görbéjére emlékeztet. A megfigyelt jellemzők a két piac esetében összhangban vannak a modellünk alapján megfogalmazott várakozásainkkal. A javasolt statisztikai eljárás tehát alkalmas lehet arra, hogy érett és technikai elemzők által uralt piacokat megkülönböztessünk egymástól.

Összefoglalás

Egy folytonos idejű, heterogén ágenseken alapuló tőkepiaci modellt írtunk fel, amely támaszkodik He–Li [2015] hasonló modelljére. Eltérően az irodalomban megszokott megközelítésektől, számításainkban nem tekintettünk el az árfolyam-dinamika sztochasztikus jellegétől. Éppen ellenkezőleg, tárgyalásunk központi eleme az árfolyam hosszú távú viselkedését leíró, matematikailag jól kezelhető és a gyakorlatban is

használt piaci indikátorok vizsgálata. A témakör egyik központi problémáját, a piaci stabilitás kérdését is az indikátorok invariáns eloszlásán keresztül tárgyaljuk. Három specifikációnk volt. A modell lineáris specifikációjában analitikusan meghatároztuk a stabilitás feltételét, miszerint a trendkövetők piaci ereje nem haladhatja meg számottevően a fundamentális kereskedőkét. Ekkor az indikátorok invariáns eloszlása normális. A nemlineáris egydimenziós specifikációban analitikusan meghatároztuk az invariáns eloszlás sűrűségfüggvényét. Ez az eloszlás hangsúlyosan nem normális; ha a trendkövetők piaci ereje nagy, még kétmódusú is lehet. Ez arra utal, hogy ilyen piaci körülmények között az árfolyam oldalazó mozgása instabil, hosszan tartó trendek váltogatják egymást. A kétmódusúság megjelenését eszerint egyfajta lokális instabilitásként értelmezhetjük. A nemlineáris kétdimenziós specifikációban numerikusan, szimuláció nélkül határoztuk meg az invariáns eloszlást. Itt is megfigyeltünk kétmódusú viselkedést, hasonló feltételekkel, mint az egydimenziós esetben. További előnye az eloszlásközpontú problémakezelésünknek, hogy az eredmények empirikusan is tesztelhetők. A bitcoin és az SP500 árfolyamait megvizsgálva a várakozásainkkal összhangban találtunk arra utaló jeleket, hogy az előbbi esetén erősebben megjelenik a momentumhatás, mint az utóbbiban.

Az összefoglalás hátralevő részében megfogalmazunk néhány jövőbeli kutatási irányt. Numerikus vizsgálatainkban illusztratív céllal realiztikus paramétereket igyekeztünk választani. A paraméterek hatásának szisztematikus vizsgálata egy következő cikk témája lehet.

Empirikus áttekintésünkben a két piac trendindikátor-eloszlását kvalitatív módon vizsgáltuk. Kvantitatív elemzéshez a (16) egyenlet sűrűségfüggvényének paramétereit kellene becsülni, például maximum likelihood módszerrel. Bár az általános formákra ez komoly nehézségekbe ütközne, de a 2. ÁLLÍTÁS (16) egyenletéhez kapcsolódó MEGJEGYZÉSBEN megmutattuk, hogy a sűrűségfüggvény speciális esetben kevert gaussi alakot ölt. Mivel a kevert gaussi illesztésnek komoly irodalma van (egyik alapcikk a témában *Hasselblad* [1966], *Redner–Walker* [1984] pedig jól összefoglalja a legfontosabb módszereket), ezért először egy ilyen kalibrációt lehetne megkísérelni.

Modellünk természetes módon kiterjeszhető több kockázatos eszköz esetére. Ezzel több, gyakorlatilag is releváns probléma – például dinamikus portfólióallokáció – vizsgálható lenne. Olyan kereskedési stratégiák is elemezhetők lennének, amelyek egy kockázatos eszköz esetében nem értelmezhetők (például *pair trading*).

További természetes kutatási irány a kereskedési stratégiák profitabilitásának összehasonlítása. Egy ilyen vizsgálatban modellünket ki kell egészíteni egyéb, a nyereséget befolyásoló mennyiségekkel. Fontos szerephez juthat például az osztalék, illetve a stratégiák költsége.

### *Hivatkozások*

ABARBANELL, J. S.–BUSHEE, B. J. [1998]: Abnormal Returns to a Fundamental Analysis Strategy. *The Accounting Review*, Vol. 73. No. 1. 19–45. o. <https://doi.org/10.2139/ssrn.40740>.

- BEJA, A.–GOLDMAN, M. B. [1980]: On the dynamic behavior of prices in disequilibrium. *The Journal of Finance*, Vol. 35. No. 2. 235–248. o. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1980.tb02151.x>.
- BROCK, W. A.–HOMMES, C. H. [1998]: Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic dynamics and Control*, Vol. 22. No. 8–9. 1235–1274. o. [https://doi.org/10.1016/s0165-1889\(98\)00011-6](https://doi.org/10.1016/s0165-1889(98)00011-6).
- CHEAH, E.-T.–FRY, J. [2015]: Speculative bubbles in Bitcoin markets? An empirical investigation into the fundamental value of Bitcoin. *Economics Letters*, Vol. 130. 32–36. o. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2015.02.029>.
- CHERNY, A. [2004]: Invariant Distributions for Singular Stochastic Differential Equations. *Stochastics and Stochastic Reports*, Vol. 76. No. 2. 101–112. o. <https://doi.org/10.1080/10451120410001697837>.
- CHIARELLA, C.–DIECI, R.–GARDINI, L. [2006]: Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 30. No. 9–10. 1755–1786. o. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2005.10.011>.
- CHIARELLA, C.–DIECI, R.–HE, X.-Z.–LI, K. [2013]: An evolutionary CAPM under heterogeneous beliefs. *Annals of Finance*, Vol. 9. No. 2. 185–215. o. <https://doi.org/10.1007/s10436-012-0215-0>.
- CONT, R.–YU, Y. [2018]: Algorithmic trade execution and intraday market dynamics. *Műhelytanulmány*.
- GOYAL, A.–JEGADEESH, N. [2017]: Cross-sectional and time-series tests of return predictability: What is the difference? *The Review of Financial Studies*, Vol. 31. No. 5. 1784–1824. o. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhx131>.
- HASSELBLAD, V. [1966]: Estimation of parameters for a mixture of normal distributions. *Technometrics*, Vol. 8. No. 3. 431–444. o. <https://doi.org/10.1080/00401706.1966.10490375>.
- HAYES, A. S. [2019]: Bitcoin price and its marginal cost of production: support for a fundamental value. *Applied Economics Letters*, Vol. 26. No. 7. 554–560. o. <https://doi.org/10.1080/13504851.2018.1488040>.
- HE, X.-Z.–LI, K. [2012]: Heterogeneous beliefs and adaptive behaviour in a continuous-time asset price model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36. No. 7. 973–987. o. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2012.02.002>.
- HE, X.-Z.–LI, K. [2015]: Profitability of time series momentum. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 53. 140–157. o. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2014.12.017>.
- HE, X.-Z.–ZHENG, M. [2010]: Dynamics of moving average rules in a continuous-time financial market model. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 76. No. 3. 615–634. o. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2010.08.005>.
- HE, X.-Z.–LI, K.–WEI, J.–ZHENG, M. [2009]: Market stability switches in a continuous-time financial market with heterogeneous beliefs. *Economic Modelling*, Vol. 26. No. 6. 1432–1442. o. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2009.07.016>.
- HOMMES, C.–HUANG, H.–WANG, D. [2005]: A robust rational route to randomness in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 29. No. 6. 1043–1072. o. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2004.08.003>.
- LI, K. [2014]: Asset Price Dynamics with Heterogeneous Beliefs and Time Delays. PhD Thesis 1-2014. Finance Discipline Group, UTS Business School, University of Technology, Sydney, <https://opus.lib.uts.edu.au/bitstream/10453/28055/2/02whole.pdf>.
- MOSKOWITZ, T. J.–OOI, Y. H.–PEDERSEN, L. H. [2012]: Time series momentum. *Journal of Financial Economics*, Vol. 104. No. 2. 228–250. o. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2011.11.003>.



- REDNER, R. A.–WALKER, H. F. [1984]: Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Review*, Vol. 26. No. 2. 195–239. o. <https://doi.org/10.1137/1026034>.
- RICHARDSON, S.–TUNA, I.–WYSOCKI, P. [2010]: Accounting anomalies and fundamental analysis: A review of recent research advances. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 50. No. 2–3. 410–454. o. <https://doi.org/10.1016/j.jacceco.2010.09.008>.
- SHILLER, R. J. [1981]: Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends? *The American Economic Review*, Vol. 71. No. 3. 421–436. o. <https://doi.org/10.3386/w0456>.
- SHREVE, S. E. [2004]: *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Finance Textbooks. Springer-Verlag, New York.

## Függelék

### A) A Kolmogorov-féle parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása

Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{Y}_t$   $N$ -dimenziós sztochasztikus folyamat dinamikáját az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$d\mathbf{Y}_t = \mathbf{a}(\mathbf{Y}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}_t) d\mathbf{W}_t,$$

ahol  $\mathbf{a}(\mathbf{Y}_t)$  egy  $N$ -dimenziós vektor,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}_t)$  egy  $N \times M$  dimenziós mátrix, míg  $\mathbf{W}_t$  egy  $M$ -dimenziós Wiener-folyamat független komponensekkel. Legyen

$$\mathbf{D}(\mathbf{Y}_t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}_t) \boldsymbol{\sigma}^\top(\mathbf{Y}_t).$$

Ekkor az  $\mathbf{Y}_t$  folyamat  $f_t(\mathbf{y})$   $t$ -edik időpontbeli sűrűségfüggvényének időbeli fejlődését írja le az úgynevezett (*forward*) Kolmogorov-féle parciális differenciálegyenlet:

$$df_t(\mathbf{y}) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial y^{(j)}} \left[ a^{(j)}(\mathbf{y}) f_t(\mathbf{y}) \right] dt + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial y^{(j)} \partial y^{(k)}} \left[ D^{(j,k)}(\mathbf{y}) f_t(\mathbf{y}) \right] dt. \quad (F1)$$

A rendszer *invariáns sűrűségfüggvényének* nevezzük és  $f_\infty(\mathbf{y})$ -nal jelöljük azt a sűrűségfüggvényt, amelynek az időbeli megváltozása nulla, azaz  $df_\infty(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . A (13) sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer  $f_\infty(u, x)$  invariáns sűrűségfüggvényét úgy számítjuk, hogy a kapcsolódó (F1) egyenletet oldjuk meg a  $\mathbb{T} \times \mathbb{U} \times \mathbb{X} = \{0, 0 + \Delta t, \dots, T\} \times \{\underline{u}, \underline{u} + \Delta u, \dots, \bar{u}\} \times \{\underline{x}, \underline{x} + \Delta x, \dots, \bar{x}\}$  rácson. A számítások során a legfontosabb feltevésünk, hogy az  $f_t(u, x)$  „releváns tartója” korlátos:

$$\lim_{(u^2 + x^2) \rightarrow \infty} f_t(u, x) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

azaz  $f_t(u, x) \approx 0$ , ha az  $(u, x)$  pont az origótól elegendően távol helyezkedik el. A numerikus számítások szempontjából ez a feltevés azt jelenti, hogy az  $\mathbb{U} \times \mathbb{X}$  rács szélén a sűrűségfüggvény értékét egységesen nullának állítjuk be:

$$f_t(u, \underline{x}) = f_t(u, \bar{x}) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{U} \quad \text{és} \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

$$f_t(\underline{u}, x) = f_t(\bar{u}, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad \text{és} \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Legyen  $f_t(\mathbb{U}, \mathbb{X}) \in \mathbb{R}^{|\mathbb{U}| \times |\mathbb{X}|}$  egy sűrűségmátrix [azaz az  $f_t(u, x)$  függvény diszkrétizálja az  $\mathbb{U} \times \mathbb{X}$  rács pontjaiban] a  $t \in \mathbb{T}$  időpontban. A számításaink egyetlen iterációja három lépésből áll. Az első lépésben megkapjuk  $f_{t+\Delta t}^*(\mathbb{U}, \mathbb{X})$ -et az (F1) egyenlet explicit megoldásaként, ahol a deriváltakat a véges differenciák módszerével közelítjük:

$$\begin{aligned} f_{t+\Delta t}^*(u, x) = & f_t(u, x) - \frac{\left[ a^{(u)} f_t \right](u + \Delta u, x) - \left[ a^{(u)} f_t \right](u - \Delta u, x)}{2\Delta u} \Delta t - \\ & - \frac{\left[ a^{(x)} f_t \right](u, x + \Delta x) - \left[ a^{(x)} f_t \right](u, x - \Delta x)}{2\Delta x} \Delta t + \\ & + D^{(u,u)} \frac{f_t(u + \Delta u, x) - 2f_t(u, x) + f_t(u - \Delta u, x)}{(\Delta u)^2} \Delta t + \\ & + D^{(x,x)} \frac{f_t(u, x - \Delta x) - 2f_t(u, x) + f_t(u, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \Delta t + \\ & + D^{(u,x)} \frac{f_t(u + \Delta u, x + \Delta x) + f_t(u - \Delta u, x - \Delta x)}{2(\Delta u)(\Delta x)} \Delta t - \\ & - D^{(u,x)} \frac{f_t(u + \Delta u, x - \Delta x) + f_t(u - \Delta u, x + \Delta x)}{2(\Delta u)(\Delta x)} \Delta t \end{aligned}$$

$\forall (u, x) \in \bar{\mathbb{U}} \times \bar{\mathbb{X}} = \{\underline{u} + \Delta u, \dots, \bar{u} - \Delta u\} \times \{\underline{x} + \Delta x, \dots, \bar{x} - \Delta x\}$ -re.

$f_{t+\Delta t}^*(\mathbb{U}, \mathbb{X})$  esetén nem biztosított, hogy az valóban egy sűrűségmátrix abban az értelemben, hogy lehetnek negatív komponensei, valamint

$$\sum_{u \in \mathbb{U}} \sum_{x \in \mathbb{X}} f_{t+\Delta t}^*(u, x) \Delta u \Delta x = 1$$

nem feltétlenül teljesül. Ezért minden iterációban a következő két korrekciós lépést hajtjuk végre:

$$f_{t+\Delta t}^{**}(u, x) = \max \left[ f_{t+\Delta t}^*(u, x), 0 \right] \quad \forall (u, x) \in \mathbb{U} \times \mathbb{X} \quad \text{és}$$

$$f_{t+\Delta t}(u, x) = \frac{f_{t+\Delta t}^{**}(u, x)}{\sum_{u \in \mathbb{U}} \sum_{x \in \mathbb{X}} f_{t+\Delta t}^{**}(u, x) \Delta u \Delta x} \quad \forall (u, x) \in \mathbb{U} \times \mathbb{X}.$$

Számításaink során az iterációt egyenletes eloszlásból indítjuk:

$$f_0(u, x) = \frac{1}{|\bar{\mathbb{U}}| \cdot |\bar{\mathbb{X}}| \Delta u \Delta x} \quad \forall (u, x) \in \bar{\mathbb{U}} \times \bar{\mathbb{X}}.$$

## B) Bizonyítások

1. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA • A (14) sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása:<sup>2</sup>

$$\mathbf{Y}_t = e^{-\Theta t} \mathbf{Y}_0 + \int_0^t e^{\Theta(t-v)} \Sigma d\mathbf{W}_v, \quad (F2)$$

amely akkor és csak akkor aszimptotikusan stacioner eloszlású (lásd például *Shreve* [2004]), ha az  $\dot{y} = -\Theta y$  közönséges differenciálegyenlet erősen stabil, azaz ha  $\Theta$  minden sajátértékének a valós része pozitív. Ez teljesül, ha  $\beta[p^{(c)}\alpha^{(c)} - p^{(f)}\alpha^{(f)}] < 1/\tau$  és  $\beta p^{(f)}\alpha^{(f)} > 0$  egyaránt fennáll.

Továbbá, mivel (F2)-ben az integrandus determinisztikus, ezért  $\mathbf{Y}_t$  Gauss-eloszlású  $\forall t > 0$ -ra. A Wiener-folyamat szerinti integrál várható értéke nulla, így

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{Y}_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\Theta t} \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (F3)$$

ha  $\Theta$  minden sajátértéke pozitív, amelyet itt a korábbiak értelmében már felteszünk.

Vezessük be a  $\rho: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  jelölést az  $\mathbf{Y}_t$  folyamat kovarianciafüggvényére, azaz  $\rho_t = \text{COV}[\mathbf{Y}_t] = E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top] - E[\mathbf{Y}_t]E[\mathbf{Y}_t^\top]$ . Legyen  $t$  elegendően nagy, hogy (F3) miatt  $\rho_t \approx E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top]$ . Ekkor

$$\begin{aligned} d\rho_t &= dE[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top] = E[d(\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top)] = \\ &= E[(d\mathbf{Y}_t) \mathbf{Y}_t^\top] + E[\mathbf{Y}_t (d\mathbf{Y}_t^\top)] + E[d\mathbf{Y}_t d\mathbf{Y}_t^\top] = \\ &= -\Theta E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top] dt - E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^\top] \Theta^\top dt + \Sigma \Sigma^\top dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= -\Theta \rho - \rho \Theta^\top + \Sigma \Sigma^\top. \end{aligned}$$

Az aszimptotikus gaussi eloszlás kovarianciamátrixát kapjuk meg, ha  $\dot{\rho} = \mathbf{0}$ , és megoldjuk a vonatkozó egyenletrendszeret. ■

2. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA • A (15) sztochasztikus differenciálegyenlet egy időhomogén egydimenziós Ito-folyamat az alábbi,

$$dx_t = b(x_t) dt + \sigma(x_t) d\mathbf{W}_t$$

formában, ahol esetünkben a volatilitás konstans:  $\sigma(x_t) = \sigma^{(s)} \neq \mathbf{0}$ . *Cherny* [2004] fő állítása alapján az invariáns eloszlás sűrűségfüggvénye ekkor

$$f_\infty(x) = C \frac{\exp \left[ \int^x \frac{2b(y)}{\sigma(y)\sigma^\top(y)} dy \right]}{\sigma(x)\sigma^\top(x)},$$

<sup>2</sup> Itt  $e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ , amelyre teljesül a szokásos  $(e^{\mathbf{A}})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}}$  összefüggés.

ahol  $\int^x$  az indefinit integrált jelöli, míg  $C > 0$  egy megfelelő normalizáló konstans. Helyettesítsük be a megfelelő függvényeket:

$$b(y) = -\left[\beta p^{(f)} \alpha^{(f)} + \frac{1}{\tau}\right] y + \beta p^{(c)} \alpha^{(c)} x^* \tanh\left(\frac{y}{x^*}\right)$$

és  $\sigma(x) = \sigma^{(s)}$ ,

és megkapjuk az invariáns eloszlás sűrűségfüggvényét:

$$f_\infty(x) = C \left[ \cosh\left(\frac{x}{x^*}\right) \right]^{\frac{2\beta p^{(c)} \alpha^{(c)} (x^*)^2}{\sigma^{(s)} (\sigma^{(s)})^\top}} \exp\left[-\frac{\frac{1}{\tau} + \beta p^{(f)} \alpha^{(f)}}{\sigma^{(s)} (\sigma^{(s)})^\top} x^2\right].$$

Mivel  $\cosh(x)$  függvény  $\exp(x)$  nagyságrendben nő a plusz és mínusz végtelen irányába is,  $f_\infty(x)$  függvény  $\exp(-x^2)$  nagyságrendben cseng le, így  $f_\infty(x)$  integrálható, és valóban sűrűségfüggvény. ■

3. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA •  $f_\infty(x)$  – (16) egyenlet– egymóduszú, ha  $f_\infty''(0) < 0$ , míg kétmóduszú, ha  $f_\infty''(0) > 0$ :

$$f_\infty''(0) < 0,$$

$$\frac{2\beta p^{(c)} \alpha^{(c)} (x^*)^2}{\sigma^{(s)} (\sigma^{(s)})^\top} - \frac{2}{\frac{\sigma^{(s)} (\sigma^{(s)})^\top}{\frac{1}{\tau} + \beta p^{(f)} \alpha^{(f)}}} < 0,$$

$$\beta \left[ p^{(c)} \alpha^{(c)} - p^{(f)} \alpha^{(f)} \right] < \frac{1}{\tau}. \quad \blacksquare$$