BIMÁTRIX JÁTÉKOK NASH EGYENSÚLYPONTJÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL: KÖNNYEN KEZELHETŐ SPECIÁLIS ESETEK[1]

Budapesti Corvinus Egyetem – Pécsi Tudományegyetem Közgazdasági Kar

A bimátrix játékok Nash egyensúlypontjának numerikus meghatározásával foglalkozunk. Ismerve a probléma nehézségét, néhány olyan speciális esetet tekintünk át, amikor a feladat polinomiális időben megoldható. Kijelölünk egy új osztályt, amely szintén polinomiális idejű algoritmushoz vezet. Az osztály definiálásában kulcsszerepe van a ,,majdnem negatív definit" mátrixoknak. Egy szükséges és egy elégséges feltételt adunk a majdnem negatív definit mátrixok jellemzésére.

Kulcsszavak: Bimátrix játék, komplexitás, definitség.

1 Bevezetés

A bimátrix játékok felé nagy figyelem fordult a játékelméleti kutatások kezdete óta. Már a játékelméleti kurzusok első óráin megismerkedhetnek a hallgatók olyan egyszerű játékokkal, mint a fogolydilemma, a nemek háborúja vagy a gyáva nyúl játék. Ezek a játékok egyszerűek, hiszen csak két játékos van, mindkettőnek véges számú, igen gyakran csak két tiszta stratégiája van, mégis az általuk leírt konfliktusszituációk az emberi és társadalmi viselkedés régóta kutatott terepei. Szinte már a köznyelvbe is behatolt egy-egy aspektusuk (pl. win-win szituáció, zérus összegű játék), ugyanakkor stratégiai komplexitásuk mind a mai napig kihívás a játékelmélet művelőinek. Mivel a Nash egyensúlypont (NEP) központi szerepet játszik (noha nem az egyetlen ,,megoldás-koncepció"), a kutatók egy másik csoportját is érdekelte a bimátrix játékok világa. Noha Nash híres tételének (Nash, 1950) egyszerű speciális eseteként tudjuk, hogy a bimátrix játékok kevert bővítésének mindig van NEP-je, sőt, ha a játék szimmetrikus, akkor szimmetrikus NEP-je, az azonban egy nehéz kérdés, hogy van-e olyan algoritmus, amely polinomiális időben meghatároz legalább egy NEP-et, illetve, ha nincs, akkor milyen komplexitási osztályba tartozik? Ez talán a legérdekesebb, legnehezebb problémája az egyre nagyobb érdeklődést kiváltó új diszciplínának, amelyet ,,algorithmic game theory"-nak neveznek, (Roughgarden, 2016). A nehézséget és fontosságot jelzi, hogy Kontogiannis és Spirakis (2012) ,,one of the holy grails of theoretical computer science"-nek nevezi.

Nézzük hogyan állunk pillanatnyilag.

---

[1] E-mail: `ferenc.forgo@uni-corvinus.hu, komlosi.sandor@ktk.pte.hu`. Beérkezett: 2019. június 15.

1. Nem ismeretes olyan algoritmus, amely egy tetszőleges bimátrix játékot polinomiális időben megoldana. A legismertebb Lemke-Howson (1964) pivotáláson (elemi bázistranszformáció) alapuló algoritmusa legrosszabb esetben exponenciális időt igényel egy NEP meghatározására, (Savani and von Stengel, 2004). Egy bimátrix játék ,,megoldásán" ezentúl a játék legalább egy Nash egyensúlypontjának meghatározását értjük.

2. Olyan algoritmus sem ismert, amely polinomiális időben egy közelítő NEP-et határozna meg.

3. Nem tudjuk, hogy a bimátrix játékokat is tartalmazó komplexitási osztály (PPAD, Papadimitriou (1994)) egy önálló osztályt képez-e a P és az NP osztályok között. Mindhárom vélekedésnek, P=PPAD, PPAD=NP és PPAD egy önálló osztály, vannak hívei. Mindhárom vélekedés létezik közelítő NEP-ek meghatározására is.

Eddig is azt tettük, és a következőkben is a determinisztikus esetet vizsgáljuk, a véletlen játékok, úgy tűnik, könnyebben kezelhetőek (Bárány et al. 2004, Forgó, 2018), és más módszereket igényelnek.

Mit lehet tenni ebben az esetben, amikor a fenti három pont egyikében sem sikerült komoly áttörést elérni? Természetesen további erőfeszítéseket kell tenni a probléma általános megoldására, illetve a bimátrix játékok olyan speciális osztályainak identifikálására, amelyek specialitásuknál fogva lehetővé teszik hatékony (polinomiális idejű) algoritmusok használatát a bimátrix játékok megoldására.

Ebben a cikkben ez utóbbira teszünk kísérletet. Áttekintünk néhány könnyen kezelhető speciális esetet, majd magunk is megadunk egy ilyen új osztályt.

A cikk szerkezete a következő. Az első részben a legfontosabb alapfogalmakat, definíciókat és tételeket foglaljuk össze. A második részben a teljes leszámláláson, valamint a lineáris és a konvex kvadratikus programozásra való visszavezethetőségen alapuló módszerekkel foglalkozunk, és érintjük a közelítő megoldások problémakörét. A harmadik részben a majdnem negatív definit mátrixok jellemzésével foglalkozunk.

2 Alapfogalmak, definíciók, előzmények

Egy bimátrix játékot, mint azt a neve is mutatja, két $m \times n$ -es A és B mátrixszal adunk meg. Ezek a játékosok kifizetéseit mutatják. Ha a sorjátékos az i stratégiáját, az oszlopjátékos a j stratégiáját választja, akkor a sorjátékos a_{ij}, az oszlopjátékos b_{ij} kifizetést kap. Ennek a játéknak a kevert bővítése, normál formában a $G = \{X, Y; x^T Ay, x^T By\}$ játék, ahol X és Y a valószínűségi vektorok szimplexei, $x^T Ay$ és $x^T By$ a sor- és oszlopjátékos várható kfizetései. Ezentúl, amikor bimátrix játékról beszélünk, mindig a kevert bővítést értjük. Az (A, B) bimátrix játék egy NEP-je az $(x^*, y^*), x^* \in X, y^* \in Y$

stratégiapáros, ha a következő egyenlőtlenségek fennállnak

$$\begin{array}{rcll} xAy^* & \leq & x^*Ay^* & \text{minden} \quad x \in X\text{-re}, \\ x^*By & \leq & x^*By^* & \text{minden} \quad y \in Y\text{-ra}. \end{array}$$

Nash (1950) bebizonyította, hogy minden n-személyes véges játék kevert bővítésének van legalább egy NEP-je. Ha $n = 2$, akkor speciális esetként kapjuk azt, hogy minden bimátrix játéknak van NEP-je. Nash ugyancsak bebizonyította, hogy ha a játék szimmetrikus, ami a bimátrix játék esetében azt jelenti, hogy $B = A^T$, akkor van legalább egy szimmetrikus NEP, ahol $x^* = y^*$.

A NEP-ek halmazát sokféleképpen lehet jellemezni. Ezek közül hármat adunk meg. Mivel a NEP-ek halmaza nem változik meg, ha a kifizetésekhez hozzáadunk egy konstanst, vagy a mátrixokat megszorozzuk egy pozitív konstanssal, ezért feltehetjük, hogy $A, B \geq 0$ vagy akár $A, B > 0$. Egy csupa egyesekből álló vektort 1-gyel jelölünk.

1. Karakterizáció (Egyenlőtlenségrendszer). Egy (x^*, y^*) stratégiapáros akkor és csak akkor NEP-je az (A, B) bimátrix játéknak, $A, B \geq 0$, ha vannak olyan α^*, β^* nem-negatív számok, hogy $(x^*, y^*, \alpha^*, \beta^*)$ lehetséges megoldása az alábbi egyenlőtlenségrendszernek

$$\begin{array}{rcl} x^TAy - \alpha & = & 0 \\ x^TBy - \beta & = & 0 \\ Ay - \alpha 1 & \leq & 0 \\ x^TB - \beta 1^T & \leq & 0^T \\ 1^Tx & = & 1, \ \ 1^Ty = 1 \\ x & \geq & 0, \ \ y \geq 0, \ \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0\,. \end{array} \tag{1}$$

Ez az egyenlőtlenségrendszer egyszerűbb lesz, ha a játék szimmetrikus, $B = A^T$, és csak a szimmetrikus megoldások érdekelnek bennünket:

$$\begin{array}{rcl} x^TAx - \alpha & = & 0 \\ Ax - \alpha 1 & \leq & 0 \\ 1^Tx & = & 1 \\ x & \geq & 0, \ \ \alpha \geq 0. \end{array} \tag{2}$$

2. Karakterizáció (Lineáris komplementaritás). Tegyük fel, hogy $A, B > 0$, és tekintsük az alábbi lineáris komplementaritási feladatot

$$\begin{array}{rcl} -1 + Ay & \geq & 0 \\ -1 + B^Tx & \geq & 0 \\ x^T(-1 + Ay) & = & 0 \\ y^T(-1 + B^Tx) & = & 0 \\ x & \geq & 0, \ \ y \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

Ha (x^*, y^*) egy NEP–je az (A, B) bimátrix játéknak, akkor $x = \frac{1}{x^{*T}By^*}$, $y = \frac{1}{x^{*T}Ay^*}$ megoldása a (3) lineáris komplementaritási feladatnak. Fordítva, ha x, y megoldása (3)-nak, akkor $x^* = \frac{1}{1^T x}, y^* = \frac{1}{1^T y}$ az (A, B) bimátrix játék NEP-je. A szimmetrikus esetben a lineáris komplementaritási feladat az alábbi egyszerű formát ölti

$$\begin{aligned} -1 + Ax &\geq 0 \\ x(-1 + Ax) &= 0 \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Karakterizáció (Kvadratikus programozás, (Mangasarian and Stone, 1964)). Egy (x^*, y^*) stratégiapáros akkor és csak akkor NEP-je az (A, B) bimátrix játéknak, $A, B \geq 0$, ha vannak olyan α^*, β^* nem negatív számok, hogy $(x^*, y^*, \alpha^*, \beta^*)$ optimális megoldása az alábbi kvadratikus programozási feladatnak

$$\begin{aligned} \max Q(x, y, \alpha, \beta) &= x^T(A + B)y - \alpha - \beta \\ \text{feltéve, hogy} \quad Ay - \alpha 1 &\leq 0 \\ x^T B - \beta 1^T &\leq 0^T \\ 1^T x &= 1, \;\; 1^T y = 1 \\ x &\geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; \alpha \geq 0, \;\; \beta \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

és az optimális célfüggvényérték 0.

A szimmetrikus esetben (5) így egyszerűsödik

$$\begin{aligned} \max Q(x, \alpha) &= x(A + A^T)x - \alpha \\ \text{feltéve, hogy} \quad Ax - \alpha 1 &\leq 0 \\ 1^T x &= 1 \\ x &\geq 0, \;\; \alpha \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Az általános eset, vagyis egy tetszőleges bimátrix játék megoldása évtizedek óta nagy kihívást jelent. A 2. Karakterizáció lehetőséget ad arra, hogy a feladatot „durva erőszakkal" (brute force) oldjuk meg. Jelöljük a sorjátékos egy x stratégiájának támaszát, vagyis x pozitív komponensei indexeinek halmazát $T(x)$-el. Hasonlóan definiáljuk az oszlopjátékos y stratégiájának $T(y)$ támaszát. Ha ismerjük egy (x^*, y^*) NEP $T(x^*), T(y^*)$ támaszait, akkor egyszerűen ki tudjuk számítani (x^*, y^*)-ot. Ekkor ugyanis (2) az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned} -1 + A'y &= 0 \\ -1 + B'^T x &= 0 \\ x &\geq 0, \;\; y \geq 0\,, \end{aligned} \tag{7}$$

ahol A' az A-nak csak azokat az oszlopait tartalmazza, amelyek indexei $T(y^*)$-be tartoznak, B' pedig csak azokat a sorokat B-ből, amelyek indexei a $T(x^*)$-ba tartoznak. A (4) lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása (egy lehetséges megoldás megtalálása) polinomiális időben lehetséges, pl. lineáris programozással. Ha azonban nem tudjuk előre a támaszokat, akkor minden lehetséges támaszpárra meg kell vizsgálni (6) megoldhatóságát, ami nyilván exponenciális időt igényel. Ez a leszámlálás csak akkor lehet hatékony, ha előre tudjuk, hogy van olyan NEP, amelyben a támaszok mérete nem haladhat meg egy k számot, ahol k lehetőleg kicsi. Rögzített k mellett a leszámlálás polinomiális időben végrehajtható.

Az első elegáns módszert bimátrix játékok egy NEP-jének meghatározására Lemke és Howson (1964) adta. Noha a módszer megfelelő elemi bázistranszformációk sorozata, kiderült, (Savani and von Stengel, 2004), hogy vannak olyan példák, ahol a módszer exponenciálisan sok lépést igényel. Ebben, és sok más vonatkozásban sem segít, ha feltesszük, hogy a játék szimmetrikus, mivel minden játékot lehet szimmetrizálni. Legyen (A, B) egy bimártix játék $m \times n$ méretű mátrixokkal. Tekintsük a (C, C^T) szimmetrikus bimátrix játékot, ahol

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$(m + n) \times (m + n)$ méretű mátrix. Griesmer et al. (1963) mutatták meg először, hogy szoros kapcsolat van (A, B) és (C, C^T) között. Nevezetesen, ha (x, y) az (A, B) NEP-je, akkor $(\eta(\frac{1}{v}x, \frac{1}{w}y), \eta(\frac{1}{v}x, \frac{1}{w}y))$ a (C, C^T) szimmetrikus bimátrix játék szimmetrikus NEP-je, ahol $v = xAy, w = xBy$ és $\eta(a)$ az $a \neq 0$ normalizáltját jelöli. Egy másik szimmetrizációs technika Gale, Kuhn és Tucker-nak tulajdonítható. Ennek részletes tárgyalása Jurg et al. (1992) munkájában található. A tanulság: algoritmikus szempontból elég koncentrálni a szimmetrikus játékok szimmetrikus egyensúlypontjainak a megkeresésére, ha ez valamiféle könnyebbséget jelent.

3 Hatékony módszerek speciális bimátrix játékok NEP-jének meghatározására

Régóta ismert, hogy a mátrixjátékok, vagyis amikor $B = -A$, megoldására sok hatékony módszer ismeretes. Ezek közül kiemelkedik a lineáris programozás. Valóban, ilyenkor a (3) kvadratikus programozási feladat egy LP primál-duál feladatára redukálódik. Közismert, hogy az LP polinomiális időben megoldható. Tanuló algoritmusok, mint pl. a fiktív lejátszás szintén egy lehetséges megoldási mód. Megemlítendő, hogy a fiktív lejátszás módszere a koordinációs játékok, vagyis amikor $B = A$, esetében is működik.

Ennek fényében jó elgondolásnak tűnik, hogy identifikáljunk olyan játékokat, amelyek valamilyen értelemben ,,közel" vannak a mátrixjátékokhoz és/vagy visszavezethetőek mátrixjátékokra. Az is fontos szempont, hogy annak felismerése, hogy a játék visszavezethető-e egy mátrixjátékra polinomiális időben végrehajtható legyen.

Jó ötlet lehet, hogy egy (A, B) bimátrix játékhoz próbáljunk meg találni olyan (A', B') zérusösszegű játékot, amelynek ugyanazok a NEP-jei, vagyis stratégiailag ekvivalensek. Egy kevésbé ambiciózus, de legitim cél, ha csak annyit követelünk meg, hogy (A', B') NEP-jei között legyen (A, B) legalább egy NEP-je. Az első jelentős eredmény ebben az irányban Moulin és Vial (1978) nevéhez fűződik. Többféle jellemzését is adják azoknak a játékoknak, amelyek stratégiailag ekvivalensek egy zérus-összegű játékkal. A feltételek fennállása polinomiális időben ellenőrizhető. Egyúttal meghatároznak egy, az eredeti játékkal stratégiailag ekvivalens zérus-összegű játékot is, amely polinomiális időben megoldható. Érdemes idézni Moulin és Vial (1978) erre vonatkozó tételét Kontogiannis és Spirakis (2012) megfogalmazásában.

1. Tétel (Kontogiannis és Spirakis (2012), Proposition 9). Minden $m, n \geq 2$-re az (A, B) $m \times n$-es bimátrix játék akkor és csak akkor stratégiailag ekvivalens egy zérus-összegű játékkal, ha a következő $2+m+n+mn$ változós lineáris egyenlőtlenségrendszernek van megoldása.

$$\begin{aligned} \rho A &= D + 1b^T \\ \sigma B &= -D + a1^T \\ \rho, \sigma &> 0. \end{aligned}$$

Továbbá, a $(D, -D)$ zérusösszegű játék stratégiailag ekvivalens (A, B)-vel.

Kannan and Theobald (2010) megadnak egy olyan speciális bimátrix játékosztályt, amelynél még könnyebb ellenőrizni, hogy egy bimátrix játék stratégiailag ekvivalens-e egy zérus-összegű játékkal és egyúttal könnyű egy ilyen zérusösszegű játékot meghatározni. Tekintsünk egy (A, B) $m \times n$-es bimátrix játékot, ahol

$$a_{ij} + b_{ij} = u_i + v_j \quad \text{minden } i, j\text{-re},$$

valamilyen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ konstansokra. Definiáljunk egy (A', B') zérusösszegű játékot a következőképpen

$$a'_{ij} = a_{ij} - v_j, \quad b'_{ij} = b_{ij} - u_i.$$

Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} xA'y^* - x^*A'y^* &= xAy^* - x^*Ay^*, \\ xB'y^* - x^*B'y^* &= xBy^* - x^*By^*. \end{aligned}$$

Ezért (A', B')-nek ugyanazok a NEP-jei, mint (A, B)-nek.

Ha (A, B) zérusösszegű, akkor az $A + B = 0$ mátrix rangja 0. Adódik a kérdés, hogy jelenthet-e valami előnyt algoritmikus szempontból, ha $rang(A+B) = k$ rögzített és k „kicsi". Az alacsony rang nem jelent könnyebbséget, ami a NEP-ek számát illeti. Még akkor is, ha $k = 1$, tetszőleges sok NEP-je lehet egy játéknak. Kannan and Theobald (2010) bebizonyították, hogy minden $d \geq 2$-re van olyan $d \times d$ nem-degenerált bimátrix játék, amelyre $k = 1$ és legalább $2d - 1$ NEP-je van. Igen figyelemre méltó azonban, hogy $k = 1$-re van olyan algoritmus (Adsul et al. 2011), amely meghatároz egy NEP-et polinomiális időben. Ez akkor is igaz, ha egy szimmetrikus játék egy szimmetrikus NEP-jét akarjuk meghatározni (Mehta et al. (2014). Ugyanakkor, ha $k \geq 3$, vagy a szimmetrikus esetben $k \geq 6$, akkor a probléma ugyanolyan ,,nehéz", mint az általános esetben, vagyis a PPAD komplexitási osztályba tartozik (Mehta 2014). Nem tudjuk, hogy mi a helyzet $k = 2$ (szimmetrikus játékoknál $2 \leq k \leq 5$) esetében.

Sokkal jobb a helyzet, ha a rang-korlátozást nem $A + B$-re, hanem A és/vagy B-re tesszük. Ebben az esetben az alacsony rangból következik a kisméretű támasz, amelyről tudjuk, hogy a teljes leszámlálást életképes (polinomiális idejű) módszerré teszi. Ebből a szempontból alapvető a következő tétel.

2. Tétel (Lipton et al. 2003, Theorem 4). Legyen (x^*, y^*) az (A, B) bimátrix játék egy NEP-je. Ha $rang(B) \leq k$, akkor a sorjátékosnak van olyan x kevert stratégiája, hogy $card(T(x)) \leq k + 1$ és (x, y^*) egy NEP. Hasonlóan, ha $rang(A) \leq k$, akkor az oszlopjátékosnak van olyan y kevert stratégiája, hogy $card(T(y)) \leq k + 1$ és (x^*, y) egy NEP. Továbbá, az (x, y^*) és (x^*, y) NEP-ekben a kifizetés egyenlő az (x^*, y^*)-ben kapott kifizetéssel mindkét játékos számára.

A 3. Karakterizációt is használhatjuk a bimátrix játékok olyan osztályainak kijelölésére, amelyek könnyen kezelhetők. A szimmetrikus esetet tekintjük. Ekkor a kvadratikus célfüggvény mátrixa a (6) feladatban az $A + A^T$ szimmetrikus mátrix. Ha ez a mátrix negatív szemidefinit, akkor ismert, lásd pl. (Kozlov et al. 1980), hogy a (6) feladat polinomiális időben megoldható. Nem kell azonban az $A + A^T$ mátrixnak feltétlenül negatív szemidefinitnek lennie. Elég, ha ,,majdnem " negatív definit (szemidefinit).

Egy A szimmetrikus mátrix *majdnem negatív definit (szemidefinit),* ha van olyan t konstans, hogy $A+t11^T$ negatív definit (szemidefinit). Közismert, hogy ha a kifizetőfüggvényekhez egy konstanst hozzáadunk, akkor a NEP-ek halmaza nem változik. A transzformált feladat már egy jól kezelhető (polinomiális időben megoldható) feladat. Nem nehéz olyan nem negatív definit mátrixot találni, amely egy konstans hozzáadásával negatív definitté válik. A majdnem negatív definit mátrixok jellemzésére egy egész fejezetet szánunk a következőkben.

Ugyancsak a 3. Karakterizáció alapján Kontogiannis és Spirakis (2012) a kölcsönös konkávitás fogalmának bevezetésével további speciális bimátrix játékosztályokat jelölnek ki, amelyek polinomiális időben oldhatóak meg.

Tudva azt, hogy a bimátrix játékok megoldása ,,nehéz" feladat, egyre nagyobb figyelem fordul a közelítő megoldások felé. Sokféleképpen definiálják a ,,közelítő" megoldást. Mi itt csak a legegyszerűbbel foglalkozunk.

1. Definíció (ϵ-NEP). Legyen $\epsilon > 0$. Az (x, y) stratégiapárost az (A, B) $m \times n$ bimátrix játék ϵ-NEP-jének nevezzük, ha $e_i^T Ay \leq x^T Ay + \epsilon$ fennáll minden $i = 1, \ldots, m$-re és $x^T Be_j \leq x^T By + \epsilon$ minden $j = 1, \ldots, n$-re.

Egy ϵ-NEP-ben egyik játékos sem tudja növelni ϵ-nál többel a várható kifizetését stratégiájának egyoldalú megváltoztatásával. A közelítő megoldások esetében a polinomiális időben való megoldhatóság azt jelenti, hogy a futási idő a legrosszabb esetben is a probléma bemenő adatai és $\frac{1}{\epsilon}$ bináris kódolásának polinomiális függvénye. Mivel az ϵ hibatag additív, ezért ha az algoritmusokat hatékonyságuk szerint össze akarjuk hasonlítani az A és B mátrixokat megfelelő konstansok hozzáadásával és pozitív skalárokkal való szorzással normalizálnunk kell. Az elfogadott standard a $[0,1]$ normalizálás, ami azt jelenti, hogy a mátrixok minden eleme a $[0,1]$ intervallumba esik, és van legalább egy elem, amelynek értéke 0, és legalább egy olyan, amelynek értéke 1. Természetesen figyelmen kívül hagyjuk azt az érdektelen esetet, amikor valamelyik mátrix minden eleme azonos.

A jelenleg ismert legjobb polinomiális algoritmus Tsaknakis and Spirakis (2008) nevéhez fűződik. A hibatag $\epsilon \approx 0,3393$. Ezt eddig még nem sikerült lejjebb szorítani. Az a sejtés, hogy $\frac{1}{3}$-nál lejjebb nem is lehet. Ha a sejtés igaz, akkor nincs is olyan algoritmus, amely polinomiális időben megtalálja egy tetszőleges bimátrix játék egy közelítő NEP-jét. Ha kevesebbel is megelégszünk, akkor azért tehetünk egy lépést az exponenciális futási idő csökkentése felé. Lipton at al. (2003) konstruáltak egy olyan szellemes algoritmust, amely szubexponenciális idő alatt meghatároz egy ϵ-NEP-et. Kulcsfogalom a „k-egyenletes kevert stratégia”.

2. Definíció. Az x kevert stratégiát k-egyenletesnek nevezzük a tiszta stratégiák egy k-elemű S multihalmazán (egyes stratégiák többször is szerepelhetnek S-ben), ha S minden eleme $\frac{1}{k}$ valószínűségű, x többi eleme pedig 0.

A fő eredmény (egy kicsit leegyszerűsített formában) a következő.

3. Tétel (Lipton at al. 2003). Minden $[0,1]$-normalizált $n \times n$-es bimátrix játékhoz és bármely $\epsilon > 0$ -hoz létezik egy k-egyenletes ϵ-NEP minden $k \geq \frac{12 \ln n}{\epsilon^2}$-re.

Ennek értelmében elég ellenőrizni az összes olyan támaszt, amelynek az elemszáma nem nagyobb, mint $\frac{12 \ln n}{\epsilon^2}$ egész része. Mivel polinomiális idő alatt eldönthető, hogy egy adott támaszhoz tartozik-e egy ϵ-NEP, ezért ez az algoritmus ún. kvázipolinomiális, vagyis a futási ideje $n^{O(\ln n)}$ nagyságrendű.

Ortiz és Irfan (2017) áttekintő cikke segít eligazodni a bimátrix játékok egy közelítő NEP-jét meghatározó algoritmusok között.

4 Majdnem negatív definit mátrixok

Legyen A n-rendű szimmetrikus mátrix és legyen

$$A(t) = A + t11^T,$$

ahol t egy valós paraméter.

3. Definíció. Az A mátrixot majdnem negatív definitnek nevezzük, (röviden: m.n.d.), ha van olyan valós szám, amelyre az $A(t)$ mátrix negatív definit.

Világos, hogy minden negatív definit mátrix m.n.d. (válasszuk a $t = 0$ paraméter értéket). Ugyanakkor könnyű találni olyan indefinit mátrixot, amely m.n.d.. Például az

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

mátrix indefinit, de az

$$A(-4) = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -9 & -14 \end{bmatrix}$$

mátrix negatív definit.

A következő állítás egyszerűen következik az $x^T A(t)x = x^T Ax + (1^T x)^2$ összefüggésből.

4. Tétel. Ha A m.n.d., akkor A negatív definit az $1^T x = 0$ altéren.

A Crouzeix-Chabrillac tétel a következőt állítja.

5. Tétel (Crouzeix-Chabrillac, 1984). Az A mátrix akkor és csak akkor negatív definit az $1^T x = 0$ altéren, ha

$$Iner \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1^T & 0 \end{bmatrix} = (n, 0, 1).$$

(A szegélyezett mátrixnak n negatív és 1 pozitív sajátértéke van)

Ha ezt a tételt esetünkre alkalmazzuk, akkor a majdnem negatív definitség egy szükséges feltételét kapjuk.

6. Tétel. Ha az A mátrix m.n.d., akkor

$$Iner \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1^T & 0 \end{bmatrix} = (n, 0, 1).$$

A következőkben az a célunk, hogy jól használható elégséges feltételt kapjunk. Ehhez szükségünk lesz az $A(t)$ mátrix és főminorjai determinánsának vizsgálatára. Jelölje a továbbiakban $A_k(t)$ az $A(t)$ első k sora és k oszlopa által meghatározott főminort. Közismert az alábbi tétel.

7. Tétel Az $A(t)$ mátrix akkor és csak akkor negatív definit, ha

$$(-1)^k \det(A_k(t)) > 0 \tag{9}$$

minden $k = 1, \ldots, n$ esetében.

8. Tétel. Tetszőleges A kvadratikus mátrixra fennáll a következő összefüggés:

$$\det(A(t)) = 1^T adj(A)1t + \det(A). \tag{10}$$

Bizonyítás. Az állítás azonnal adódik az általánosított mátrix-determináns lemmából (Theorem 2, Vrabel (2016)) □

9. Tétel. Tegyük fel, hogy az A szimmetrikus mátrix rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$1^T adj(A_k)1 = 0 \Longrightarrow (-1)^k \det(A_k) > 0.$$

Legyenek

$$T_+ = \max_{1^T adj(A_k)1>0} \{-\frac{\det(A_k)}{1^T adj(A_k)1}\}$$

és

$$T_- = \max_{1^T adj(A_k)1<0} \{-\frac{\det(A_k)}{1^T adj(A_k)1}\}.$$

Ha $T_+ < T_-$, akkor $A(t)$ minden $T_+ < t < T_-$ számra negatív definit, következésképpen A m.n.d.

Bizonyítás. A 7. Tétel szerint ahhoz, hogy $A(t)$ negatív definit legyen, szükséges és elégséges, hogy $(-1)^k \det(A_k(t)) > 0$ legyen minden $k = 1, \ldots, n$ esetében. Mivel A főminorjai is kvadratikus mátrixok, a (9) és (10) egyenlőtlenséget és egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy a

$$(-1)^k \det(A_k(t)) = (-1)^k \det(A_k) + (-1)^k 1^T adj(A_k)1t > 0$$

feltétel akkor és csak akkor teljesül minden $k = 1, \ldots, n$-re, ha $T_+ < t < T_-$. □

A 9. Tételben megfogalmazott elégséges feltétel teljesülését polinomiális időben ellenőrizni lehet.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az NKFI K-1 119930 projekt keretében készült. A kutatást – Komlósi Sándor részéről – az Innovációs és Technológiai Minisztérium Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. – A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában – tématerületi programja keretében.

Irodalom

1. Adsul B., Garg J., Mehta R. and Sohoni M. (2011) Rank-1 bimatrix games: A homeomorphism and a polynomial time algorithm. In *ACM Symposium on the Theory of Computing*, 195–204.
2. Chabrillac Y. and Crouzeix J.-P. (1984) Definiteness and semidefiniteness of quadratic forms revisited. *Linear Algebra Appl.* 63:283–292
3. Bárány I., Vempala S. and Vetta A. (2005) Nash equilibria in random games. In: *Proceedings of the 4th International Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'05),* 123–131
4. Forgó F. (2018) On symmetric bimatrix games. Corvinus Economics Working Papers-CEWP 2018/04.

5. Griesmer J. H., Hoffman A. J. and Robinson A. (1963) On symmetric bimatrix games. IBM Research Paper RC-959 IBM Corp. Thomas J. Watson Research Center Yorktown Heights New York.

6. Jurg A., Jansen M. J. M., Potters T. A. M. and Tijs S. H. (1992) A symmetrization for finite two-person games. *Methods and Models of Operations Research,* 6:111–123.

7. Kannan R. and Theobald T. (2010) Games of fixed rank: A hierarchy of bimatrix games. *Economic Theory,* 42:157–174

8. Kontogiannis S. C. and Spirakis P. G. (2012) On mutual concavity and strategically-zero-sum bimatrix games. *Theoretical Computer Science* 432:64–76

9. Kozlov M. K., Tarasov S. P. and Khachiyan L. G. (1980) The polynomial solvability of convex quadratic programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 20: 223–228

10. Lemke C. E. and Howson J. T. Jr. (1964) Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 12:413–423

11. Lipton R., Markakis E. and Mehta A. (2003) Playing large games using simple strategies. In: Proceedings of E-Commerce, 36–41

12. Mangasarian O. L. and Stone H. (1964) Two-person nonzero-sum games and quadratic programming. *Journal of Math. Anal. Appl.* 9:348–355

13. Mehta R. (2014) Constant rank bimatrix games are PPAD-hard. In: *ACM Symposium on the Theory of Computing,* 545–554

14. Mehta R., Vazirani V. V. and Yazdanbod S. (2014) Settling some open problems on 2-player symmetric Nash equilibria. Cornell University Library, arXiv:1412.0969v1

15. Moulin H. and Vial J.-P. (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. *International Journal of Game Theory,* 7:201–221

16. Nash J. F. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 36:48–49.

17. Ortiz L. E. and Irfan M. T. (2017) Tractable algorithms for approximate Nash equilibria in generalized graphical games with tree structure. In: *Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-17),* 635–641

18. Roughgarden T. (2016) *Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, Cambridge

19. Papadimitriou C. H. (1994) On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. *Journal of Computer and System Sciences,* 48:498–532

20. Savani R. and von Stengel B. (2004) Exponentially many steps for finding a Nash equilibrium in a bimatrix game. In: *Proceedings of the 45th FOCS.* pp. 258–267

21. Tsaknakis H. and Spirakis P. G. (2008) An optimization approach for approximate Nash equilibria. *Internet Mathematics,* 365–382.

22. Vrabel R. (2016) A note on the matrix determinant lemma. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 111:643–646.

ON FINDING A NASH EQUILIBRIUM POINT FOR BIMATRIX GAMES: SOME EASY-TO-TREAT SPECIAL CASES

We address the problem of numerically determining a Nash equilibrium of a bimatrix game. It is commonly known that this problem is very hard in general. Identifying easy-to-treat (solvable in polynomial time) special cases is of significance both theoretically and computationally. We first overview a few special cases and then define a new polynomially solvable subclass of bimatrix games. This class is defined via a slight generalization of negative definite matrices that we call „almost negative definite". A necessary and a sufficient condition is derived for the characterization of almost negative definite matrices.