

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

Simulace viskoelastického chování gumy vytištěné na 3D tiskárně

Simulation of Viscoelastic Behavior of 3D Printed Rubber

Student:

Bc. Lukáš Hertl

Osobní číslo

HER0113

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.

Ostrava 2020

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Lukáš Hertl**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Simulace viskoelastického chování gumy vytištěné na 3D tiskárně**
Simulation of Viscoelastic Behavior of 3D Printed Rubber

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

- 1) Provést rešeršní studii viskoelastických vlastností gumy a způsobů jejich zkoušení
- 2) Provést a vyhodnotit tahové a relaxační zkoušky gumy vytištěné na 3D tiskárně
- 3) Provést MKP simulaci těchto zkoušek a naladit vhodný konstitutivní model tak, aby dané zkoušky dokázal popsat
- 4) Zhodnotit vhodnost použitého konst. modelu s ohledem na kvalitu fitu
- 5) Zhodnotit omezení provedených zkoušek a navrhnout případné úpravy v metodice zkoušení

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Yi, J., Boyce, M.C., Lee, G.F., Balizer, E. (2006), "Large deformation rate-dependent stress-strain behavior of polyurea and polyurethanes", Polymer, Vol. 47 No. 1, pp. 319-329.
- [2] Qi, H.J. and Boyce, M.C. (2005), "Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethanes", Mechanics of Materials, Vol. 37. No. 8., pp. 817-839

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019

Datum odevzdání: 18.05.2020


doc. Ing. Martin Fušek, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomkou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 18.05.2020



.....

podpis studenta

Prohlašuji, že:

- jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen Autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo užít tuto závěrečnou diplomovou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3 Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této diplomovou práce bude uložen u vedoucího práce,
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše),
- beru na vědomí, že podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato diplomovou práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ústřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 18.05.2020



.....
podpis studenta

Poděkování

Rád bych tímto způsobem velice poděkoval svému vedoucímu diplomové práce panu doc. Ing. Stanislavu Polzerovi, Ph.D. za pomoc, připomínky, projevenou ochotu a odborné vedení při psaní této práce. Dále bych chtěl také poděkovat spolužákovi a kamarádovi Bc. Davidu Schwarzovi za pomoc během laboratorních měření. V neposlední řadě mnohokrát děkuji svým rodičům za jejich podporu.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

HERTL, L. *Simulace viskoelastického chování gumy vytištěné na 3D tiskárně*. Ostrava. Diplomová práce. VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2020, 66 s. Vedoucí práce: doc. Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.

Tato diplomová práce se zabývá nalezením vhodného konstitutivního modelu pro gumu vytištěnou na 3D tiskárně. Úvodní část práce je věnována problematice 3D tisku a přehledu dostupných technologií. Následující kapitoly jsou věnovány teoriím potřebným pro popis chování vytištěné gumy. Mezi tyto teorie patří konečné deformace, hyperelastická a viskoelastická. V praktické části byla nejprve provedena experimentální měření, konkrétně jednoosé tahové zkoušky a relaxační testy. Následně byl vybrán vhodný materiálový model, jedná se o kombinaci hyperelastického Yeohova modelu a viskoelastického modelu Pronyho řad. Po identifikaci materiálových parametrů modelu byly provedeny MKP simulace pro verifikaci, zda nalezený model dokáže popsat naměřené experimentální zkoušky.

ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS

HERTL, L. *Simulation of Viscoelastic Behavior of 3D Printed Rubber*. Ostrava, 2020. Master thesis. Ostrava VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2020, 66 p. Thesis head: doc. Ing. Stanislav Polzer, Ph.D.

The aim of this diploma thesis was to find a suitable constitutive model of 3D Printed Rubber. The introduction of the thesis is dedicated to the problematics of 3D printing and 3D printing technologies overview. In the next chapters, the theories needed for the description of rubber behaviour are discussed. These theories are Finite strain theory, Hyperelasticity and Viscoelasticity. In practical part, experimental measurements were performed (uniaxial tensile tests and relaxation tests). The constitutive model was found and parameters of the model were identified based on the tests. The constitutive model consists of the hyperelastic Yeoh model and the viscoelastic Prony series. At the end of the thesis, FEM simulations were performed to verify whether the found model is able to describe the behaviour of the material during the performed tests.

OBSAH

OBSAH	7
Seznam symbolů a zkratk	9
1. Úvod	11
2. 3D tisk	11
2.1. Využití technologie 3D tisku	11
2.2. Proces 3D tisku.....	12
2.3. Rozdělení technologií 3D tisku	13
2.3.1. Vat photopolymerization.....	14
2.3.2. Binder jetting.....	15
2.3.3. Powder bed fusion.....	15
2.3.4. Material extrusion	16
2.3.5. Directed energy deposition	17
2.3.6. Material jetting.....	17
2.3.7. Sheet lamination.....	18
2.4. 3D tisk vzorků pro experimentální část	19
3. Teorie konečných deformací	20
3.1. Tenzory deformace	20
3.1.1. Tensor deformačního gradientu	20
3.1.2. Cauchy-Greenův tenzor deformace.....	21
3.1.3. Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření.....	22
3.1.4. Almansiho tenzor konečných přetvoření.....	23
3.1.5. Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných přetvoření.....	23
3.2. Tenzory napětí	23
3.2.1. Cauchyho tenzor napětí.....	23
3.2.2. 1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí.....	24
3.2.3. 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí.....	24
3.3. Převody mezi tenzory	24
4. Hyperelastická	25
4.1. Model Neo-Hooke	25
4.2. Model Mooney-Rivlin	26
4.3. Model Yeoh	26
4.4. Další modely.....	26
5. Viskoelastická	27
5.1. Testování viskoelastických materiálů.....	27
5.1.1. Relaxační test	28
5.1.2. Creep test a Creep-recovery test.....	28
5.1.3. Dynamické zatěžování (Cyklické testy).....	29
5.2. Lineární viskoelastická.....	29
5.3. Základní reologické modely viskoelastického chování	30

5.3.1.	Maxwellův model.....	31
5.3.2.	Kelvin-Voigtův model	32
5.3.3.	Standard solid model.....	33
5.3.4.	Zobecněný Maxwellův model.....	34
6.	Viskoelasticita v ANSYSU	34
6.1.	Visko-Hyperelasticita	35
7.	Experimentální část	36
7.1.	Laboratorní měření	36
7.1.1.	Naměřené hysterezní smyčky jednoosých tahových zkoušek.....	38
7.1.2.	Naměřené relaxační křivky	39
7.2.	Volba konstitutivního modelu	40
7.2.1.	Hyperelastická část modelu.....	41
7.2.2.	Vliv složitosti viskoelastické části konst. modelu na kvalitu fitu	41
8.	Tvorba výpočetního modelu.....	43
8.1.	Geometrie a konečnoprvková síť.....	44
8.2.	Materiálová data	44
8.3.	Okrajové podmínky	44
8.3.1.	Tahové zkoušky	45
8.3.2.	Relaxační zkoušky	46
8.4.	Nastavení analýzy.....	47
8.4.1.	Konvergence časových kroků tahových zkoušek.....	47
8.4.2.	Konvergence časových kroků relaxačních zkoušek	49
8.4.3.	Souhrn nastavení analýz.....	50
8.5.	Výsledky simulací	50
8.5.1.	Výsledky pro materiálový model získaný fitem relax. křivek	51
9.	Diskuse	54
10.	Omezení práce	55
11.	Závěr	56
12.	Bibliografie	58
	Příloha I – Výsledky pro materiálový model získaný fitem hysterezních smyček	64

Seznam symbolů a zkratek

Seznam symbolů latinské abecedy

B	[–]	Levý Cauchy –Greenův tenzor deformace
C	[–]	Pravý Cauchy –Greenův tenzor deformace
C_{ij}	[–]	Složky pravého Cauchy–Greenova deformačního tenzoru
c_{ij}	[Pa]	Materiálová konstanta hyperelastických modelů
d	[Pa ⁻¹]	Parametr stlačitelnosti materiálu
$D_{\varepsilon_{ij}}$	[–]	Deviátor tenzoru přetvoření
dF_{0i}	[N]	Korigovaná elementární síla
dF_i	[N]	Elementární síla
E	[–]	Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření
e	[–]	Almansiho tenzor konečných přetvoření
e	[–]	Poměrná změna objemu
E_{ij}	[–]	Složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření
e_{ij}	[–]	Složky Almansiho tenzoru konečných přetvoření
E_{ij}^C	[–]	Složky Cauchyho (logaritmického) tenzoru konečných přetvoření
F	[–]	Tenzor deformačního gradientu
F_{ij}	[–]	Složky tenzoru deformačního gradientu
G	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku
G_0	[Pa]	Relaxační modul okamžitého zatížení
G_∞	[Pa]	Rovnovážný relaxační modul
I	[–]	Jednotková matice
\bar{I}_1, \bar{I}_2	[–]	Modifikované invarianty Cauchy–Greenova tenzoru
I_1, I_2, I_3	[–]	Invarianty Cauchy –Greenova tenzoru přetvoření
$J = I_3^F$	[–]	Jakobián, třetí invariant tenzoru deformačního gradientu
K	[Pa]	Objemový modul pružnosti
l_0	[mm]	Délka vzorků po upnutí v čelistech
n	[–]	Materiálové konstanta – celočíselný počet členů
P_i	[Pa]	Složky 1. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
R	[–]	Ortogonálním tenzorem rotace
S_i	[Pa]	Složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
t	[–]	Čas
t_c	[s]	Retardační čas
t_R	[s]	Relaxační čas
U	[–]	Pravým tenzorem protažení (right stretch tensor)
V	[–]	Levým tenzorem protažení (left stretch tensor)
v_{EXP}, v_{MKP}	[mm · min ⁻¹]	Rychlosti posunu příčnicku
W	[Jm ⁻³]	Funkce měrné energie
x_i	[m]	Souřadnice deformované geometrie
X_i	[m]	Souřadnice nedeformované geometrie

Seznam symbolů řecké abecedy

α_i^G, α_i^K	[–]	I-té poměrné moduly tvarové a objemové části v Pronyho rozvoji
δ_{ij}	[–]	Kroneckerovo delta
$\dot{\varepsilon}_{TAH}$	[s ⁻¹]	Poměrná rychlost zatěžování (strain rate)
$\dot{\varepsilon}_v$	[s ⁻¹]	Rychlost deformace viskózního článku
ε_0	[–]	Konstantní přetvoření během zkoušky
ε_e	[–]	Deformace elastického článku

η	[Pa · s]	Dynamická viskozita
κ	[Pa · s]	Objemová viskozita
λ_{ii}	[-]	Poměrné protažení (stretch)
σ_0	[Pa]	Konstancí napětí během zkoušky
σ_e	[MPa]	Napětí elastického článku
σ_i	[Pa]	Složky Cauchyho tenzoru (skutečných) napětí
σ_{t0}	[Pa]	Počáteční napětí v čase $t = 0$
$\sigma_{t\infty}$	[Pa]	Napětí v čase $t = \infty$
σ_v	[MPa]	Napětí viskózního článku
τ_i^G, τ_i^K	[s]	I-té relaxační časy tvarové a objemové části v Pronyho rozvoji

Seznam použitých zkratk

AD	Additive manufacturing, aditivní výroba
DDM	Direct Digital Manufacturing, výroba finálních součástí
3DCP	3D concrete printing, technologie tisku betonu
CAD	Computer aided desing
STL	Stereolithography, nativní formát souborů pro 3D tisk
AMF	Additive manufacturing file, novější formát souborů pro 3D tisk
SLA	Stereolithography
DLP	Direct Light Processing
CLIP	Continuous liquid interface production
cDLP	Continuous Digital Light processing
BJ	Binder jetting
PBF	Powder bed fusion
SLS	Selective laser sintering
DMLS	Direct Metal Laser Sintering
SLM	Selective Laser Melting
EBM	Electron Beam Melting
MJF	Multi Jet Fusion
HP	Firma Hewlett-Packard
FDM	Fused Deposition Modeling
PLA	Polylaktická kyselina, termoplastický polymer
ABS	Akrylonitril butadien styren, termoplastický polymer
PJP	Plastic Jet Printing
FFM	Fused Filament Modelling
MEM	Melted and Extruded Modelling
FFF	Fused Filament Fabrication
DED	Directed energy deposition
LENS	Laser Engineered Net Shape
EBAM	Electron Beam Additive Manufacture
MJ	Material Jetting
NPJ	Nano Particle jetting
SL	Sheet Lamination
LOM	Laminated object manufacturing
UAM	Ultrasonic additive manufacturing
LFS	Low Force Stereolithography

1. Úvod

V dnešní době musí každá součást splňovat určitá požadovaná kritéria. Tato kritéria jsou dána mezinárodními normami nebo interními předpisy výrobců. Zda součást splňuje daná kritéria, nebo jim nevyhoví, je ověřováno pomocí fyzických zkoušek prototypů. Testování fyzických prototypů by se však mělo omezit na testování finálního optimalizovaného prototypu, jelikož používání fyzických prototypů během fáze optimalizace parametrů je finančně nákladné, zejména pokud testy vyžadují poškození či zničení prototypu. Proto s rozvojem výpočetní techniky v posledních desítkách let byla tato prvotní ověřování prototypů a optimalizace v mnoha firmách nahrazeny numerickými simulacemi. To však klade specifické nároky na přesnost a správnost výsledků těchto simulací. Jedním z faktorů ovlivňujících kvalitu výsledků je kvalita a množství vstupních materiálových dat, které definují napěťově-deformační chování. Pro tvorbu materiálového modelu je klíčová znalost těchto mechanických vlastností simulovaného materiálu. V současné době často nastává situace, že materiálová data potřebná pro simulaci nelze od výrobců materiálu získat nebo nemají dostatečnou vypovídající hodnotu. V tomto případě je nutná experimentální identifikace materiálových vlastností. To je i případ materiálu zkoumaného v této práci, kdy výrobce uvádí pouze mez pevnosti v tahu, protažení při přetržení, strukturální pevnost a tvrdost. Proto bylo přistoupeno k experimentální identifikaci materiálových vlastností a byly stanoveny cíle, kterých má být v této práci dosaženo. Cíle jsou následující:

1. Seznámit se s konstitutivními modely viskoelastických vlastností gumy a způsobů jejich zkoušení
2. Provést a vyhodnotit tahové a relaxační zkoušky gumy vytištěné na 3D tiskárně, nalézt vhodný konstitutivní model a provést identifikaci parametrů na základě provedených zkoušek
3. Provést MKP simulaci a zjistit, zda nalezený konstitutivní model dokáže provedené zkoušky popsat
4. Zhodnotit omezení provedených zkoušek a navrhnout případné úpravy v metodice zkoušení

2. 3D tisk

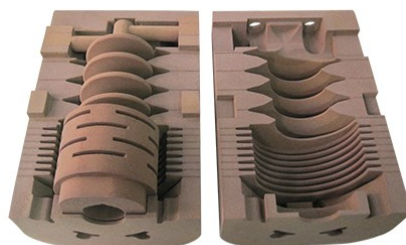
V této kapitole rozeberu, co to je 3D tisk, kde se v současnosti tento tisk užívá, jaké jsou v dnešní době dostupné metody/technologie tohoto tisku a zaměřím se na jejich krátký popis. Co to vlastně 3D tisk je? Jedná se o výrobní technologii, při které je digitální model zhmotněn postupným přidáváním materiálu, vrstvou po vrstvě. Z tohoto důvodu je tato technologie také nazývána často jako aditivní výroba (additive manufacturing, AD) [1]. Materiál je nanášen pouze do potřebných míst a vzniká tak jen nepatrné množství odpadního materiálu, na rozdíl od subtraktivních metod: U těch dochází k postupnému odebrání přebytečného materiálu z polotovaru, jako tomu je například u CNC obrábění. [2]

2.1. Využití technologie 3D tisku

Využití 3D tisku v dnešní době stále spadá převážně do komerční a akademické sféry. Je doménou průmyslových firem, kde se používá především v oblasti vývoje prototypů (Rapid Prototyping), a to proto, že umožňuje vyrobit v řádech hodin koncepční modely pro zhmotnění

navrhovaného designu součástí nebo funkční modely sloužící k ověření rozměrů, funkčnosti a tvaru součástí před spuštěním sériové výroby. S rozvojem tiskáren a zlepšujícími se mechanickými vlastnostmi tištěných modelů se začíná 3D tisk prosazovat v průmyslu kromě vývoje také při výrobě finálních výrobků tzv. DDM (Direct Digital Manufacturing) a to zejména tvarově složitých dílů, které je obtížné nebo nemožné vyrobit za pomoci tradičních výrobních technologií. [2]

Zajímavou aplikací 3D tisku v průmyslu je kromě výroby samotného modelu i jeho využití při výrobě odléváním. Tiskem buď vznikne přímo odlévací forma z písku [4] nebo se vytiskne voskový model odlévané součásti, který je následně zaformován. Druhá zmíněná možnost se začíná rozšiřovat ve zlatnictví při výrobě šperků na zakázku (prsteny, přívěsky). [5]



Obr. 1 – Odlévací písková forma vytištěná tiskárnou EP-C5050 [3]

Kromě průmyslu 3D tisk pronikl také do dalších odvětví, například do zdravotnictví, kde se v současnosti používá při výrobě lékařských implantátů, zdravotnických pomůcek a fixátorů na míru (např. náhrada sádry). V současnosti také probíhá vývoj tisku lidských tkání. Již se podařilo vytisknout umělou čelist a lidské ucho. V budoucnu se počítá s tiskem celého orgánu, který by byl vytištěn z kmenových buněk. Tyto vytištěné orgány by našly uplatnění při transplantacích. [7] Dalším odvětvím je stavebnictví, kde se vyvíjí technologie 3DCP (3D concrete printing) a experimentuje se s tiskem různých architektonických prvků jako jsou zdi, nosníky a sloupy. V budoucnu se počítá s kompletním tiskem velkých betonových struktur. [8]



Obr. 2 – Na míru vytištěný exoskelet CORTEX pro fixaci zlomené kosti [6]

2.2. Proces 3D tisku

Výroba součástí 3D tiskem se netýká pouze samotného tisku ale i činností s tiskem spojených. Celý proces výroby se dá rozdělit do tří fází – první je **pre-processing**, který je nejdůležitější fází. Následuje samotný **tisk** součástí pomocí některé technologie uvedené v podkapitole 2.3 a na konci je **post-processing** vytištěné součásti. [1]

Ve fázi pre-processingu je prvním krokem získání digitálního modelu tištěné součásti. Model je možné vytvořit postupným vymodelováním pomocí CAD softwaru. Při výrobě klonu nebo náhradní součásti je dnes další možností získání modelu 3D skenování již vyrobené součásti. Druhým krokem je převedení získaného CAD modelu na formát STL nebo AMF. Po převedení na jeden z těchto formátů je třeba zkontrolovat a případně opravit chyby na geometrii vzniklé převodem. Jakmile je soubor připraven, je exportován do tzv **sliceru**. [1] Jedná se o software, jehož primární funkcí je



Obr. 3 – Vytištěná pneumatika s podporami kvůli vhodné orientaci při tisku [9]

schopnost „rozřezat“ celý model na jednotlivé horizontální vrstvy a vytvořit sadu tiskových instrukcí pro 3D tiskárnu. Kromě toho obsahuje slicer i nástroje pro nastavení dalších důležitých parametrů pro tisk. Prvním z nich je nástroj pro **přidání podpurných struktur** k 3D modelu. Ty jsou třeba v případě tisku tvarově složitých součástí s přesahy. V tomto případě by bez přepadání podpor došlo vlivem vlastní tíhy k deformaci/poklesu převislých částí. Podpory jsou také potřeba pokud je nutné zvolit výhodnou orientaci modelu vůči základové platformě při tisku. Důvodem může být dosažení mechanických vlastností v požadovaném směru nebo aby došlo k minimalizaci pohledových či vnitřních funkčních ploch, ze kterých je po tisku třeba podpory odstranit a tyto plochy následně zaštitit. Dalším nástrojem je nastavení výplně modelu neboli **infill**, pokud to finální použití součásti dovoluje (například koncepční modely). Tento nástroj dokáže plný objem modelu převést na dutý, kdy uvnitř vytvoří podpurnou strukturu např. ve tvaru včelích pláství (honeycomb). Dojde tak ke snížení času potřebného pro tisk a úspoře tiskového materiálu. [10]

Následuje fáze samotného tisku, kdy po nastavení všech potřebných parametrů slicer vygeneruje sadu tiskových instrukcí například ve formě G-kódu. Ten je možné importovat do tiskárny a součást poté vytisknout. [1]

Poslední fází ve výrobním procesu součásti je post-processing po dokončení tisku součásti. Ten se liší podle použité 3D technologie a podle kladených požadavků na kvalitu finálního výrobku. Velmi častou dokončovací operací je odstranění podpor, které přidal slicer. U součástí vytištěných z kovů se pak často provádějí povrchové úpravy ke zlepšení mechanických vlastností. [1]

2.3. Rozdělení technologií 3D tisku

S postupným vývojem technologie 3D tisku docházelo a dochází k patentování a podávání ochranných známek jednotlivými společnostmi, jež jednotlivé tiskárny vyvíjí a vyrábí. Těch je na trhu nespočet a z právních důvodů (patenty) i z důvodu marketingu tyto společnosti často používají různé názvy, které častokrát označují stejné aditivní technologie. [2]

Pro orientaci mezi jednotlivými technologiemi je proto lepší zavést rozdělení. Jednotlivé technologie lze klasifikovat z různých úhlů pohledu. Oblíbeným přístupem je rozdělení do 7 kategorií podle principu, jakým procesem dochází k tisku součásti. Těchto 7 kategorií definuje mezinárodní norma ISO/ASTM 52900:2015 a to – Vat photopolymerization, Material jetting, Binder jetting, Powder bed fusion, Material extrusion, Directed energy deposition, Sheet lamination (výčet uvádím v anglickém jazyce, jelikož české technické ekvivalenty nejsou zatím ustáleny). Mimo jiné tato norma také definuje i základní pojmy týkající se oblasti aditivní výroby. [11] Další možností klasifikace technologií tisku je podle toho, v jaké formě materiál vstupuje do procesu 3D tisku – tekutina, prášek, pevná látka a případně plyn. [12]. Odlišný způsob rozdělení, který také stojí za zmínku, byl poprvé popsán v publikaci [13] a jedná se o rozdělení na základě rozměru nejnověji vznikající části při tisku. Některé technologie, zejména ty starší, se při tisku soustředí do jednoho místa/bodu (1D) a proto je pro vytvoření každé nové vrstvy třeba absolvovat trasu po předem dané křivce (= point to point). Pro urychlení tisku byl u některých technologií navýšen počet bodů a to tak, že se zvýšil počet trysek na tiskové hlavě. Ty jsou často zarovnané v řadě, takže při tisku nové vrstvy je materiál nanášen v linii průjezdem tiskové hlavy. Novější a modernější technologie jsou již schopné vytisknout celou novou vrstvu modelu najednou (2D = plane). V době publikace tohoto

rozdělení šlo pouze o tyto rozměry. Technologie schopná tisku celého objemu současně (3D = volume), bez potřeby rozdělení na jednotlivé vrstvy, je teprve ve vývoji [14].

Následující uvedený přehled technologií 3D tisku je rozdělen podle zmíněné normy ISO/ASTM 52900:2015.

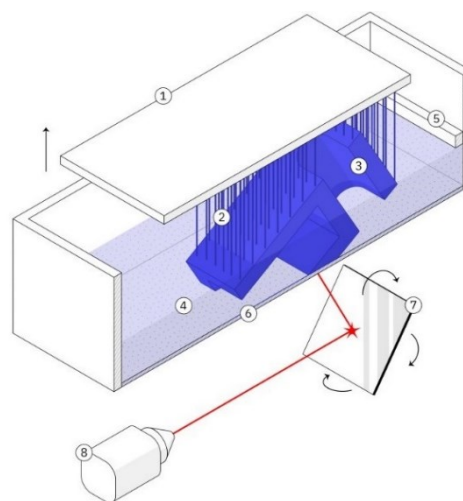
2.3.1. Vat photopolymerization

Vat photopolymerization, česky fotopolymerizace, je aditivní metoda, při které je kapalný fotopolymer v nádrži (nejčastěji pryskyřice) vystaven kontrolovanému UV zdroji a dochází tak k chemické reakci, při níž fotopolymer tuhne a mění své skupenství na pevné. [16]

Do této skupiny patří technologie **SLA** (Stereolithography). Jedná se o historicky první technologii 3D tisku. Zdrojem UV světla je laser, který je pomocí polohovatelného zrcadla směřován do jednoho místa, kde je třeba fotopolymer vytvrdit. Jedná se tedy o bodovou technologii. Tato technologie byla použita pro tisk laboratorních vzorků této diplomové práce. Druhou modernější technologií je **DLP** (Direct Light Processing), kde je zdrojem UV světla projektor a dochází k ozáření a vytvrzení celé vrstvy najednou. [16] Jedná se o 2D technologii. Poslední, nejnovější a nejmodernější technologií této skupiny je **CLIP** (Continuous liquid interface production), kde je zdrojem UV světla opět projektor. Nádoba s fotopolymerem ale navíc obsahuje v místě působení UV světla membránu propouštějící kyslík. Vzniká tak tenká vrstva nevytvrzeného fotopolymeru mezi již vytvrzeným fotopolymerem a membránou. Tato vrstvička obsahuje kyslík a označuje se jako tzv. dead zone. Díky této zóně může docházet ke kontinuální fotopolymerizaci a model je při tisku plynule vytahován. Jedná se tedy o nejrychlejší metodu tisku z metod zmíněných v této kategorii. [17] Můžeme se setkat ještě s označením **cDLP** (Continuous Digital Light processing), kdy jako u CLIP rovněž dochází ke kontinuálnímu tisku, jen se jedná o technologii jiného výrobce.

Existují dvě varianty konstrukčního řešení tiskáren využívající fotopolymerizaci. Prvním je tzv. top-down přístup, kdy po vytvrzení tištěné vrstvy dochází k poklesu platformy a model se tedy v průběhu tisku postupně ponořuje. Druhým je tzv. bottom-up přístup, tedy tištěný model visí obráceně a při tisku je z tekutého fotopolymeru postupně vytahován. [18]

Všechny zmíněné technologie se vyznačují velmi dobrou kvalitou tištěných detailů a povrchu modelu. Pro první dvě technologie je nevýhodou nutnost podpor z důvodu vhodné orientace modelu při tisku a následné odstranění těchto podpor po tisku. [18] Společnou nevýhodou všech tří technologií je křehkost vytištěných dílů, ovšem pevnost je možné částečně zvýšit dodatečným vytvrzením modelu v UV peci. [16] [17]

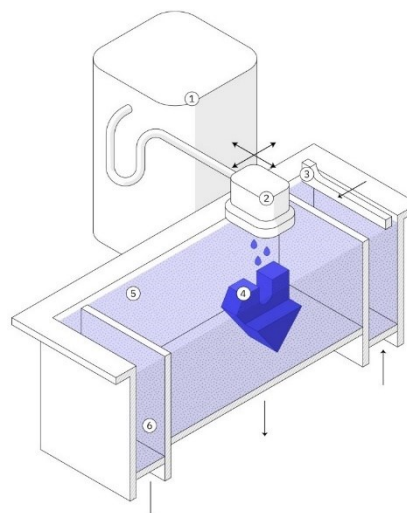


1. Platforma (pohyb v ose Z)
2. Vytištěné podpory
3. Tištěný model (již vytvrzený fotopolymer)
4. Nádoba s tekutým fotopolymerem
5. Recoater
6. Průhledné rozhraní
7. Polohovatelné zrcadlo pro směrování paprsku (souřadnice X-Y)
8. UV laser

Obr. 4 – Tiskárna SLA v konfiguraci bottom-up [15]

2.3.2. Binder jetting

Binder jetting (**BJ**), česky tryskání pojiva, je aditivní metoda a také technologie využívající pro tisk práškové materiály (keramické, kovové, písek), které jsou repetitivně celoplošně nanášeny na platformu, kde jsou následně dle potřeby selektivně spojeny pomocí kapalného pojiva nanášeného pohyblivou tiskovou hlavou. Ta často obsahuje více než jednu trysku a pojivo je nanášeno do více míst současně. Díky přítomnosti práškového materiálu v celém prostoru platformy není třeba tisknutí podpor modelu, jelikož prášek bez pojiva nanesený na pracovní plochu zastává tuto funkci. Dále je možné v průběhu tisku nanášet pojivo různých barev, tudíž je možné tisknout vícebarevné modely. Další výhodou BJ je možnost tisku velkých modelů, rychlost tisku a oproti jiným aditivním technologiím nízká cena: Nevýhodou BJ jsou horší mechanické vlastnosti, z důvodu pouhého slepení zrn práškového materiálu. [19] Tato technologie se využívá například pro tisk pískových odlévacích forem zmíněných v úvodu této kapitoly. [4]



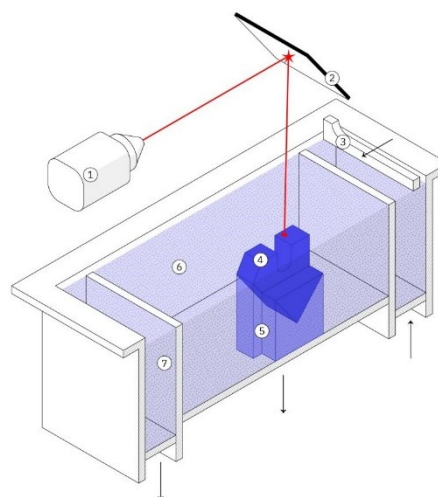
1. Zásobník s pojivem
2. Inkjet tisková hlava (pohyb v osách X-Y)
3. Recoater pro nanášení nové vrstvy prášku (nad zásobníkem s práškem)
4. Tištěný model
5. Pracovní prostor tiskárny (pohyb v ose Z)
6. Zásobník pro přebytečný prášek

Obr. 5 – Schéma BJ tiskárny [15]

2.3.3. Powder bed fusion

Powder bed fusion (**PBF**), česky spékání práškové vrstvy, jsou technologie, kdy jako v případě BJ dochází k opakovanému celoplošnému nanášení práškového materiálu na pracovní plochu, ale místo využití pojiva dochází k selektivnímu spékání prášků pomocí tepelné energie, kdy zdrojem je zpravidla laser, případně elektronový paprsek. [20]

Mezi PBF se řadí technologie **SLS** (Selective laser sintering). Ta se používá pro tisk z nekovových prášků. Další je **DMLS** (Direct Metal Laser Sintering), která se používá pouze pro kovové prášky. U obou těchto metod dochází laserem k zahřátí práškového materiálu na teplotu blízkou jeho bodu tání, a tedy pouze k jeho spečení. Technologie **SLM** (Selective Laser Melting) využívá také laser, ale výkonnější. Dochází tedy k zahřátí prášku na mnohem vyšší teplotu, a tedy tavení materiálu. Výsledkem je lepší a silnější spojení práškových částic. [20] Poslední technologií je **EBM** (Electron Beam



1. Laser
2. Polohovatelné zrcadlo pro směrování paprsku (pohyb v osách X-Y)
3. Recoater pro nanášení nové vrstvy prášku (nad zásobníkem s práškem)
4. Tištěný model
5. Vytiskované podpory
6. Pracovní prostor tiskárny
7. Zásobník pro přebytečný prášek

Obr. 6 – Schéma SLS tiskárny [15]

Melting), ovšem namísto laseru je použit elektronový paprsek. Opět jako u SLM dochází k tavení prášku, nevýhodou EBM oproti SLM je ale omezený počet použitelných kovových prášků. [21] Všechny zmíněné technologie jsou 1D – bodové.

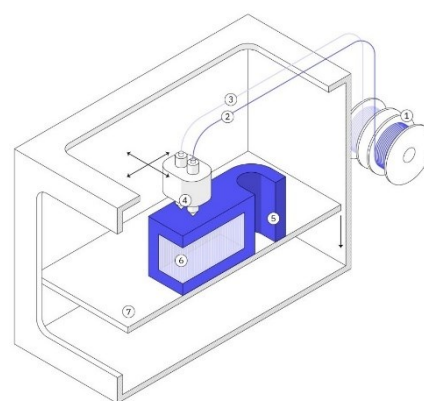
V případě použití nekovových prášků není opět nutný tisk podpor, jelikož nespečený prášek zastává tuto funkci. Pokud je použit prášek kovový, je tisk podpor nutný částečně, a to kvůli teplotní dilataci a odvodu tepla. Nevýhodou PBF metod je energetická náročnost, dále také pórovitost modelů, a tedy vyšší náchylnost na korozi povrchu. Z tohoto důvodu jsou nutné jeho dodatečné úpravy jako leštění. Také je možný výskyt sraženin a tepelná dilatace během tisku. Výhodou jsou velice dobré mechanické vlastnosti tištěných modelů jako je vysoká pevnost a tuhost. [20] [21]

Za zmínku stojí také technologie **MJF** (Multi Jet Fusion) firmy HP (Hewlett-Packard). Jedná se o kombinaci technologie PBF s technologií BJ. Do pracovního prostoru tiskárny je celoplošně nanášena vrstva prášku a následně je na něj průjezdem tiskové hlavy selektivně nanášeno pojivo mnoha tryskami. Současně s pojivem je přitom také nanášeno činidlo do oblastí kolem obvodu vnějších kontur dílu. To zajišťuje vysoké rozlišení povrchových detailů a kvalitu povrchu. Ke spojení prášku a pojiva je poté použita tepelná energie. Při tisku nejsou použity podpory. Pracovní prostor je navržen jako výměnný modul a po dokončení tisku je modul přesunut z tiskárny jako celek do post-processing jednotky, která modul ochladí a součástky očistí od přebytečného práškového materiálu, který lze použít k dalšímu tisku. Tisk jedné vrstvy dle výrobce trvá 10 vteřin bez ohledu na složitost geometrie. Proto tato technologie může svou rychlostí a kvalitou tisku konkurovat jiným konvenčním výrobním technologiím plastových dílů. Tyto tiskárny používají jako materiál silný termoplast PA12, další termoplasty s jinými vlastnostmi (čirost, flexibilita) jsou na cestě. [22] V době psaní této práce byly tyto tiskárny použity k tisku ochranných pomůcek v boji proti COVID-19. [23]

2.3.4. Material extrusion

Material extrusion, česky vytlačování materiálu, je jednou z nejrozšířenějších a nejprodávanějších aditivních technologií. Jak název napovídá při tisku dochází vytlačování materiálu z trysky na tiskové hlavě. Zástupcem této skupiny je **FDM** (Fused Deposition Modeling). Jedná se technologii, kterou si běžný člověk vybaví, pokud se zmíní 3D tisk, jelikož se jedná o technologii používanou u domácích 3D tiskáren. [24]

Při tisku dochází k protlačování materiálu, jenž je podáván ve formě vlákna (filamentu), skrz tavicí trysku nacházející se na tiskové hlavě. Tato AD vyžaduje při tisku použití podpor, pokud má geometrie modelu větší převisy. Dražší tiskárny mají 2 trysky – první pro tisk hlavního materiálu a druhou pro tisk podpůrných struktur z rozdílného materiálu, který lze snadněji odstranit například rozpuštěním ve vodě. Levnější tiskárny mají trysku pouze jednu, kdy podpory jsou tištěny z hlavního materiálu a tyto podpory je poté nutné odstranit mechanicky. Tisková hlava je pohyblivá zpravidla ve dvou, případně až třech osách.



1. Cívky s filamentem
2. Filament pro tisk modelu
3. Filament pro tisk podpůrných struktur při tisku součásti
4. Extrudér (pohyb v osách X-Y)
5. Tištěný model
6. Vytištěná podpora
7. Vyhřívaná podložka (pohyb v ose Z)

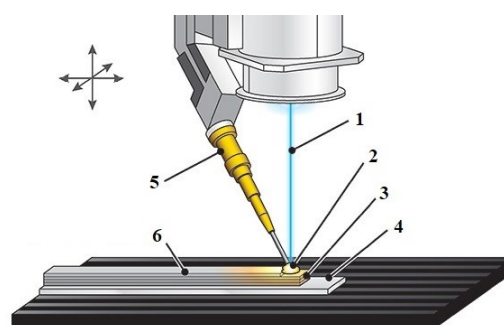
Obr. 7 – Schéma FDM tiskárny [15]

Pohybem tiskové hlavy dochází k nanášení roztaveného materiálu tryskou na konkrétní místa pracovní plochy. Nevýhodou této technologie jsou mechanické vlastnosti vytištěného modelu závislé na materiálové orientaci, která vznikla v průběhu tisku pohybem tiskové hlavy. Výhodou této technologie je cenová dostupnost i pro domácí uživatele. [24] Dále možnost použití velké škály materiálů od běžných termoplastických polymerů jako PLA, ABS přes termoplastické elastomery až po různé kompozity, kdy základ tvoří PLA, do kterého je přidána příměs jiného materiálu (dřevo, kovy) v podobě vláken nebo prášku. Dnes jsou běžně dostupné kompozity označené jako woodfill, copperfill, bronzefill a karbonové nebo aramidové kompozity. [25]

Zejména u této technologie se díky mnoha různým výrobcům můžeme setkat s označením této technologie jako **PJP** (Plastic Jet Printing), **FFM** (Fused Filament Modelling), **MEM** (Melted and Extruded Modelling) a **FFF** (Fused Filament Fabrication). [2]

2.3.5. Directed energy deposition

Directed energy deposition (**DED**), česky přímé energetické nanášení, je technologie pro kovové materiály podobná Material extrusion. Tisková hlava obsahuje trysku s přívodem materiálu v podobě kovového prášku nebo drátu a zdroj tepelné energie. Ten se liší použitou technologií, v případě technologie **LENS** (Laser Engineered Net Shape) se jedná o výkonný laser, v případě technologie **EBAM** (Electron Beam Additive Manufacture) je použit elektronový paprsek. Tisková hlava je umístěna na robotický manipulátor, který je obvykle schopný pohybu ve čtyřech až pěti osách. Materiál je přiváděn rovnou do laseru nebo elektronového paprsku, kde je roztaven a nanesen na požadované místo. Celý proces, tedy nanášení a tavení materiálu, probíhá současně přímo pod tiskovou hlavou. Tyto AD technologie jsou vhodné pro kovotisk, a to zejména pro opravy součástí nebo nanesení dodatečné geometrie na již vyrobené kovové součásti různých tvarů, jelikož tisková hlava je umístěna na víceosém robotickém rameni, takže tisk materiálu není limitován pouze na jednotlivé horizontální vrstvy jako u jiných technologií. Nevýhodou jsou nutné dokončovací operace povrchu pro dosažení přesně požadovaných rozměrů a kvality, protože vytištěné povrchy jsou drsné, hrubé a pórovité. [21] [27]



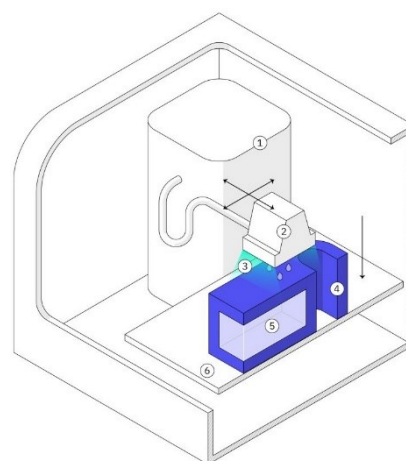
1. Elektronový paprsek
2. Roztavený nově nanesený materiál
3. Předchozí nanesené vrstvy
4. Podloží
5. Podavač materiálu ve formě drátu
6. Již vytištěné vychladlé vrstvy

Obr. 8 – Schéma technologie EBAM firmy Sciaky (upraveno) [26]

2.3.6. Material jetting

Material Jetting (**MJ**), česky nanášení tryskáním, je aditivní technologie, kdy dochází k selektivnímu nanášení jedné vrstvy materiálu v kapalném stavu pomocí více tiskových hlav na pracovní plochu a k jeho následnému vytvrzení nebo spojení. [11]

Prvním zástupcem je technologie **PolyJet**, kdy je selektivně nanášen kapalným fotopolymerem pomocí tiskové hlavy na tiskovou platformu pouze na místa, kde je potřeba. Během tisku je čerstvě nanášený fotopolymer vytvrzen UV lampami, které se zpravidla nachází na obou stranách tiskové hlavy. Pokud tiskárna obsahuje více trysek je možné nanášet více druhů materiálu a barev. [28] Další zástupce je **NPJ** (Nano Particle jetting), technologie firmy Xjet. Funguje tak, že tiskové hlavy průjezdem selektivně nanáší roztok kovových nanočástic rozpuštěných v kapalině. Tisíce kapek tohoto roztoku je tedy nanášeno do potřebných míst v ultra tenké vrstvě, aby bylo docíleno rovnoměrného rozptýlení částic. Současně s roztokem nanočástic jsou také nanášeny nanočástice pro tisk podpůrných struktur. Pracovní prostor tiskárny je vyhřátý až na teplotu 300 °C, proto dojde po nanášení tiskovou hlavou k okamžitému odpaření kapaliny z roztoku a ucelení nanočástic. Vytisknutou součást je poté ještě třeba zbavit podpůrného materiálu a podrobit finálnímu termálnímu spékání. Kromě možnosti tisku pomocí kovových nanočástic byla také nedávno představena verze pro tisk s keramickými nanočásticemi. [29]

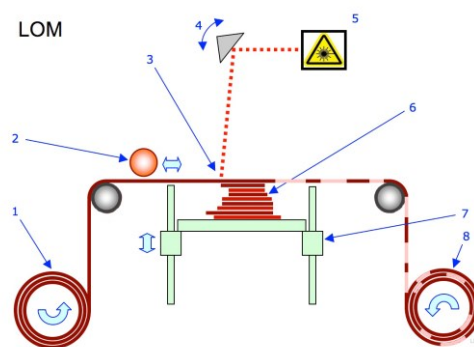


1. Zásobník s fotopolymerem
2. Inkjet tisková hlava (pohyb v osách X-Y)
3. Zdroj UV světla pro vytvrzení
4. Tištěný model
5. Vytisknutá podpora
6. Platforma (pohyb v ose Z)

Obr. 9 – Schéma MJ tiskárny [15]

2.3.7. Sheet lamination

Poslední skupinou aditivních technologií je Sheet Lamination (SL). Při tisku se využívá papírových, plastových nebo kovových fólií, kdy dochází k postupnému vrstvení této fólie. Nejprve dojde ke svaření nebo slepení vrstev a poté je následně vyřezán obrys příslušné vrstvy modelu laserem nebo nožem. Opakováním tohoto postupu vznikne požadovaný tvar tištěného modelu. Pokud dochází k vrstvení papíru nebo plastové fólie jedná se o **LOM** (Laminated object manufacturing), v případě kovových fólií jde o technologii **UAM** (Ultrasonic additive manufacturing). Nevýhodou obou těchto metod je velké množství odpadního materiálu (odřezků) vznikajícího po tisku každé vrstvy. Také se projevuje časová náročnost odstraňování odřezků, proto se nehodí pro tisk tvarově složitých součástí [31]



1. Role s fólií pro tisk
2. Vyhřívavý válec určený ke spékání vrstev
3. Laserový paprsek pro ořezání obrysu
4. Polohovatelné zrcadlo pro směrování laserového paprsku
5. Zdroj laserového paprsku
6. Již ořezané, spečené vrstvy
7. Platforma (pohyb v ose Z)
8. Role pro namotání přebytečné fólie

Obr. 10 – Schéma LOM tiskárny [30]

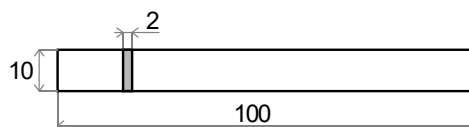
2.4. 3D tisk vzorků pro experimentální část

Pro tisk laboratorních vzorků pro tuto diplomovou práci byl použit model 3D tiskárny **Form 3** společnosti **Formlabs**. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.3.1, tato tiskárna funguje na principu technologie SLA (Stereolithography). Model tiskárny Form 3 má konstrukční řešení s bottom-up přístupem jako její předchůdce Form 2. Ta měla ale určité nedostatky jako například zvýšené působící síly na nově tištěnou vrstvu modelu během vytahování v průběhu tisku. Z tohoto důvodu došlo k určitým konstrukčním modifikacím a výrobce nazval toto nové řešení jako technologii **LFS** (Low Force Stereolithography). [33]



Obr. 11 – Tiskárna Form 3 firmy Formlabs [32]

Formlabs nabízí ke svým tiskárnám množství kapalných resinů (pryskyřic) rozdělených do kategorií podle oblasti aplikace. Pro tisk vzorků měl být původně použit konkrétně materiál z kategorie inženýrských aplikací označovaný výrobcem jako Elastic Resin (elastická pryskyřice) pro měkké flexibilní součásti s tvrdostí Shore 50A. Bohužel v tiskové laboratoři v době tisku chyběla speciální nádržka potřená pro tisk z tohoto materiálu. Z tohoto důvodu byl z nabídky Formlab použit jiný flexibilní materiál pro tisk tužších dílů, který tuto speciální nádobu nevyžaduje. Jedná se o **Flexible Resin**



Obr. 12 – Vytiskovaný vzorek pro laboratorní zkoušky (délky v mm)

(pružnou pryskyřici) s tvrdostí Shore 80A. Tento materiál se používá pro svou univerzálnost u ohýbaných a stlačovaných dílů. Příkladem aplikace můžou být madla nebo úchyty, dále tlumiče a výstelky, také se hodí pro nositelné prototypy nebo tvorbu razítek. [34]

Vytiskované vzorky mají tvar obdélníku o rozměrech **100 x 10 mm** a tloušťce **2 mm**. Tištěny byly po vrstvách $100 \mu\text{m}$. Po dokončení tisku došlo k dodatečnému vytvrzení, kdy vzorky byly vystaveny UV záření ve vytvrzovací stanici na dalších 12 minut.

Jak bylo zmíněno v úvodu, tato diplomová práce se zabývá nalezením vhodného konstitučního modelu pro popsání viskoelastických vlastností elastomeru vytiskovaného na 3D tiskárně. Gumy, plasty, obecně polymery a elastomery nepatří mezi klasické konstrukční materiály jako jsou například oceli, pro jejichž popis se používá teorie malých deformací. Proto se následující kapitoly budou věnovat teoriím potřebným pro popsání chování těchto materiálů. Mezi tyto teorie patří **konečné deformace (velké), hyperelastická a viskoelastická**.

3. Teorie konečných deformací

Jak bylo naznačeno na konci předešlé podkapitoly 2.4, základní teorií studia pružnosti a pevnosti je teorie nekonečně malých (infinitezimálních) deformací. Pro ni se předpokládá, že počáteční a deformovaná geometrie se od sebe neliší a přetvoření se pohybuje do cca 1 %. [35] Pak je možné při odvozování geometrických vztahů zanedbat kvadratické členy a získat tak známý Cauchyho tenzor přetvoření (inženýrský). Tato formulace vyhovuje pro inženýrskou analýzu součástí nebo konstrukcí z oceli. [35]

Pryže, plasty a jiné netradičních materiály jsou ale schopné přetvoření i stovek procent. Proto už není možné zanedbat nelineární členy a je nutné přejít na teorii konečných (velkých) deformací. Pro jejich popis je třeba použít obecnější tenzory přetvoření. Tyto tenzory přetvoření je možné definovat různými způsoby, a to podle toho, kterou geometrickou konfiguraci tělesa považujeme za vztažnou. V mechanice kontinua jsou rozlišovány dva základní přístupy popisující kinematiku velkých deformací. Prvním je Lagrangeův (referenční) popis, který považuje za nezávislé proměnné souřadnice nedeformované geometrie \mathbf{X} a čas t , pohyb je pak popsán touto funkcí:

$$x_i = x_i(X_j, t) \quad (3.1)$$

Tento přístup je typický pro popis mechaniky tvárných těles. Druhý přístup je Eulerův (prostorový) popis, který bere jako nezávislé proměnné souřadnice geometrie deformované \mathbf{x} a čas t

$$X_i = X_i(x_j, t) \quad (3.2)$$

Tento přístup je typický pro popis mechaniky tekutin, tedy pohybu kapalin a plynů přes pevně zadaný objem. [35]

Dále bude uveden výčet několika různých tenzorů, které lze použít pro popis velkých deformací. Není ovšem možné volit libovolné kombinace tenzorů přetvoření a napjatosti. Aby byla určena správně energie napjatosti, je třeba pracovat s tzv. energeticky konjugovanými tenzory. [36]

3.1. Tenzory deformace

3.1.1. Tenzor deformačního gradientu

Tenzor deformačního gradientu, značený \mathbf{F} , slouží k transformaci mezi deformovanou a nedeformovanou geometrií. Je definován jako

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.3)$$

, kdy tuto definici lze rozepsat dále maticově jako [36]

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Prvky na hlavní diagonále matice \mathbf{F} (3.4) jsou důležité, protože mají fyzikální význam v případě, že je odseparována rotace tělesa, a to poměrné protažení (stretch). Tato poměrná protažení lze obecně zapsat ve tvaru [36]

$$\lambda_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \quad (3.5)$$

Důležitý je také třetí invariant tohoto tenzoru označován jako Jakobián J . Ten je dán determinantem matice F a jde nejsnadněji určit z hlavních hodnot poměrných protažení pomocí vztahu

$$I_3^F = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = J \quad (3.6)$$

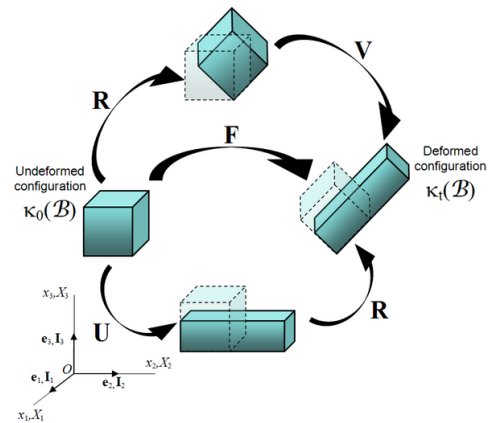
Tento invariant udává poměrnou objemovou změnu elementu. Pro objemově nestlačitelné materiály platí, že $J = 1$. [36]

Samotný deformační gradient nelze použít pro posouzení míry přetvoření, jelikož při rotaci tělesa jako tuhého celku jsou složky tenzoru nenulové. Deformační gradient je obecně nesymetrický, je ho ovšem možné použít pro vyjádření jiných tenzorů přetvoření. [36]

Polární dekompozice tenzoru deformačního gradientu

Deformační gradient je možné rozložit zvlášť na rotaci tuhého celku a jeho deformaci. Rotace je určena ortogonálním tenzorem rotace \mathbf{R} a deformace je určena buď levým tenzorem protažení \mathbf{V} (left stretch tensor) nebo pravým tenzorem protažení \mathbf{U} (right stretch tensor). Záleží jen, jestli je v elementu tělesa provedena nejprve rotace a potom deformace, nebo naopak. Vztahy mezi deformačním gradientem \mathbf{F} a tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} můžeme popsat následující rovnicí [37]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.7)$$



Obr. 13 – Grafická reprezentace polárního rozkladu deformačního gradientu [37]

Oba tenzory protažení \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou symetrické a pozitivně definitní. Vlastní čísla (hlavní protažení) těchto tenzorů jsou stejná pro oba tenzory. [37]

3.1.2. Cauchy-Greenův tenzor deformace

Pomocí tenzoru deformačního gradientu \mathbf{F} je také definován Cauchy-Greenův tenzor podle následujících vztahů (3.8 a 3.10). [36] Tento tenzor patří mezi rotačně nezávislé deformační tenzory. [37]

Pravý Cauchy –Greenův tenzor deformace

Pravý Cauchy –Greenův tenzor deformace je dán následujícím vztahem [37]

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.8)$$

Hlavními souřadnicemi tohoto tenzoru jsou tedy kvadráty poměrných protažení v hlavních směrech. [36]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Levý Cauchy –Greenův tenzor deformace

Levý Cauchy –Greenův tenzor deformace vznikne prohozením pořadí násobení tenzorů ve vzorci 3.8 [37], tedy

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.10)$$

Invarianty Cauchy –Greenova tenzoru přetvoření

Invarianty pravého i levého Cauchy –Greenova tenzoru přetvoření jsou používány pro vyjádření funkce měrné deformační energie W u hyperelastických materiálů. [37] V hlavním souřadnicovém systému je možné invarianty tohoto tenzoru vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde stejně jako u deformačního gradientu třetí invariant vyjadřuje změnu objemu (pro nestlačitelný materiál je roven jedné). [36]

Kromě těchto invariantů je také možné se setkat s modifikovanými invarianty Cauchy-Greenova tenzoru. Ty slouží k popisu pouze deviatátorové (tedy tvarové) složky tenzoru deformace. [36]

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1 J^{-\frac{2}{3}} \\ \bar{I}_2 &= I_2 J^{-\frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.3. Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření

Tento tenzor používá Lagrangeovo (referenční) pojetí, kdy konečná přetvoření jsou vztažena k původním nedeformovaným rozměrům. V tenzorovém vyjádření lze zapsat následovně [37]

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] \quad (3.13)$$

S využitím deformačního gradientu F , lze pak tento tenzor zapsat jako [37]

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(C - I) \quad (3.14)$$

kde I je jednotková matice.

3.1.4. Almansiho tenzor konečných přetvoření

Almansiho tenzor přetvoření, odpovídá Eulerově popisu pohybu kontinua, kdy se poměrné přetvoření vztahuje ke konečným (deformovaným) rozměrům. V tenzorovém vyjádření lze zapsat následovně [37]

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (3.15)$$

S využitím deformačního gradientu F , lze tento tenzor zapsat jako [37]

$$e = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \quad (3.16)$$

3.1.5. Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných přetvoření

Předchozí uvedené tenzory konečných přetvoření (Green-Lagrangeův a Almansiho) mají určité nedostatky. Ty spočívají v tom, že změny délek se vztahují k počátečním, respektive ke konečným hodnotám rozměrů, zatímco aktuální rozměry se v průběhu procesu zatěžování od těch referenčních mohou výrazně lišit. Cauchyho tenzor konečných přetvoření bere každý infinitezimální přírůstek délky a vztahuje ho vždy k aktuální geometrii během zatěžovacího procesu. Složky tohoto tenzoru jsou rovny přirozeným logaritmům odpovídajících souřadnic tenzoru deformačního gradientu [36]

$$E_{ij}^C = \ln F_{ij} = \frac{1}{2} \ln C_{ij} \quad (3.17)$$

3.2. Tenzory napětí

3.2.1. Cauchyho tenzor napětí

Jednotlivé tenzory napjatosti se mezi sebou odlišují v geometrické konfiguraci, na kterou je vztahena působící síla. Cauchyho tenzor, také označován jako Eulerův nebo v praxi tenzor skutečných napětí, vztahuje skutečnou elementární sílu dF_i na skutečnou tedy deformovanou plochu elementu podle vztahu (platí pro hlavní napětí) [36]

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j dx_k} \quad (3.18)$$

Tento tenzor je energeticky konjugován s Almansiho tenzorem přetvoření [36]

3.2.2. 1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, také označován jako Lagrangeův, Piolův nebo v praxi tenzor smluvní (inženýrských) napětí, vztahuje skutečnou elementární sílu dF_i k počáteční tedy nedeformované elementární ploše podle vztahu (platí pro hlavní napětí) [36]

$$P_i = \frac{dF_i}{dX_j dX_k} \quad (3.19)$$

3.2.3. 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, také označován jen jako Kirchhoffův, vztahuje korigovanou elementární sílu dF_{0i} k počáteční tedy nedeformované elementární ploše. Korigovaná elementární síla dF_{0i} je změněna oproti skutečné elementární síle dF_i stejným poměrem jako elementární rozměr v odpovídajícím směru. Proto tento tenzor nemá jasný fyzikální význam, používá se však proto, že je symetrický i pro velká přetvoření. Energeticky je tento tenzor konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem přetvoření, ale také s pravým Cauchy-Green tenzorem deformace. [36]

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j dX_k} = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i}{dX_j dX_k} \quad (3.20)$$

3.3. Převody mezi tenzory

V Tab. 1 jsou uvedeny vztahy pro převody mezi tenzory přetvoření v hlavním souřadném systému. [36] [38]

Smluvní přetvoření (inženýrské)	$\varepsilon = (l - l_0)/l_0 = \lambda - 1$	(3.21)
Green-Lagrangeův tenzor přetvoření	$E = (1/2)(\lambda^2 - 1)$	(3.22)
Almansiho tenzor přetvoření	$e = (1/2)(1 - \lambda^{-2})$	(3.23)
Cauchyho (logaritmické) přetvoření	$E^C = \ln \lambda$	(3.24)
Cauchy –Greenův tenzor přetvoření	$C = \lambda^2$	(3.25)

Tab. 1 – Tabulka vztahů s převody pro tenzory přetvoření

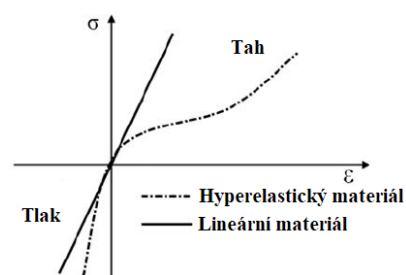
V Tab. 2 jsou uvedeny vztahy pro převody mezi tenzory napjatosti. [39] [38] V pravém sloupci jsou vztahy pro přepočítání v hlavním souřadném systému v případě nestlačitelného materiálu [36]

Cauchyho vs. 1.P-K napětí	$\sigma = J^{-1}FP^T$	(3.26)	$\sigma = P \cdot \lambda$	(3.27)
Cauchyho vs. 2.P-K napětí	$\sigma = J^{-1}FSF^T$	(3.28)	$\sigma = S \cdot \lambda^2$	(3.29)
2.P-K napětí vs. 1.P-K napětí	$S = F^{-1}P$	(3.30)	$S = \frac{P}{\lambda}$	(3.31)

Tab. 2 – Tabulka vztahů s převody mezi tenzory napjatosti

4. Hyperelasticita

Hyperelasticita je využívána pro popis materiálů, které vykazují nelineární elastické chování. Typickým projevem těchto materiálů jsou velké vratné deformace. Příkladem takového materiálu je guma, jež je schopná přetvoření až 500 %. Je nestlačitelná a její vztah mezi napětím a přetvořením je silně nelineární. Mezi další hyperelastické materiály patří pěny, plasty a různé biomateriály jako lidská tkáň. [41]



Obr. 14 – Křivka lineárně elastického a hyperelastického materiálu (upraveno) [40]

Konstitutivní modely hyperelastických materiálů vychází z funkce měrné deformační energie W (strain energy density function), která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření. Její derivaci podle některé složky přetvoření pak získáme odpovídající složku napětí. [41] To lze zapsat následujícím vztahem [36]

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (4.1)$$

kde S_{ij} ... složky 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
 W ... funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu
 E_{ij} ... složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření
 C_{ij} ... složky pravého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru

Stejně jako většina jiných konstitutivních modelů, také hyperelastické modely oddělují objemovou a tvarovou (deviátorovou) složku deformace, proto jsou i jejich konstitutivní vztahy složeny z těchto dvou částí. Pro popis vlivu změny objemu na energii napjatosti je nejčastěji využíván třetí invariant tenzoru gradientu deformace J v kombinaci s konstantou popisující objemovou změnu. Pro popis vlivu tvarové změny jsou nejčastěji používány modifikované invarianty některého z tenzorů přetvoření. Modifikace invariantů má za cíl právě oddělení tvarové změny (deviátorové složky tenzoru) od změny objemové (kulová složka tenzoru). [36]

4.1. Model Neo-Hooke

Model Neo-Hooke je nejjednodušší model pro hyperelastický materiál. Jedná se o model strukturní, to znamená že se snaží popsat chování materiálu na základě struktury materiálu. [42] Tento model neumí popsat nárůst tuhosti při velkých deformacích, jelikož tvarová změna je u tohoto modelu popsána pouze jedinou materiálovou konstantou. Z tohoto důvodu je použitelný přibližně do 30% přetvoření, kdy je nelinearita nevýrazná. [36] Funkce energie napjatosti W je definována následovně [43] [44]

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2 = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (4.2)$$

kde G je počáteční modul pružnosti ve smyku, c_{10} je materiálová konstanta, \bar{I}_1 je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, d je parametr stlačitelnosti materiálu a J je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu (Jakobián).

4.2. Model Mooney-Rivlin

Problém s popisem odezvy materiálu na uniaxiální zatížení Neo-Hooke modelem při větších přetvořeních vedl k jeho rozšíření na obecnější model s více parametry. [45] Tento model se nazývá Mooney-Rivlingův. Jedná se o fenomenologický model, to znamená, že konstitutivní rovnice byla zvolena tak, aby co nejlépe popsala pozorovanou odezvu materiálu bez ohledu na strukturu materiálu. [42]

Existuje několik verzí tohoto modelu, které se liší v počtu použitých parametrů pro popis (2, 3, 5 nebo 9 parametrický). Volbou vhodného počtu parametrů lze dobře proložit získaná experimentální data a tím dokonale popsat křivku chování materiálu (Obr. 14). [35] S vyšším počtem parametrů je ale horší predikce stavů, na které model nebyl fitován. [45] Například pro tříparametrický model je potenciálová funkce W definována následovně [43] [44]

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + c_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (4.3)$$

kde c_{10}, c_{01}, c_{11} jsou materiálové konstanty, \bar{I}_1 a \bar{I}_2 je modifikovaný první a druhý invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, d je parametr stlačitelnosti materiálu a J je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu (Jakobián).

4.3. Model Yeoh

Tento model vznikl modifikací Mooney-Rivlinova modelu, tak že bere v potaz pouze členy s prvním modifikovaným invariantem. [45] Tento materiálový model nevykazuje dobré výsledky v oblasti malých deformací. Stejně tak jako předchozí Mooney-Rivlingův model se tento model vyskytuje v několika variantách s různým počtem parametrů c_{i0} . [35] Obecně může být popsán následující rovnicí [43]

$$W = \sum_{i=1}^N c_{i0}(\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k}(J - 1)^{2k} \quad (4.4)$$

kde c_{i0} a N jsou materiálové konstanty, \bar{I}_1 je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, d_k jsou parametry stlačitelnosti materiálu a J je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu (Jakobián).

4.4. Další modely

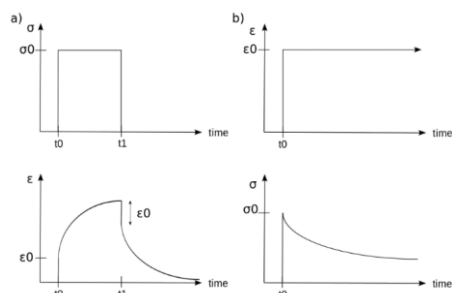
Pro popis měřeného materiálu budou uvažovány modely Neo-Hooke a Yeoh. Existuje ovšem mnoho dalších hyperelastických modelů. Za zmínku stojí model **Ogden**, který je vhodný pro popis experimentálně získaných dat i v oblasti velkých deformací (aplikovatelnost až do 700% přetvoření). [46]. Další modelem je **Arruda-Boyce**, který patří mezi strukturní modely, jehož materiál je tvořen z elementárních kubických objemů obsahující osm polymerních řetězců v diagonálních směrech. [47] Tento model je velmi robustní, to znamená, že dokáže predikovat chování materiálu i mimo oblast na níž byl fitován. Jedná se o rozšíření Neo-Hooke modelu přidáním mezního protažení řetězců λ_L . [45]

5. Viskoelastická

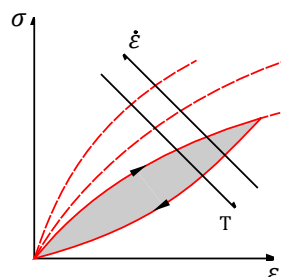
Viskoelastická je vlastnost materiálu, který vykazuje jednak viskózní (vazké) chování kapalin, ale současně také elastické chování pevných těles, jak jej známe z pružnosti a pevnosti. Mezi typicky viskoelastické materiály patří například právě guma, jež je tématem této diplomové práce. Dále sem patří celá řada polymerů, ale také měkké biologické struktury jako jsou například stěny cév. [41]

Podle chování materiálu při odlehčení lze usoudit, zda se jedná o viskoelastický materiál. Každý materiál, který podrobíme zatížení, je uveden do nerovnovážného stavu. Doba potřebná pro obnovení vnitřní silové rovnováhy po odeznění aplikovaného zatížení udává, zda materiál vykazuje elastické nebo viskoelastické chování. Pokud se materiál navrátí do rovnovážného stavu velmi rychle a tato doba je zanedbatelná, je odezva na zatížení časově nezávislá a materiál se chová elasticky. Jestliže potřebná doba zanedbatelná není, pak pozorujeme časově závislou odezvu materiálu na zatížení a materiál vykazuje viskoelastické chování. Pokud je takový materiál uveden do nerovnovážného stavu, tak zpět do rovnováhy se teoreticky dostává za nekonečně dlouhou dobu. [36]

Viskoelastické materiály mají několik typických projevů. Prvním z nich je postupný nárůst deformace v čase pod vlivem působícího konstantního napětí. Tento jev označujeme jako **creep**. Dále pokud je aplikována konstantní deformace, dochází v materiálu k samovolnému poklesu napětí neboli k **relaxaci**. V případě cyklického zatěžování vykazuje viskoelastický materiál hysterezi, to znamená, že zatěžovací křivka není shodná s křivkou odlehčovací. Oblast v pracovním diagramu (napětí – poměrné podélné prodloužení) ohraničená hysterezní smyčkou na Obr. 16 představuje množství disipované energie přeměněné na teplo v průběhu zátěžného cyklu. [41] A nakonec materiálové charakteristiky vykazují závislost na rychlosti deformace a také jsou závislé na teplotě. [36]



Obr. 15 – Typické chování viskoelastických materiálů **a)** creep při konstantním napětí **b)** relaxace napětí při konstantním poměrném podélném prodloužení (upraveno) [48; 49]



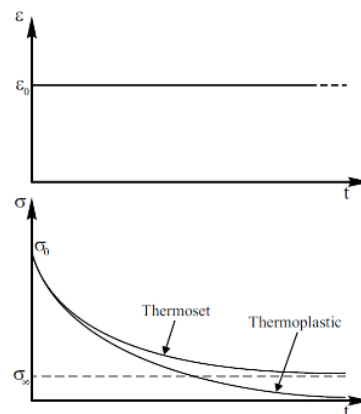
Obr. 16 – Pracovní diagram vykazující hysterezi a také vliv rychlosti deformace a teploty (upraveno) [50]

5.1. Testování viskoelastických materiálů

Jak bylo zmíněno výše, viskoelastické materiály mají několik typických projevů (relaxace, creep, hystereze při cyklickém zatěžování). S těmito projevy souvisí i testování těchto materiálů.

5.1.1. Relaxační test

První metodou pro testování viskoelastického časově závislého chování materiálů je **relaxační test**. Při relaxačním testu je aplikováno konstantní přetvoření. Vzorek je během jednoosé tahové zkoušky určitou rychlostí zdeformován a pevně fixován tak, že přetvoření zůstává konstantní (ε_0) po celou dobu zkoušky. Měří se pak vývoj síly (ze které se dopočítá napětí) v čase. Relaxační test nemusí být pouze tahový, ale může být rovněž kompresní nebo torzní. Pokud je vzorek zatížen výše popsaným způsobem, tak napětí vyvolané přetvořením se bude v čase snižovat. V případě ideálního materiálu, který lze popsat Maxwellovým modelem (viz podkapitola 5.3.1) se bude napětí po nekonečně dlouhé době blížit nulové hodnotě, ale v případě zesíťovaného polymeru (termosety) poklesne na určitou konstantní hodnotu σ_∞ . [51]



Obr. 17– Relaxační test (upraveno) [51]

Je zřejmé, že pokud je napětí funkcí času a přetvoření je konstantní, bude se materiálový modul také měnit s časem. Takto získaný modul je označován jako **modul relaxace** $E(t)$ a je dán vztahem [51]

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (5.1)$$

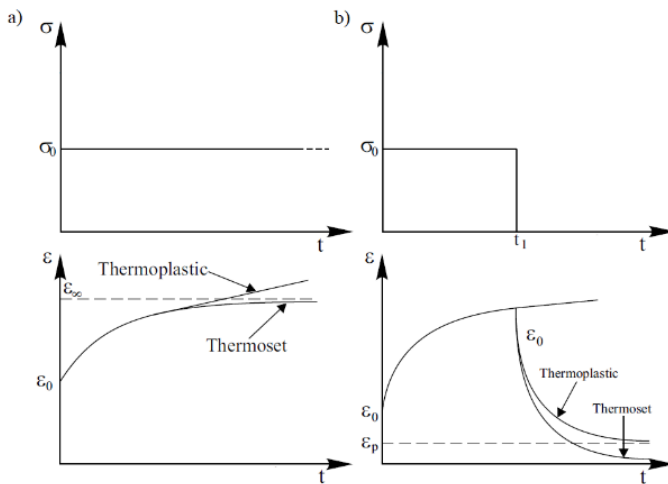
5.1.2. Creep test a Creep-recovery test

Kromě relaxačního testu je dalším základním testem viskoelastických materiálů **creepový test**, při kterém je vzorek při jednoosé tahové zkoušce zatížen konstantním napětím σ_0 . Opět zkouška může být rovněž kompresní nebo torzní. Během tohoto testu při zatížení konstantním napětím se přetvoření vzorku s časem zvyšuje. Stejně jako v případě relaxace i zde platí časová závislost pro materiálový modul, v tomto případě označovaný jako **poddajnost** $D(t)$. Je dán vztahem [51]

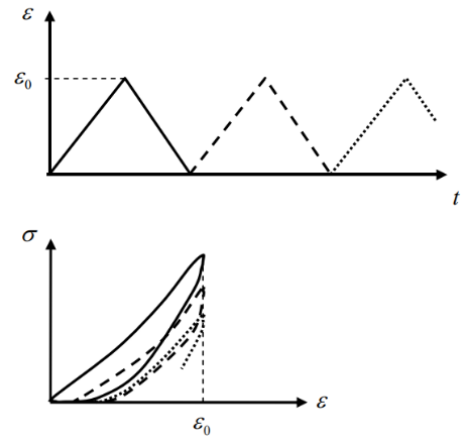
$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (5.2)$$

Při této zkoušce bude mít přetvoření zesíťovaných polymerů (termosety) po dlouhé době tendenci narůstat do určité konstantní hodnoty, zatímco v případě termoplastických polymerů přetvoření se bude zvyšovat bez omezení, jak je patrné z Obr. 18 na části a. [51] [52]

Kromě samotného creepu je důležité pochopit i chování materiálu při odlehčení (zatěžující konstantní napětí je odstraněno). Tento test se označuje jako **creep-recovery test**. U ideálního zesíťovaného polymeru přetvoření vzorku klesne časem na nulu. Tento čas může být ve srovnání s dobou zatížení poměrně dlouhý. V případě ideálního termoplastického polymeru zůstane zbytková deformace i po velmi dlouhé (nekonečné) době (Obr. 18 – část b). [51] [52]



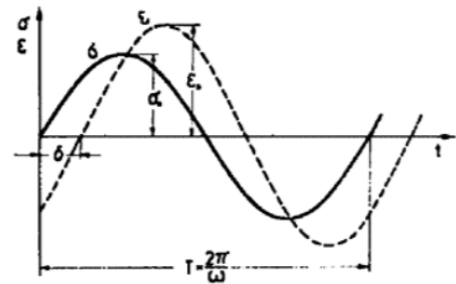
Obr. 18 – a) Creepový test a b) Creep-recovery test (upraveno) [51]



Obr. 19 – Typická odezva při cyklickém zatěžování [52]

5.1.3. Dynamické zatěžování (Cyklické testy)

Při dynamickém testování dochází k cyklickému zatěžování vzorku. Zkouška může být řízena napětově nebo deformačně (Obr. 19). [52] V případě dynamického zatěžování vykazují časové průběhy napětí a přetvoření pro viskoelastické materiály určitý fázový posun δ . Závislost mezi napětím a přetvořením je ovlivněna frekvencí zatěžování. Frekvence zatěžování rovněž ovlivňuje modul pružnosti, kdy se materiál při rychlejším zatěžování projevuje jako tužší. [36]

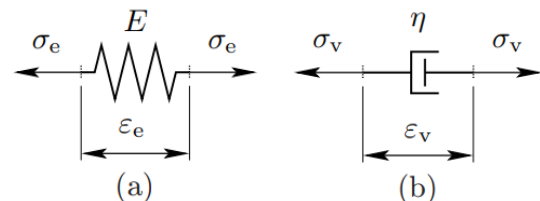


Obr. 20 – Časový průběh napětí a přetvoření viskoelastického materiálu při harmonickém zatěžování a fázový posun mezi nimi [53]

S chováním viskoelastických materiálu při dynamickém namáhání souvisí komplexní modul pružnosti, elastický modul, ztrátový modul, fázový úhel a ztrátový faktor. Opakované dynamické namáhání nebude v této práci uvažováno, proto nebude dále rozvedeno. Ovšem více informací lze o této problematice nalézt v [36] [51] [53]

5.2. Lineární viskoelastická

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, viskoelastické látky vykazují současně viskózní i elastické chování. Pro popis tohoto chování se používají reologické modely – mechanické modely kombinující vlastnosti obou druhů látek. Jedná se o systémy složené ze základních reologických článků. Mezi nejčastější používané patří lineární pružiny a lineární kapalinové tlumiče (písky). [53] K dalším reologickým členům, se kterými se můžeme setkat, patří nelineární pružiny a kapalinové tlumiče (Nortonův prvek), blokátory a omezovače deformace. [36]



Obr. 21 – Základní reologické články – pružina (a) a tlumič (b) [54]

Pružiny představují pružné neboli elastické vlastnosti materiálu a jsou popsány Hookeovým zákonem, tedy [53]

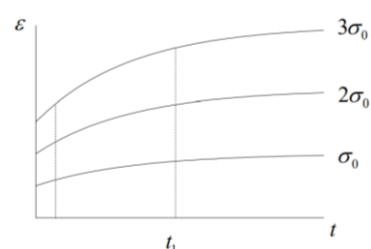
$$\sigma_e = E \cdot \varepsilon_e \quad (5.3)$$

kde σ_e [Pa] je napětí elastické části, E [Pa] je konstantní modul pružnosti a ε_e [–] je elastická deformace. Tlumiče/píсты reprezentují vazké neboli viskózní chování materiálu, kdy přenášené napětí není úměrné deformaci samotné, ale její rychlosti, platí tedy [54]

$$\sigma_v = \eta \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (5.4)$$

kde σ_v [Pa] je napětí viskózní části, η [Pa · s] je materiálová konstanta zvaná viskozita a $\dot{\varepsilon}_v$ [s⁻¹] označuje rychlost deformace viskózního článku. [53] Jednotlivé reologické modely se pak liší počtem těchto reologických článků a jejich řazením v systému.

Hookův zákon a Newtonův zákon viskozity jsou teoriemi lineárními, proto o viskoelasticitě vybudované na těchto teoriích mluvíme jako o **lineární viskoelasticitě**. [55] Jejím základním předpokladem jsou malé deformace (přetvoření cca do 1 %) a izotropní materiál. [36] Platí pro ni princip superpozice. Tedy, že přetvoření ε_1 je úměrné napětí σ_1 , pak n -krát větší hodnota napětí způsobí ve stejném čase t_1 n -krát větší hodnotu deformace nebo naopak n -krát větší deformace vyvolá n -krát větší napětí. [55] Lineární viskoelasticita je dostatečná pro aproximaci časově závislého chování kovů a keramiky při relativně nízkých teplotách a při relativně nízkém zatížení. Její aplikace je rozšířená také při modelování polymerů. [52]



Obr. 22 – Přetvoření v závislosti na čase pro různé velikosti zatížení [52]

5.3. Základní reologické modely viskoelastického chování

Stejně jak bylo zmíněno v úvodu kapitoly 4, i v případě viskoelasticity je třeba rozlišovat kulovou (objemovou) a deviátorovou (tvarovou) složku deformace. Pro popis viskoelastického chování je nutné vyjádřit vztahy pomocí funkcí G a K . Níže je uveden obecný zápis Hookeova zákona (vztah 5.5) a analogický zápis Newtonova zákona (vztah 5.6) [36]

$$\sigma_{ij} = 2GD_{\varepsilon_{ij}} + \delta_{ij}Ke \quad (5.5)$$

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{D}_{\varepsilon_{ij}} + \delta_{ij}\kappa\dot{e} \quad (5.6)$$

kde G [Pa] je modul pružnosti ve smyku, $D_{\varepsilon_{ij}}$ je deviátor tenzoru přetvoření, δ_{ij} je Kroneckerovo delta, K je objemový modul pružnosti, e je poměrná změna objemu, η [Pa · s] je dynamická viskozita a κ [Pa · s] je objemová viskozita.

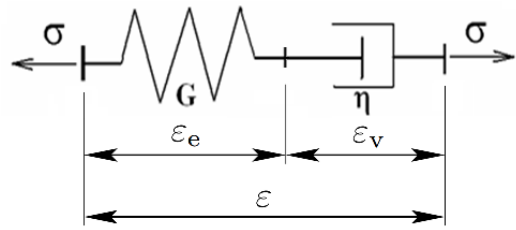
V následující části kapitoly je uveden přehled některých základních reologických modelů. Chování těchto modelů bude uvedeno pro tvarovou část (deviátorovou) tenzoru napětí a přetvoření (konstanty G a η). Pro objemovou část je možné použít stejné modely, avšak objemová změna se často modeluje jako čistě elastická, jelikož objemová viskozita je mnohem méně podstatná než tvarová. [36]

5.3.1. Maxwellův model

První jednoduchý dvouparametrický model vzniklý sériovým zapojením pružiny a tlumiče představuje tzv. **Maxwellův model**. Z Obr. 23 je patrné, že celková deformace modelu bude dána součtem deformací pružiny a tlumiče. Platí tedy [54] [53]

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (5.7)$$

$$\sigma = \sigma_v = \sigma_e \quad (5.8)$$



Obr. 23 – Reologické schéma Maxwellova modelu (upraveno) [36]

Bude také platit, že celková rychlost deformace modelu bude dána součtem rychlostí deformace jeho prvků. Úpravou vztahů (5.3), (5.4) a (5.8) a následným dosazením do zderivované rovnice (5.7) podle času získáme diferenciální rovnici Maxwellova modelu [53]

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = \frac{1}{G} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (5.9)$$

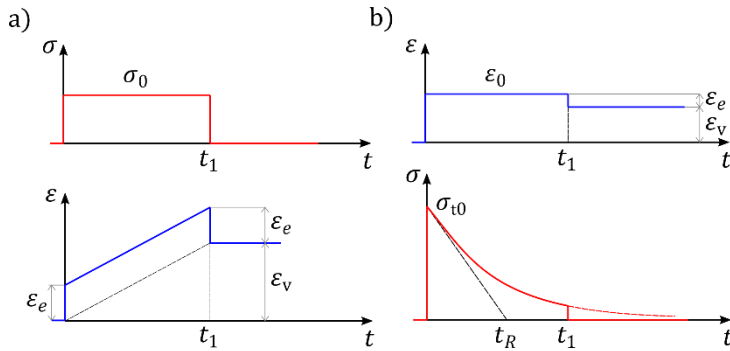
Odezvu modelu při **creepu** nebo relaxaci získáme integrací rovnice (5.9) a aplikací odpovídajících počátečních podmínek. V případě creepu je aplikováno konstantní napětí $\sigma = \sigma_0$ v čase $t = 0$. Obdržíme tak následující rovnici (5.10) odezvy na creep. Pokud v čase $t = t_1$ přestane působit zatěžující napětí σ_0 dojde k okamžitému poklesu deformace o elastický příspěvek pružiny σ_0/G , zatímco tlumič zůstává permanentně přetvořen, jak je patrné z Obr. 24. [53]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (5.10)$$

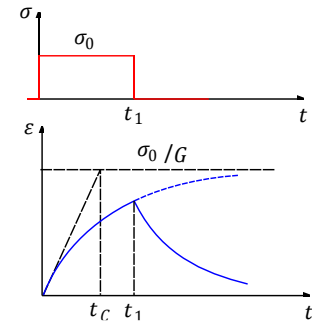
Pokud je aplikováno konstantní přetvoření $\varepsilon = \varepsilon_0$ v čase $t = 0$, tak z rovnice (5.9) získáme rovnici odezvy modelu při **relaxaci** (5.11). V této rovnici si můžeme povšimnout proměnné t_R . Jedná se o **relaxační čas**, tj. viskoelastickou konstantu, která udává potřebný čas pro vymizení napětí, pokud by klesalo stále stejnou rychlostí jako na počátku. V praxi je přechodový děj ukončen za $4t_R$, kdy relaxací poklesne více než 98 % počátečního napětí [53]

$$\sigma(t) = \sigma_{t0} e^{\left(-\frac{t}{t_R}\right)} = G \varepsilon_0 e^{\left(-\frac{t}{t_R}\right)}, \text{ kde } t_R = \frac{\eta}{G} \quad (5.11)$$

Tento model tedy popisuje dobře schopnost materiálu relaxovat díky exponenciální odezvě relaxace, jež odpovídá chování většiny polymerů. Limitací tohoto modelu je naopak popis chování při creepu, jelikož pro aplikované konstantní napětí dochází k lineárnímu nárůstu deformace v čase (tzv. volný creep). Ovšem většina polymerů vykazuje s narůstajícím časem postupný pokles rychlosti deformace. Tento model se v praxi používá pro termoplasty a kovy nacházející se v blízkosti jejich teploty tání. [41] [36]



Obr. 24 – Odezva Maxwellova modelu na a) creep a b) relaxaci (upraveno) [50]



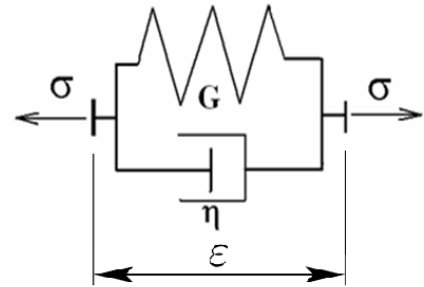
Obr. 25 – Odezva Kelvin-Voigtova modelu při creepu (upraveno) [50]

5.3.2. Kelvin-Voigtův model

Pokud pružinu a tlumič namísto sériového řazení zapojíme paralelně, vznikne **Kelvin-Voigtův model**. Zde je z Obr. 26 patrné, že v důsledku paralelního zapojení celková deformace modelu bude shodná s deformací jednotlivých prvků, zatímco celková hodnota napětí bude dána jejich součtem. Platí tedy [54] [53]

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (5.12)$$

$$\sigma = \sigma_v + \sigma_e \quad (5.13)$$



Obr. 26 – Reologické schéma Kelvin-Voigtova modelu (upraveno) [36]

Dosažením vztahů (5.3), (5.4) a (5.12) do rovnice (5.13) získáme diferenciální rovnici Maxwellova modelu [53]

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (5.14)$$

Odezvu modelu na zatížení získáme stejně jako v případě Maxwellova modelu integrací rovnice (5.14) a aplikací odpovídajících počátečních podmínek. Pro **creep** je aplikováno znovu konstantní napětí $\sigma = \sigma_0$ v čase $t = 0$. Obdržíme tak následující rovnici odezvy (5.15). Z průběhu odezvy při creepu na Obr. 25 (nahore stránky) je patrné, že přetvoření materiálu v čase narůstá s klesající rychlostí a asymptoticky se blíží hodnotě σ_0/G . [53]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{t}{t_c}} \right), \quad \text{kde } t_c = \frac{\eta}{G} \quad (5.15)$$

Obdobně jako v případě Maxwellova modelu, i zde si můžeme povšimnout proměnné t_c ve vztahu (5.15). Zde se jedná o **retardační čas**, tj. viskoelastickou konstantu, která udává čas potřebný k dosažení asymptotické hodnoty σ_0/G pokud by přetvoření narůstalo stále stejnou rychlostí jako na počátku. V praxi je opět přechodový děj ukončen za $4t_c$, kdy zbývá k dosažení asymptotické hodnoty méně než 2%. [53]

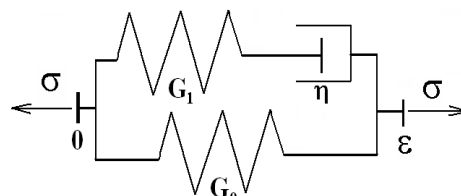
Pokud materiál odlehčíme v čase t_1 , bude se chtít pružina okamžitě vrátit do původní polohy, ovšem tlumič její pohyb zpět zbrzdí. Použitím principu superpozice a následnou úpravou byla získána následující rovnice odezvy materiálu při **odlehčení** [53]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} e^{-\frac{G}{\eta}t} \left(e^{\frac{G}{\eta}t_1} - 1 \right), \text{ kde } t > t_1 \quad (5.16)$$

Kelvin-Voigtův model tedy na rozdíl od Maxwelllova modelu popisuje realisticky creepové chování, kdy se deformace časem blíží exponenciálně k asymptotické hodnotě σ_0/G (tzv. vázaný creep). Po dostatečně dlouhé době po odlehčení nezůstane v modelu žádná zbytková deformace. Slabou stránkou tohoto modelu je nepřesné popsání relaxace napětí. Rovněž tento model není schopen reagovat na okamžitý skokový nárůst deformace. [41] [36] V praxi se používá pro organické polymery, gumu a dřevo, pokud zatížení není příliš velké. [41]

5.3.3. Standard solid model

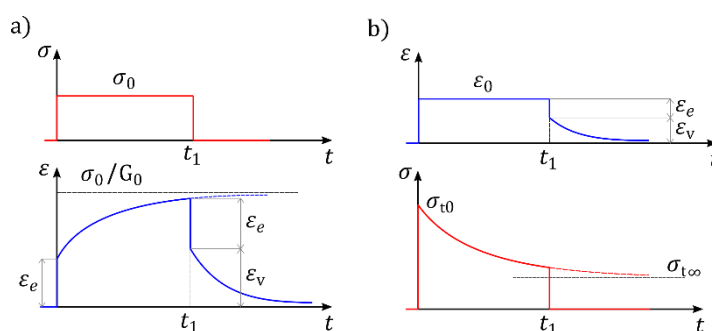
Pokud chceme popsat současně creepové i relaxační chování, jsou předchozí jednotlivé dvouparametrické modely nedostačující. Z tohoto důvodu vznikly další jednoduché tříparametrické modely kombinující výhody předchozích dvou modelů. Jedná se o **Standard solid modely**. [36] Existují různé varianty tohoto modelu podle toho, jak a jaké jednotlivé reologické články jsou do systému zapojeny (například namísto pružiny G_0 může být zapojen tlumič). Jejich přehled a popis jejich vlastností lze nalézt v [53]. Na Obr. 27 je vyobrazen model označovaný jako **Kelvinův model**. [36] Odvození jeho diferenciální rovnice už je trochu delší a je například uvedeno ve zmíněné literatuře [53]. Jeho diferenciální rovnice má pak tvar



Obr. 27 – Reologické schéma Kelvinova modelu – Standard solid modelu [36]

$$\sigma + \frac{\eta}{G_1} \dot{\sigma} = G_0 \varepsilon + \frac{\eta(G_0 + G_1)}{G_1} \dot{\varepsilon} \quad (5.17)$$

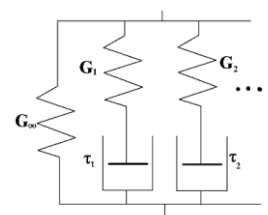
Standard solid model je schopný obecně dobře popsat viskoelastické chování, ovšem pouze za určitých specifických podmínek. Model vykazuje vázaný creep, je schopen okamžité deformace a po odlehčení má kompletní relaxaci napětí i přetvoření. Model ale není schopen současně popsat chování materiálu z hlediska krátkodobého a dlouhodobého. [53]



Obr. 28 – Odezva Standard solid modelu (Kelvinova) na a) creep a b) relaxaci (upraveno) [50]

5.3.4. Zobecněný Maxwellův model

Výše zmíněný Standard solid model má pouze jednu dobu relaxace, zatímco skutečné materiály se kvůli své složité struktuře často chovají, jako by měly několik těchto časů. Příkladem mohou být polymerní materiály jejichž jednotlivé řetězce mají různé délky a potřebují tedy rozdílné časy k relaxaci. Použití jediného relaxačního času by tedy vedlo k nepřesnému popisu chování tohoto materiálu. [53] Z tohoto důvodu bylo navrženo několik složitějších reologických modelů. Jedním z nich je **Zobecněný Maxwellův model**, také známý jako **Maxwell-Wiechertův model**. Jedná se o nejobecnější tvar lineárního viskoelastického modelu. Je složen z jednoho lineárního pružného článku a obecně n paralelně seřazených Maxwellových modelů s různými materiálovými konstantami.



Obr. 29 – Reologické schéma Zobecněného Maxwellova modelu [36]

Postupné odvození rovnic tohoto modelu je uvedeno například v literatuře [51], kde se začíná s úvahou paralelního zapojení pouze dvou Maxwellových modelů a poté je na konci rozšířeno na obecný počet n členů. Výsledkem je vztah pro relaxační modul zobecněného Maxwellova modelu (5.18), který je často označován v literaturách jako **Pronyho řada**.

$$G(t) = G_{\infty} + \sum_{i=1}^n G_i \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (5.18)$$

Kde G_{∞} rovnovážný relaxační modul a G_i jsou relaxační moduly ve smyku, τ_i jsou relaxační časy jednotlivých Maxwellových řetězců

6. Viskoelastická v ANSYSU

Pro praktickou část této diplomové práce bude použit software ANSYS. V případě lineární viskoelasticity je zde napětí vyjádřeno jako [56]

$$\sigma = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{d\epsilon_d}{d\tau} d\tau + \mathbf{I} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\epsilon_v}{d\tau} d\tau \quad (6.1)$$

kde relaxační jádra $G(t)$ pro deviatorovou a $K(t)$ pro objemovou část jsou definovány pomocí Pronyho řad vztahem (5.18). Pokud pro tyto řady zavedeme poměrné moduly (relative moduli) [56]

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \quad \text{kde } G_0 = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \quad (6.2)$$

$$\alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0}, \quad \text{kde } K_0 = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (6.3)$$

tak můžeme funkce relaxačních jader vyjádřit jako [56]

$$G = G_0 \left(\alpha_{\infty}^G + \sum_{i=1}^n \alpha_i^G e^{-\frac{t}{\tau_i^G}} \right), \quad K = K_0 \left(\alpha_{\infty}^K + \sum_{i=1}^n \alpha_i^K e^{-\frac{t}{\tau_i^K}} \right) \quad (6.4)$$

6.1. Visko-Hyperelasticita

Předchozí formulace je platná v případě malých přetvoření. Pokud se dostáváme do oblasti konečných deformací, je tato teorie nedostačující. V softwaru ANSYS je pro viskoelastické materiály s velkým přetvořením implementován model založený na teorii zformulované v práci [57]. Tato teorie je rozšířením teorie malých přetvoření, kdy základ této teorie tvoří generalizovaný Maxwellův model a lineární pružiny jsou nahrazeny hyperelastickým modelem. Hyperelasticita je definována funkcí měrné deformační energie W , kterou lze rozložit následovně [56]:

$$W(\mathbf{C}) = w(\bar{\mathbf{C}}) + U(J), \quad \text{kde } \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{J}^{\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad (6.5)$$

Skutečné napětí může být vyjádřeno pomocí vztahu (3.28), do kterého dosadíme konstitutivní rovnici hyperelastického materiálu (4.1) a použijeme vztah (6.5). Získáme tedy [56]

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \varphi(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + \frac{\partial U(J)}{\partial J} \mathbf{I} \quad (6.6)$$

Jak je uvedeno v pracích [57] [58], postupnou úpravou obdržíme konstitutivní visko-hyperelastickou rovnici 2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí ve formě

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \int_0^t \left[\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i^G}} \right] \left(2 \frac{d}{d\tau} \frac{dW}{d\mathbf{C}} \right) d\tau \\ & + \int_0^t \left[\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i^K}} \right] \left(2 \frac{d}{d\tau} \frac{dU}{dJ} \right) d\tau \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Jedná se tedy formálně o stejný popis jako pro lineární viskoelasticitu. Pronyho řady se zde používají pro definování visko-hyperelasticity s tím, že relativní moduly se vztahují k relativní tuhosti nelineárního materiálu.

7. Experimentální část

Cílem laboratorních měření je získání dat materiálu **Flexible Resin**, pomocí kterých bude možné nelézt a naladit vhodný konstitutivní model, který popíše viskoelastické chování daného materiálu. Snahou je najít takový konstitutivní model materiálu, aby byl schopen co nejlépe popsat průběh experimentálně zjištěných relaxačních a napěťově deformačních křivek. Tento model je poté možné využít při budoucích výpočtech a simulacích, pokud bude při návrhu uvažováno o použití tohoto materiálu.

7.1. Laboratorní měření

V kapitole 2.4 byly podrobněji rozebrány testovací vzorky pro praktickou část této práce vytištěné pomocí 3D tisku – jejich tvar, rozměry, tiskárna a její technologie použita k tisku. Metody testování viskoelastických vlastností jsou probrány v kapitole 5.1. Pro získání materiálových konstant byly vybrány 2 ze 3 uvedených metod – **relaxační zkoušky** a **dynamické namáhání**, v tomto případě **jednoosá tahová zkouška** s jedním zátěžným cyklem.

Pro testování byl použit univerzální trhací stroj **TESTOMETRIC M500-50CT**. Původní tenzometrický snímač sil na stroji pro větší zatížení s maximálním rozsahem měření do 50 kN byl nahrazen mnohem citlivějším tenzometrickým snímačem sil S2M/100N s maximálním rozsahem měření do 100 N.

Před samotným „ostrým“ měřením pro získání potřebných dat bylo provedeno několik pokusných/testovacích měření, jelikož autor této práce ani vedoucí práce neměl zkušenosti s materiálem vzorků v kombinaci s použitou výrobní technologií 3D tisku. Byly provedeny relaxační a jednoosé cyklické tahové zkoušky pro přetvoření 10 % a jeho násobky (20 %, 30 % ...). Bylo zjištěno, že se materiál během dlouhodobého zatížení při relaxační zkoušce přetrhne v první půlhodině při přetvoření 20 %, při jednoosé cyklické tahové zkoušce (5 cyklů) se vzorky přetrhly při přetvoření 40 %. Jelikož bylo vytištěno a dodáno omezené množství vzorků, byly na základě testovacích měření zvoleny menší maximální hodnoty přetvoření na straně bezpečnosti, aby bylo možné provést všechny plánované zkoušky. Tyto hodnoty přetvoření byly pro měření „naostro“ zvoleny následovně:

- Při jednoosé tahové zkoušce byly jednotlivé vzorky podrobeny přetvoření **10 %** a **30 %** dle předepsaného průběhu zatěžování na Obr. 32a (na další straně).
- Při relaxační zkoušce byly vzorky podrobeny předepsanému průběhu zatěžování vyobrazeném na Obr. 32b. Byly zvoleny hladiny přetvoření **3 %**, **6 %** a **9 %**. Doba, po kterou jsou udržovány jednotlivé hladiny přetvoření, je $t_{rel} = 1 \text{ hod.}$

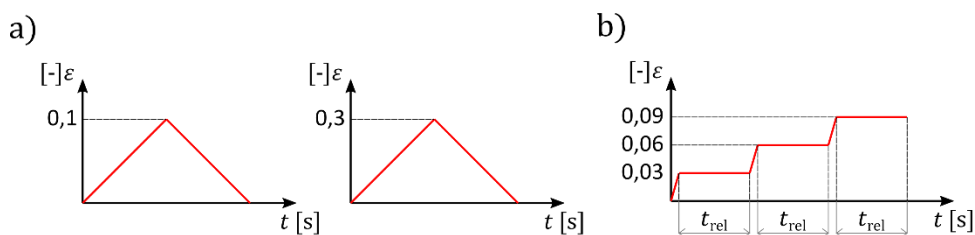


Obr. 30 – Náčrt vytištěného vzorku (rozměry v mm)



Obr. 31 – Připravené menší čelisti a citlivější tenzometrický snímač na trhacím stroji Testometric M500-50CT

Jelikož viskoelastické vlastnosti jsou závislé také na rychlosti zatěžování, byly jednotlivé zkoušky provedeny při několika rychlostech zatížení – byly zvoleny 3 hladiny rychlosti posunu příčnicku a to konkrétně **1 mm/min**, **10 mm/min** a **100 mm/min**. Při měření nebyl uvažován vliv různých teplot. Veškerá měření proběhla za pokojové teploty 22 °C.



Obr. 32 – Předepsaný průběh zatěžování pro a) jednoosé tahové zkoušky b) relaxační zkoušky

Před samotným měřením byly vzorky několikrát předcyklovány (5x), aby při měření byla získána ustálená hysterezní smyčka a aby bylo odstraněno inelastické chování známé jako Mullinsův efekt. Zaznamenávané veličiny během zkoušek byly **čas**, **síla**, **posunutí příčnicku** a **inženýrské (smluvní) napětí** automaticky vypočítané řídicím softwarem ze zadaného počátečního průřezu vzorku a naměřené síly. Výstupem každého měření jsou dva textové soubory (.txt), kdy v prvním je zapsána uspořádaná dvojice čas [s] a smluvní napětí [MPa], v druhém souboru je uspořádaná trojice dat – síla [F], posun příčnicku [mm] a čas [s]. Tato originální naměřená data jsou v datové příloze této diplomové práce.

Rychlost posunu příčnicku	Jednoosá tahová zkouška		Relaxační zkouška
	$\epsilon = 30\%$	$\epsilon = 10\%$	
1 mm/min	83,2 mm	83,2 mm	81,5 mm
10 mm/min	83,4 mm	83,4 mm	81,7 mm
100 mm/min	83,7 mm	83,7 mm	81,6 mm

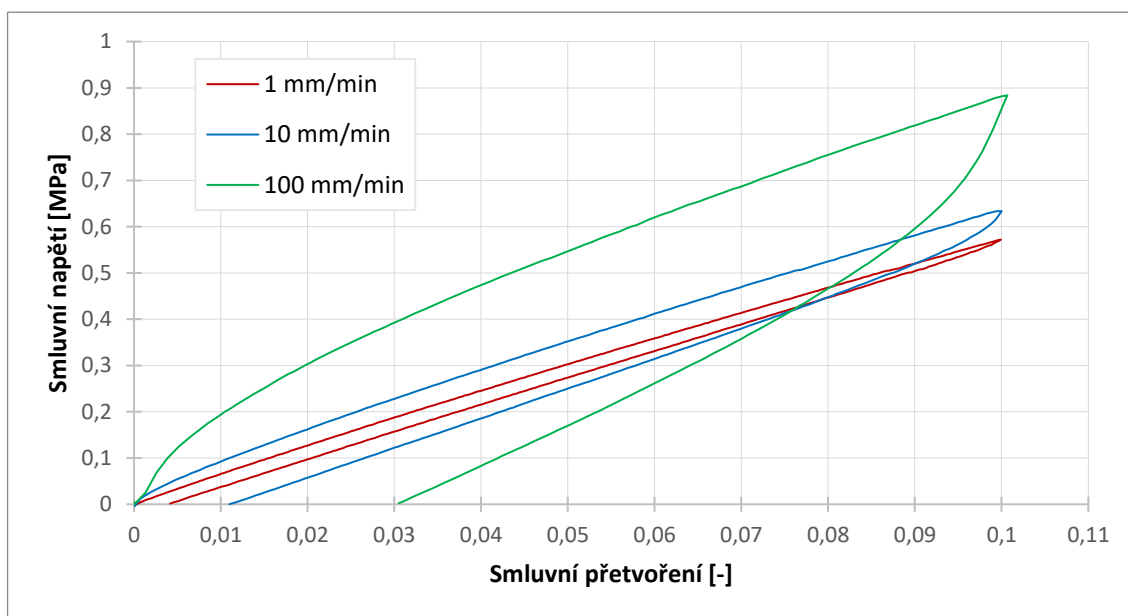
Tab. 3 – Tabulka délek vzorků naměřených při upnutí v čelistech (změřeno pomocí digitálního posuvného měřítka)

Výstupní data bylo třeba před dalším použitím zpracovat, aby byla použitelná v softwaru Hyperfit, který byl použit pro naladění konstitutivního modelu. Zpracování dat sestávalo z několika kroků. Nejprve došlo k přepočítání posunu příčnicku na smluvní přetvoření pomocí Tab. 3, kde jsou uvedeny naměřené délky vzorků po upnutí mezi čelistmi. Dále došlo k převzorkování těchto dat následovně:

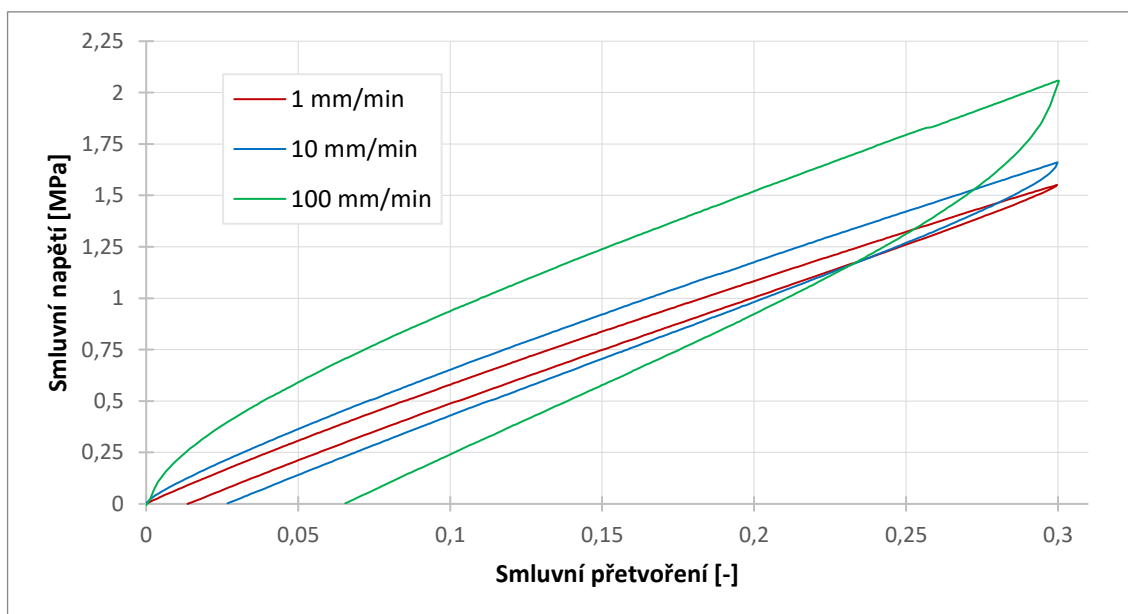
- Pro relaxační zkoušky bylo pro všechny hladiny přetvoření vždy vybráno všech prvních 100 naměřených bodů po dosažení požadovaného přetvoření (3 %, 6 % a 9 %), poté bylo z následujících 5000 bodů vybráno 40 rovnoměrně rozložených bodů, dále 8 bodů rovnoměrně rozložených na posledním úseku, kde napětí klesá již zanedbatelně. A nakonec byl vybrán vždy poslední bod, jenž se nachází před počátkem nárustu na další hladinu přetvoření.
- Aby byl snížen celkový počet naměřených bodů při jednoosých tahových zkouškách na přijatelnou hodnotu, byl vybrán každý n-tý naměřený bod, konkrétně pro rychlost zatížení 1 mm/min a přetvoření 10 % byl vybrán každý 34. bod, pro přetvoření 30 % každý 80. bod. V případě rychlosti zatížení 10 mm/min a přetvoření 10 % byl vybrán každý 6. bod, pro přetvoření 30 % každý 10. bod. Pro rychlost 100 mm/min byly ponechány všechny body, jelikož zkouška byla dost rychlá na to, aby vznikl dostatečně malý počet bodů a byl tak srovnatelný s počtem bodů v ostatních zkouškách po filtrování.

Nakonec byly vytvořeny jednoduché textové soubory (.txt) jednotlivých zkoušek s uspořádanými daty pro Hyperfit (čas – smluvní přetvoření – smluvní napětí). Z těchto dat byly rovněž vykresleny průběhy experimentálně zjištěných relaxačních a napětově deformačních křivek. Tyto průběhy jsou uvedeny v následujících dvou podkapitolách 7.1.1 a 7.1.2.

7.1.1. Naměřené hysterezní smyčky jednoosých tahových zkoušek

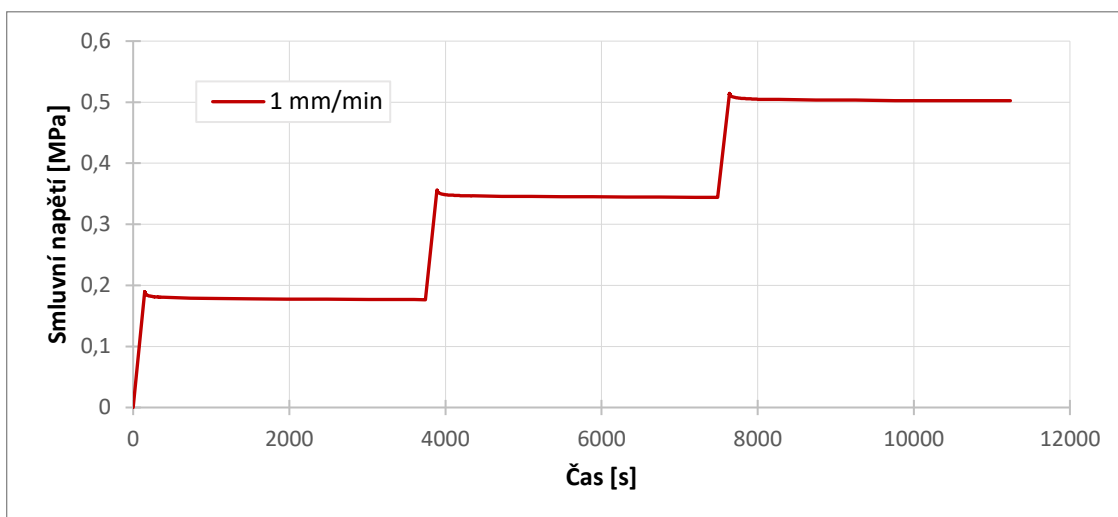


Obr. 33 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 %

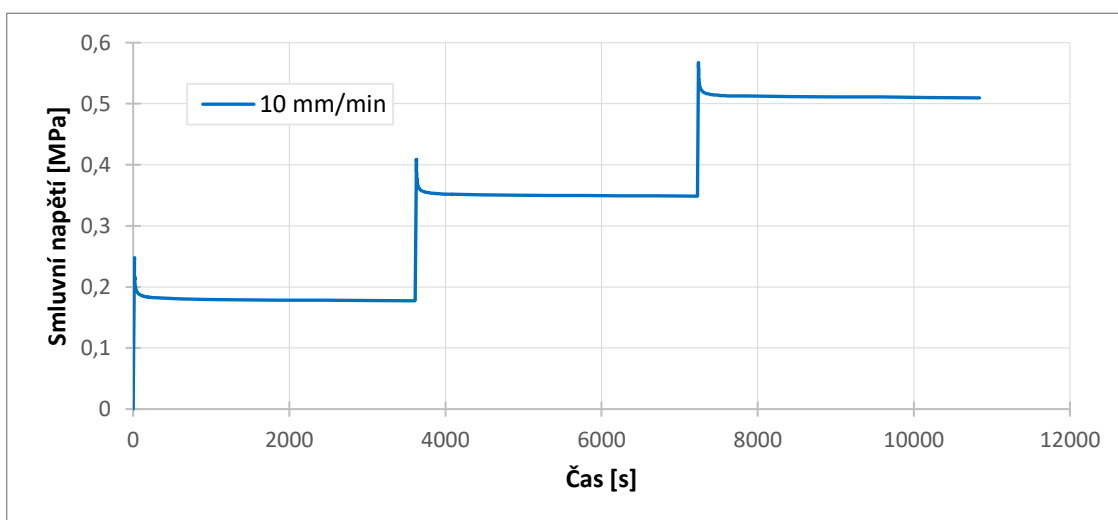


Obr. 34 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 %

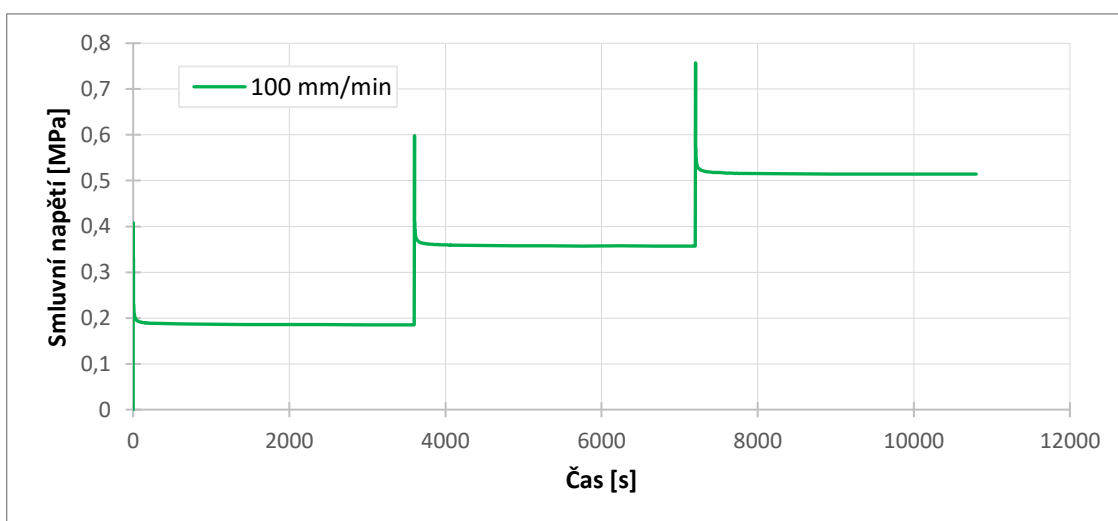
7.1.2. Naměřené relaxační křivky



Obr. 35 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 1 mm/min



Obr. 36 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 10 mm/min



Obr. 37 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 100 mm/min

7.2. Volba konstitutivního modelu

V dnešní době většina MKP softwarů obsahuje fitovací moduly pro definování materiálových modelů ze získaných experimentálních dat. ANSYS Workbench, jenž byl použit v další části této práce, není výjimkou. Ovšem jak již bylo uvedeno výše, byl v této práci pro nalezení parametrů zvolených konstitutivních modelů použit software Hyperfit.

Po nalezení parametrů modelu je třeba zhodnotit kvalitu nalezeného modelu, jelikož konstitutivní modely popisují chování reálného materiálu vždy s určitou chybou. Ke zhodnocení lze použít rezidua, odchylky nebo koeficienty a software Hyperfit pracuje konkrétně s těmito – Sum of squares of differences (*SS*), Sum of absolute differences (*SA*), normalizovanou odchylkou (Normalized error – *NE*), normalizovanou střední odchylkou (Normalized Root Mean Square Error or deviation – *NRMSE*), korelačním koeficientem (Correlation coefficient – *R*) a koeficientem determinace (R^2). Ideální shoda mezi nalezeným modelem a naměřenými daty je v případě *SS*, *SA*, *NE* a *NRMSE* vyjádřena hodnotou 0. V případě koeficientů *R* a R^2 je ideální shoda vyjádřena hodnotou 1. Tyto veličiny jsou současně použity při hledání optimálních parametrů modelu a uživatel volí jednu z výše uvedených veličin jako cílovou funkci optimalizačního problému.

Aby byl získán dobrý robustní model s dobrou predikcí, je ideální použít pro získání materiálových parametrů konstitutivního modelu při fitování data z více materiálových zkoušek jako například tlakové, smykové, jednoosé tahové a ekvibiaxiální tahové zkoušky. To znamená, že ideální by bylo použít pro fitování současně všech dostupných dat z měření. Software Hyperfit ale také umožňuje po nahrání všech datových souborů pro import deaktivaci některých zkoušek a fitování pouze vybrané sady dat, tedy například fitování jen relaxačních křivek. Po vypočtení parametrů konstitutivního modelu lze aktivovat zbylá nefitovaná data a pomocí získaných parametrů zjistit s jakou přesností dokáže model popsat materiálové křivky, na které nebyl fitován. Tento výše uvedený postup byl použit v této práci, kdy došlo nejprve pouze k fitování relaxačních křivek, posouzení predikce hysterezního chování a poté naopak.



Obr. 38 – Prostředí softwaru hyperfit za situace, kdy byly fitovány pouze relaxační křivky (pouze ilustrativní, neslouží k odečtu hodnot)

Při výběru konstitutivních modelů byly uvažovány pouze modely nestlačitelné. Co se týče nastavení Hyperfitu při výpočtech, pro získání parametrů všech hledaných modelů byl vybrán koeficient determinace (R^2) jako cílová funkce. Pro řešení optimalizačního problému byla nastavena metoda Nelder-Mead s maximálním možným počtem iterací na 20 000, zbylé nastavení software zůstalo defaultní. Pro posouzení kvality a porovnání modelů mezi sebou byly vybrány tyto dvě veličiny – koeficientem determinace (R^2) a normalizovaná střední odchylka ($NRMSE$). Ta byla navíc vynásobena stovkou, aby vyšla procentuálně.

7.2.1. Hyperelastická část modelu

Nejprve byla pozornost věnována hledání hyperelastické části a hledání konstitutivního modelu pro její popsání. Jelikož se maximální přetvoření pohybovala do 30 % byl jako první model vybrán nejjednodušší model Neo-Hooke. K němu byl vybrán tříparametrický Yeohův model. Aby bylo možné současně při fitování popsat i viskoelasticitu byla přidána Pronyho řada se třemi Maxwellovými členy. Vliv samotné složitosti viskoelastické části na kvalitu fitu a predikci je uvažován v další části práce. Výsledky fitování jsou uvedeny souhrnně v Tab. 4, výsledná data byla rovněž exportována z Hyperfitu a zpracována do formy grafů. Pro zájemce jsou k vidění v datové příloze v souborech *Fity HYSTEREZE.xlsx* a *Fity RELAX.xlsx*.

		Fit relaxačních křivek		Fit hysterezních smyček	
		Neo-Hooke (1p) + Prony (3p)	Yeoh (3p) + Prony(3p)	Neo-Hooke (1p) + Prony (3p)	Yeoh (3p) + Prony(3p)
Nalezené parametry	c_{10}	2,582	2,731	2,776	3,359
	c_{20}	–	0,054	–	0,903
	c_{30}	–	–0,005	–	–0,050
	α_1	0,157	0,183	0,169	0,099
	τ_1	1,057	1,073	0,628	0,331
	α_2	0,281	0,348	0,448	0,541
	τ_2	1,166	1,485	2,629	1,108
	α_3	0,164	0,095	0	0,067
Kvalita fitu	R^2	0,994	0,995	0,980	0,995
	$NRMSE$	2,4 %	2,09 %	7,47 %	3,39 %
Kvalita predikce nefitovaných dat	R^2	0,981	0,986	0,985	0,985
	$NRMSE$	6,63 %	5,96 %	4,32 %	4,29 %

Tab. 4 – Parametry a rezidua uvažovaných modelů pro výběr hyperelastické části konstitutivního modelu

Jak lze z Tab. 4 vyčíst, tak proložení experimentálních dat oběma uvažovanými modely lze považovat za velmi dobré, jelikož R^2 se ve všech případech pohybuje nad 0,98. Pokud přihlídneme také k $NRMSE$, tak tříparametrický Yeohův model popisuje chování materiálu s menší procentuální odchylkou oproti modelu Neo-Hooke v případě fitování hysterezních smyček. Proto v další části bude uvažováno pouze o použití Yeohova modelu.

7.2.2. Vliv složitosti viskoelastické části konst. modelu na kvalitu fitu

Kromě nalezení hyperelastického konstitutivního modelu byla také posuzována potřebná složitost viskoelastické části konstitutivního modelu. Jak bylo uvedeno dříve, pro popis hyperelastické části chování byl v této části vybrán již pouze tříparametrický Yeohův model. Pro popis viskoelastického chování byla použita Pronyho řada, kdy se začalo s jedním Maxwellovým členem a postupně se jejich počet navyšoval až do maximálního počtu čtyř.

		Fit relaxačních křivek			
		Yeoh (3p) + Prony (1p)	Yeoh (3p) + Prony (2p)	Yeoh (3p) + Prony (3p)	Yeoh (3p) + Prony (4p)
Nalezené parametry	c_{10}	1,740	2,012	2,731	2,772
	c_{20}	-0,253	0,806	0,054	0,019
	c_{30}	0,006	-0,030	-0,005	-0,002
	α_1	0,404	0,197	0,183	0,027
	τ_1	6,724	1,206	1,073	0,352
	α_2	–	0,299	0,348	0,292
	τ_2	–	8,062	1,485	1,448
	α_3	–	–	0,095	0,219
	τ_3	–	–	39,782	1,236
	α_4	–	–	–	0,094
	τ_4	–	–	–	39,247
Kvalita fitu	R^2	0,991	0,992	0,995	0,995
	NRMSE	2,90 %	2,95 %	2,09 %	2,09 %
Predikce hystereze	R^2	0,941	0,962	0,986	0,985
	NRMSE	11,24 %	8,93 %	5,96 %	6,05 %

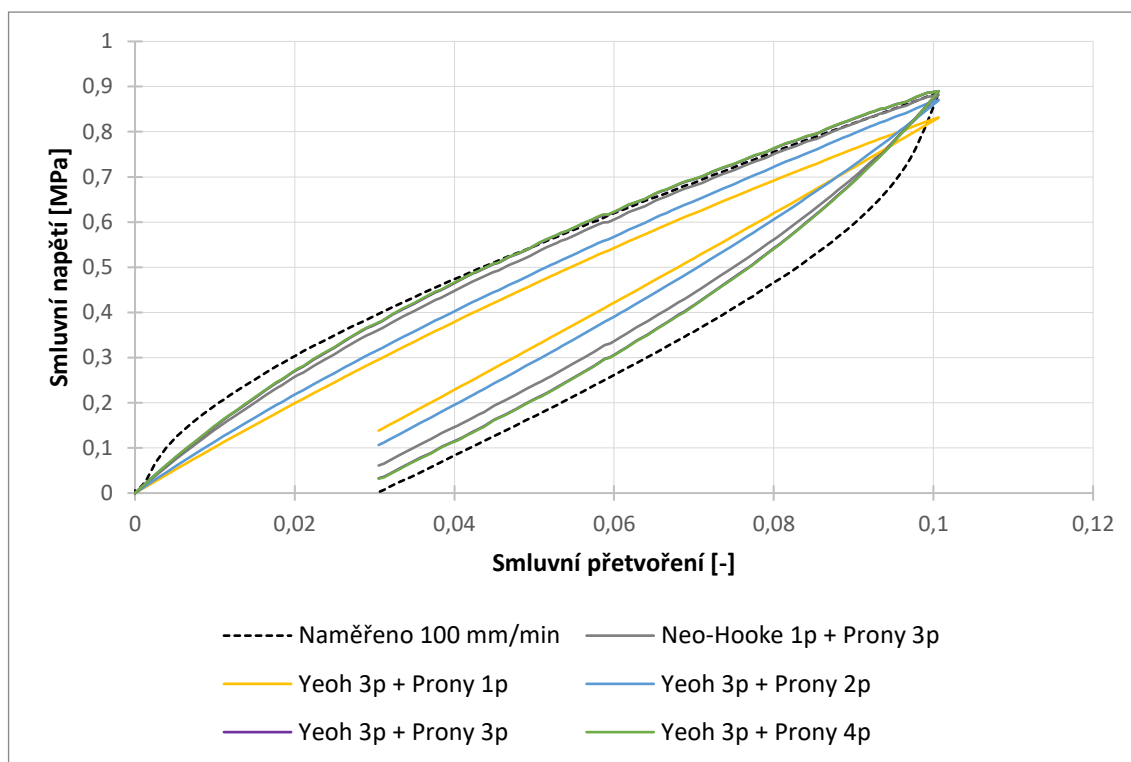
Tab. 5 – Parametry a rezidua uvažovaných modelů při fitu relaxačních křivek

		Fit hysterezních smyček			
		Yeoh (3p) + Prony (1p)	Yeoh (3p) + Prony (2p)	Yeoh (3p) + Prony (3p)	Yeoh (3p) + Prony (4p)
Nalezené parametry	c_{10}	2,522	2,524	3,359	3,051
	c_{20}	0,673	0,636	0,903	0,233
	c_{30}	-0,093	0,024	-0,050	0,044
	α_1	0,595	0	0,099	0,004
	τ_1	2,239	0	0,331	4,530
	α_2	–	0,595	0,541	0,588
	τ_2	–	2,239	1,108	1,177
	α_3	–	–	0,067	0,004
	τ_3	–	–	34,400	5,882
	α_4	–	–	–	0,071
	τ_4	–	–	–	33,113
Kvalita fitu	R^2	0,985	0,985	0,995	0,992
	NRMSE	6,68 %	6,68 %	3,39 %	4,42 %
Predikce relaxace	R^2	0,981	0,981	0,985	0,993
	NRMSE	4,37 %	4,36 %	4,29 %	2,66 %

Tab. 6 – Parametry a rezidua uvažovaných modelů při fitu tahových zkoušek

Opět na základě výsledků shrnutých v Tab. 5 a Tab. 6 lze prohlásit, že proložení experimentálních dat všemi uvažovanými modely lze považovat za velmi dobré, jelikož R^2 se ve všech případech pohybuje nad 0,94. Pokud se podíváme na predikci hystereze v Tab. 5, tak v případě modelů s jedním a dvěma Maxwelllovými členy je predikce hysterezních smyček horší, v případě modelu s jedním Maxwelllovým členem dokonce až dvakrát horší v porovnání s modely se třemi a čtyřmi členy. V případě modelů se třemi a čtyřmi Maxwelllovými členy je kvalita fitu i predikce hystereze na stejné úrovni, to znamená že model se třemi členy se dostatečnými a není třeba dalšího navyšování. Pokud zhodnotíme výsledky v Tab. 6, tak opět modely se třemi a čtyřmi členy vychází oproti modelům s jedním a dvěma členy lépe. Co se týče predikce relaxačních křivek, vychází z těchto dvou modelů lépe model se čtyřmi členy, ovšem nepatrně. Jelikož jsou rozdíly po zhodnocení Tab. 5 a Tab. 6 mezi modely se třemi a čtyřmi Maxwelllovými členy minimální, tak pro MKP simulace byl vybrán jednodušší **tříparametrický Yeohův model s Pronyho řadou se třemi Maxwelllovými členy**.

Opět výsledná data byla exportována z Hyperfitu a graficky zpracována a vložena do zmíněné datové přílohy (soubory Fity HYSTEREZE.xlsx a Fity RELAX.xlsx)



Obr. 39 – Ukázka grafického zpracování exportovaných dat, na obrázku je predikce hysterezní smyčky všech uvažovaných modelů pro rychlost 100 mm/min z fitu relaxačních křivek

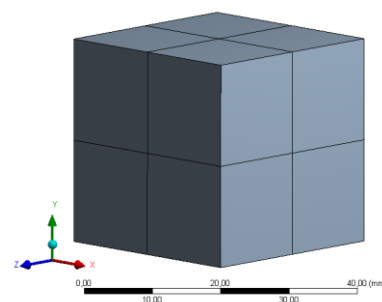
8. Tvorba výpočetního modelu

Tato kapitola se bude věnovat sestavení výpočetního modelu pro verifikaci nalezeného konstitutivního modelu. Verifikace spočívá v porovnání experimentálně získaných dat s deformačně napěťovou odezvou výpočtového modelu, ve kterém byl použit nalezený konstitutivní model. Samotné sestavení modelu se zakládá na tvorbě geometrie a výpočetní sítě, definice materiálového modelu, definování okrajových podmínek a zatížení, volbě vhodného typu výpočetní analýzy a s tím souvisejícím vhodným nastavením parametrů výpočtu (např. velikost časového kroku).

V MKP programu **ANSYS Workbench** verze **R19.2** je řešeno celkem 18 úloh simulujících provedené zkoušky, konkrétně 12 jednoosých tahových zkoušek a 6 relaxačních. Vyšší počet úloh, než je počet provedených měření, je z důvodu, že byly nalezeny 2 konstitutivní materiálové modely – jeden z fitu relaxačních křivek a druhý z fitu hysterezních smyček. V následující části bude uvedena pouze tvorba výpočetního modelu pro materiálový model získaný fitem relaxačních zkoušek, jelikož řešení úloh pro oba materiálové modely proběhlo stejným způsobem, pouze byly zaměněny materiálové konstanty. Jedná se o časově závislé úlohy, proto byl pro řešení použit modul transientní analýzy.

8.1. Geometrie a konečnoprvková síť

Při tvorbě geometrie nebyl vymodelován celý laboratorní vzorek, ale bylo uvažováno o zjednodušení. Byl stanoven předpoklad, že v měrné části vzorku vznikala homogenní jednoosá napjatost, tedy že vzorek byl při měření dostatečně dlouhý na to, aby vliv uchycení na napjatost střední části byl zanedbatelný, jelikož v místě uchycení dochází v praxi často ke koncentraci napětí. Na základě tohoto předpokladu byla vymodelována pouze elementární krychle materiálu o rozměrech $30 \times 30 \times 30 \text{ mm}$ představující prostřední část vzorku. Vytvořená geometrie byla následně diskretizována. Pro vysítování byl použit element typu SOLID186 s meziuzly, kdy pro rozměry ve všech směrech byly použity dva elementy. Celkový počet elementů modelu je tak 8.



Obr. 40 – Vysítovaná geometrie výpočtového modelu

8.2. Materiálová data

Pro simulaci byl v materiálové knihovně definován nový materiál skládající se z tříparametrického Yeohova modelu a Pronyho řadou se třemi Maxwellovými členy. Hodnoty parametrů byly získány v kapitole 7.2.2. V Tab. 7 níže jsou vypsány použité hodnoty, a jak již bylo nastíněno v úvodu této kapitoly, jedná se o parametry získané fitováním relaxačních křivek.

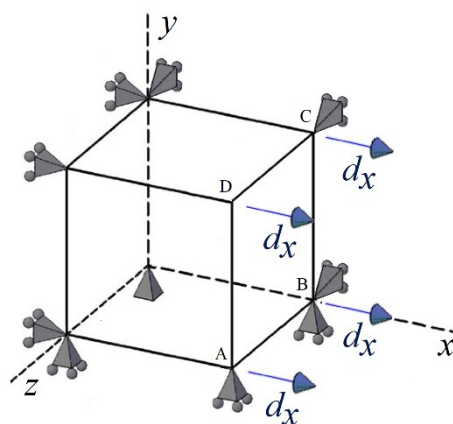
$c_{10} [Mpa]$	$c_{20} [Mpa]$	$c_{30} [Mpa]$	$\alpha_1 [-]$	$\tau_1 [s]$	$\alpha_2 [-]$	$\tau_2 [s]$	$\alpha_3 [-]$	$\tau_3 [s]$
2,731	0,054	-0,005	0,183	1,073	0,348	1,485	0,095	39,782

Tab. 7 – Tabulka parametrů materiálového modelu získaného fitem relaxačních křivek

Relativní moduly α_i a relaxační časy τ_i lze vložit do ANSYSU jako teplotně závislé konstanty. Vliv různých teplot v tomto případě nebyl uvažován, a teplota byla pro materiál nastavena na $22 \text{ }^\circ\text{C}$, při kterých proběhlo měření.

8.3. Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou patrné ze schématu na Obr. 41. Uzel ležící v počátku souřadného systému má zakázané posuvy ve všech směrech (x, y, z). Dále uzly ležící v rovinách XY, YZ a XZ mají posuv zakázaný v jednom směru, a to kolmém na rovinu, ve které leží. To znamená, že uzly ležící v rovině XY mají zakázaný posuv ve směru z , uzly v YZ posuv ve směru x a uzly v XZ posuv ve směru y . Nakonec bylo aplikováno zatížení, konkrétně řízený posuv ve směru osy x pro uzly ležící ve stěně tvořené vrcholy A, B, C, D. Průběh a velikost předepsaného posuvu se pro simulaci tahové a relaxační zkoušky liší a konkrétní nastavení bude probráno v podkapitole příslušné zkoušky.



Obr. 41 – Schéma aplikovaných okrajových podmínek, kde d_x značí řízený posuv uzlů

Vzorky v laboratoři byly testovány při rychlosti posunu příčnicku 1 mm/min, 10 mm/min a 100 mm/min. Délky jednotlivých vzorů při laboratorním měření po upnutí do stroje jsou uvedeny souhrnně na konci kapitoly 7.1 v Tab. 3. Jelikož pro MKP simulaci byla zvolena krychlička o jiných rozměrech (30 × 30 × 30 mm) byl proveden následující přepočít, aby byla zachována poměrná rychlost zatěžování $\dot{\epsilon}$ (strain rate). Níže ve vztazích (8.1 a 8.2) je uveden pouze přepočít pro rychlost tahové zkoušky 1 mm/min. Zbylé zkoušky byly přepočteny obdobně a výsledky těchto přepočtů jsou uvedeny v Tab. 8 níže.

$$\dot{\epsilon}_{TAH1mm/min} = \frac{v_{EXP}}{l_0} = \frac{1 \text{ mm/min}}{83,2 \text{ mm}} = 0,01202 \text{ min}^{-1} \quad (8.1)$$

$$v_{MKP \text{ ekvivalent}} = \dot{\epsilon}_{TAH1mm/min} \cdot l_{MKP} = 0,01202 \cdot 30 = 0,3606 \text{ mm/min} \quad (8.2)$$

Jednoosé tahové zkoušky pro přetvoření 10 % a 30 %				
v_{EXP}	1	10	100	[mm/min]
l_0	83,2	83,4	83,7	[mm]
Strain rate ($\dot{\epsilon}$)	0,01202	0,11990	1,19474	[min ⁻¹]
v_{MKP}	0,3606	3,5971	35,8423	[mm/min]
Relaxační zkoušky				
v_{EXP}	1	10	100	[mm/min]
l_0	81,5	81,7	81,6	[mm]
Strain rate ($\dot{\epsilon}$)	0,01227	0,12240	1,22549	[min ⁻¹]
v_{MKP}	0,3681	3,6720	36,7647	[mm/min]

Tab. 8 – Tabulka přepočtu rychlostí zatěžování

Poté co byly přepočteny rychlosti, bylo možné vypočítat čas potřebný pro dosažení požadovaného posunu, a tedy i přetvoření modelu ve směru x . Z těchto údajů byly definovány tabulky posuvů v závislosti na čase. Přestože byly rychlosti posunu příčnicku pro MKP přepočteny, budou dále jednotlivé MKP simulace označeny starou sadou rychlostí 1 mm/min, 10 mm/min a 100 mm/min z důvodu snadnější identifikace.

8.3.1. Tahové zkoušky

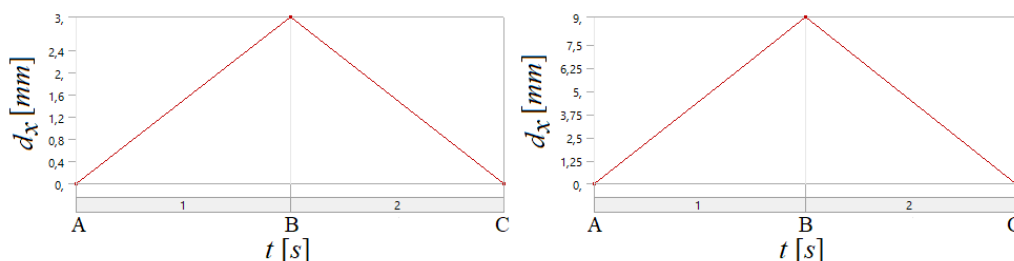
Pro tahové zkoušky všech rychlostí platí cílové přetvoření 10 % a 30 %. Při rozměrech vymodelované krychle se jedná o posuv 3 a 9 mm. Průběh zatěžování je předepsán pomocí tabulky, kdy byl definován čas a hodnota posuvu d_x v daný okamžik. Níže jsou uvedené nadefinované řídicí tabulky pro jednotlivé rychlosti.

	1 mm/min		10 mm/min		100 mm/min	
	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]
A	0	0	0	0	0	0
B	499,2	3	50	3	5,02	3
C	998,4	0	100,1	0	10,04	0

Tab. 9 – Řídicí tabulka pro posuv uzlů ve směru osy x pro tahové zkoušky do přetvoření 10%

	1 mm/min		10 mm/min		100 mm/min	
	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]
A	0	0	0	0	0	0
B	1497,6	9	150,1	9	15,07	9
C	2995,2	0	300,2	0	30,13	0

Tab. 10 – Řídící tabulka pro posuv uzlů ve směru osy x pro tahové zkoušky do přetvoření 30%



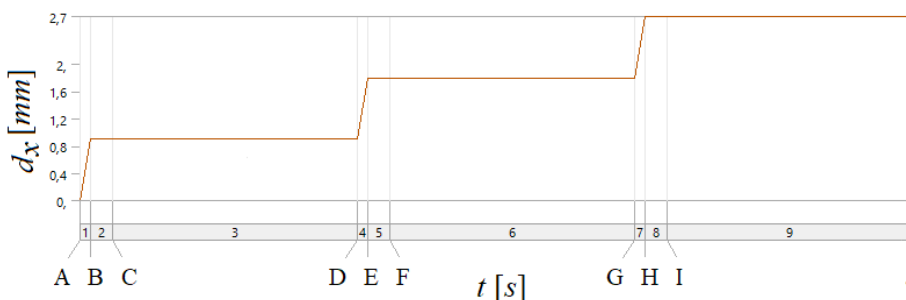
Obr. 42 – Grafické znázornění předepsaného průběhu zatížení (vlevo pro přetvoření do 10 %, vpravo pro přetvoření do 30 %)

8.3.2. Relaxační zkoušky

Pro relaxační zkoušky je třeba model zatížit přetvořením v hladinách 3 %, 6 % a 9 %. Při rozměrech vymodelované krychle se jedná o posuvy 0,9, 1,8 a 2,7 mm. Průběh zatěžování je opět předepsán pomocí tabulky, kdy byl definován čas a hodnota posuvu d_x v daný okamžik. Níže jsou souhrnně uvedené nadefinované řídicí tabulky pro jednotlivé rychlosti.

	1 mm/min		10 mm/min		100 mm/min	
	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]	Čas [s]	Posuv v ose x [mm]
A	0	0	0	0	0	0
B	146,7	0,9	14,7	0,9	1,47	0,9
C	246,7	0,9	114,7	0,9	101,47	0,9
D	3746,7	0,9	3614,7	0,9	3601,5	0,9
E	3893,4	1,8	3629,4	1,8	3602,9	1,8
F	3993,4	1,8	3729,4	1,8	3702,9	1,8
G	7493,4	1,8	7229,4	1,8	7202,9	1,8
H	7640,1	2,7	7244,1	2,7	7204,4	2,7
I	7740,1	2,7	7344,1	2,7	7304,4	2,7
J	11241	2,7	10844	2,7	10804	2,7

Tab. 11 – Řídící tabulka pro posuv uzlů ve směru osy x pro relaxační zkoušky



Obr. 43 – Grafické znázornění předepsaného průběhu zatížení relaxačních zkoušek

Na Obr. 43 si lze povšimnout bodů C, F a I, kdy nedochází k žádné změně v hladině zatížení. Tyto body vznikly v důsledku nastavení analýzy. Toto nastavení je probráno v další kapitole.

8.4. Nastavení analýzy

Jak bylo zmíněno na začátku této kapitoly, byl nastaven transientní typ analýzy. S transientním typem analýzy souvisí nastavení časového intervalu simulace. Se znalostí přepočtené rychlosti bylo možné stanovit celkové časy potřebné pro simulaci zkoušek. Tyto celkové časy byly navíc rozděleny na časové intervaly, aby bylo možné nastavit rozdílné parametry výpočtu v průběhu řešení. Rozdělení na tyto intervaly je patrné z Obr. 42 a Obr. 43, kde si lze ve spodní části povšimnout šedého pásu s čísly.

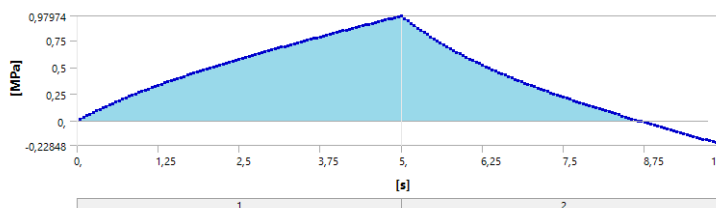
- V případě tahových zkoušek byl celkový čas rozdělen na dva časové intervaly – jeden pro nárůst (A-B) a druhý pro pokles posuvu (B-C).
- V případě relaxačních zkoušek se jedná o tři stejné trojice časových intervalů. V prvním intervalu (A-B, D-E, G-H) dochází k nárůstu posuvu na další hladinu zatížení. Poté co posuv dosáhne nové hladiny, následuje časový interval 100 s (B-C, E-F, H-I), kdy je předpokládána výraznější změna/pokles napětí, a proto zde bude uvažován jemnější krok pro zachycení této změny. V posledním nejdelším časovém intervalu (C-D, F-G, I-J) je předpokládán již pozvolný pokles napětí.

Dále kvůli velikosti dosaženého přetvoření a použití hyperelastického materiálu byly pro řešič zapnuty velké deformace.

Jak bylo nastíněno výše při definici časových intervalů pro nastavení různých parametrů výpočtu při transientní úloze, je rovněž velice důležité optimální nastavení časového kroku při výpočtu. Pokud zvolíme velmi jemný časový krok, docílíme přesnějších výsledků, ovšem s klesající velikostí časového kroku roste výpočetní a časová náročnost úlohy. Pokud naopak zvolíme příliš hrubý krok, může dojít k situaci, že časový krok nedokáže věrohodně popsat chování/odezvu materiálu. Proto byla provedena **analýza konvergence časového kroku**, jejímž cílem bylo nalezení maximální velikosti takových kroků, které na jednotlivých časových intervalech dokážou věrohodně popsat chování/odezvu materiálu. Při odhadu počátečního kroku této analýzy byla brána v úvahu viskoelastická povaha materiálu. Jelikož délka přechodového děje je závislá na relaxačním čase, bylo nahlédnuto do použitého materiálu (Tab. 7), kde se nejnižší relaxační čas pohybuje kolem 1 s. Aby bylo jisté, že dojde k zachycení všech dějů během této 1 s, byl tento čas rozdělen na 20 dílků. Počáteční časový krok má tedy velikost 0,05 s.

8.4.1. Konvergence časových kroků tahových zkoušek

Nejprve byla provedena analýza konvergence pro tahové zkoušky. Konvergence byla zkoumána pro všechny rychlosti na zkouškách s přetvořením do 10 %. Sledovanou veličinou bylo normálové napětí σ_n v ose x . Konkrétně obsah plochy pod křivkou pro kladné hodnoty tohoto napětí a dále maximální dosažená hodnota σ_n . Počítaný obsah plochy je patrný z Obr. 44, kde je vyznačen světle modrou barvou. Konkrétně v tomto případě se jedná o tahovou zkoušku rychlostí 100 mm/min.



Obr. 44 – Průběh normálového napětí σ_n ve směru osy x pro tahovou zkoušku 100 mm/min

Porovnání je zpracováno do Tab. 12, Tab. 13 a Tab. 14, kde **Změna 1** vyjadřuje procentuální změnu sledované veličiny vůči hodnotě předešlého časového kroku (kladná hodnota znamená nárůst sledované veličiny vůči předešlému kroku). **Změna 2** vyjadřuje procentuální změnu sledované veličiny vůči hodnotě získané při počátečním kroku 0,05 s.

Podmínkou konvergence byl stanoven 1% rozdíl hodnot dvou po sobě jdoucích sledovaných veličin (v tabulkách sloupec Změna 1). Zvolené vyhovující časové kroky jsou v tabulkách níže zvýrazněny zelenou barvou řádku.

Tah 1 mm/min						
Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]	Maximální σ_n	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]
0,05	307,098	-	-	0,629	-	-
0,1	307,098	0,00	0,00	0,629	0,00	0,00
0,2	307,098	0,00	0,00	0,629	0,00	0,00
0,4	307,221	0,04	0,04	0,629	0,00	0,00
0,8	307,221	0,00	0,04	0,629	0,00	-0,01
1,6	307,219	0,00	0,04	0,629	-0,01	-0,02
3,2	307,215	0,00	0,04	0,629	-0,05	-0,07
6,4	307,205	0,00	0,03	0,628	-0,12	-0,19
12,8	307,193	0,00	0,03	0,627	-0,13	-0,32
25,6	299,161	-2,68	-2,65	0,627	-0,06	-0,38

Tab. 12 – Konvergence časových kroků tahové zkoušky 1 mm/min

Tah 10 mm						
Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]	Maximální σ_n	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]
0,05	33,573	-	-	0,724	-	-
0,1	33,573	0,00	0,00	0,724	0,00	0,00
0,2	33,573	0,00	0,00	0,724	0,00	0,00
0,4	33,572	0,00	0,00	0,724	-0,01	-0,01
0,8	33,839	0,79	0,79	0,724	-0,03	-0,04
1,6	33,296	-1,63	-0,83	0,723	-0,13	-0,18
3,2	34,355	3,08	2,28	0,720	-0,41	-0,59
6,4	34,305	-0,14	2,14	0,713	-1,03	-1,62
12,8	33,795	-1,51	0,66	0,705	-1,15	-2,79

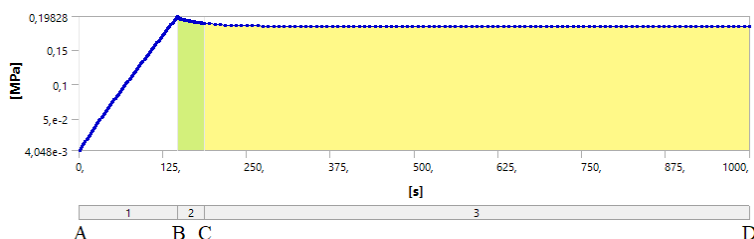
Tab. 13 – Konvergence časových kroků tahové zkoušky 10 mm/min

Tah 100 mm						
Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]	Maximální σ_n	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]
0,05	4,238	-	-	0,980		
0,1	4,238	-0,01	-0,01	0,980	0,00	0,00
0,2	4,238	0,00	-0,01	0,980	-0,01	-0,02
0,4	4,404	3,77	3,77	0,979	-0,05	-0,07
0,8	4,059	-8,51	-4,42	0,977	-0,26	-0,33
1,6	4,054	-0,10	-4,53	0,967	-0,96	-1,29
3,2	5,206	22,12	18,59	0,953	-1,48	-2,79

Tab. 14 – Konvergence časových kroků tahové zkoušky 100 mm/min

8.4.2. Konvergence časových kroků relaxačních zkoušek

V případě relaxačních zkoušek nebyla zkoumána konvergence v celém rozsahu zkoušky. Byla vytvořena zkrácená úloha s časem trvání 1000 s nárustem přetvoření pouze na první hladinu přetvoření 3 %. Opět byly vyhodnocovány obsahy ploch pod křivkou průběhu normálového napětí σ_n ve směru osy x . Interval s nárustem přetvoření na požadovanou hodnotu nebyl vyhodnocován, jelikož vliv velikosti časového kroku na kvalitu popisu a výslednou maximální hodnotu napětí byl již zjištěn u konvergence časového kroku tahových zkoušek. Optimální velikost časového kroku byla v případě intervalu B-C zkoumána pro všechny rychlosti relaxačních zkoušek (na Obr. 45 zelená oblast), pro poslední interval C-D (na Obr. 45 žlutá oblast) bylo vyhodnocení provedeno pouze pro první rychlost 1 mm/min, jelikož se jedná o velmi pozvolný pokles a nalezený časový krok bude použit i pro zbylé rychlosti na tomto intervalu.



Obr. 45 – Průběh normálového napětí σ_n ve směru osy x pro relaxační zkoušku 1 mm/min

Porovnání je uvedeno v Tab. 15 a Tab. 16. Podmínka konvergence byla opět stanovena jako 1% rozdíl hodnot dvou po sobě jdoucích kroků pro Změnu 1. Zvolené vyhovující časové kroky jsou v tabulkách níže opět zvýrazněny zelenou barvou řádku.

Relaxace 1 mm/min INTERVAL B-C				Relaxace 1 mm/min INTERVAL C-D			
Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]	Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]
0,05	7,667	-	-	2	149,890	-	-
0,1	7,667	0,00	0,00	4	149,521	-0,25	-0,25
0,2	7,667	0,00	0,00	8	150,258	0,49	0,25
0,4	7,667	0,00	0,00	16	150,260	0,00	0,25
0,8	7,667	0,00	0,00	32	147,321	-1,99	-1,74
1,6	7,667	0,00	0,01	64	153,240	3,86	2,19
3,2	7,975	3,86	3,86	128	141,556	-8,25	-5,89

Tab. 15 – Konvergence časových kroků relaxační zkoušky 1 mm/min

Relaxace 10 mm/min INTERVAL B-C				Relaxace 100 mm/min INTERVAL B-C			
Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]	Krok [s]	Obsah plochy	Změna 1 [%]	Změna 2 [%]
0,05	8,372	-	-	0,05	8,727	-	-
0,1	8,372	0,00	0,00	0,1	8,727	0,00	0,00
0,2	8,372	0,00	0,00	0,2	8,727	0,00	0,00
0,4	8,372	0,00	0,00	0,4	8,728	0,01	0,02
0,8	8,373	0,01	0,01	0,8	8,733	0,05	0,07
1,6	8,376	0,03	0,04	1,6	8,751	0,21	0,28
3,2	8,720	3,95	3,99	3,2	9,165	4,51	4,78

Tab. 16 – Konvergence časových kroků relaxačních zkoušek 10 a 100 mm/min

8.4.3. Souhrn nastavení analýz

Poté co byly nalezeny optimální velikosti časových kroků, proběhly výpočty simulací jednotlivých zkoušek. V tabulce níže je uveden souhrn nastavení časových intervalů a kroků použitých při simulacích.

Časový interval	1 mm/min		10 mm/min		100 mm/min		
	Délka časového intervalu	Časový krok	Délka časového intervalu	Časový krok	Délka časového intervalu	Časový krok	
Jednoosá tahová zkouška do 10 %							
1	499,2	12,8	50,0	0,8	5,02	0,2	[s]
2	998,4	12,8	100,1	0,8	10,04	0,2	
Jednoosá tahová zkouška do 30 %							
1	1497,6	12,8	150,1	0,8	15,07	0,2	[s]
2	2995,2	12,8	300,2	0,8	30,13	0,2	
Relaxační zkoušky							
1	146,7	3,1	14,7	0,8	1,47	0,2	[s]
2	246,7	1,6	114,7	1,6	101,47	1,6	
3	3746,7	16	3614,7	16	3601,47	16	
4	3893,4	3,1	3629,4	0,8	3602,94	0,2	
5	3993,4	1,6	3729,4	1,6	3702,94	1,6	
6	7493,4	16	7229,4	16	7202,94	16	
7	7640,1	3,1	7244,1	0,8	7204,41	0,2	
8	7740,1	1,6	7344,1	1,6	7304,41	1,6	
9	11240,1	16	10844,1	16	10804,41	16	

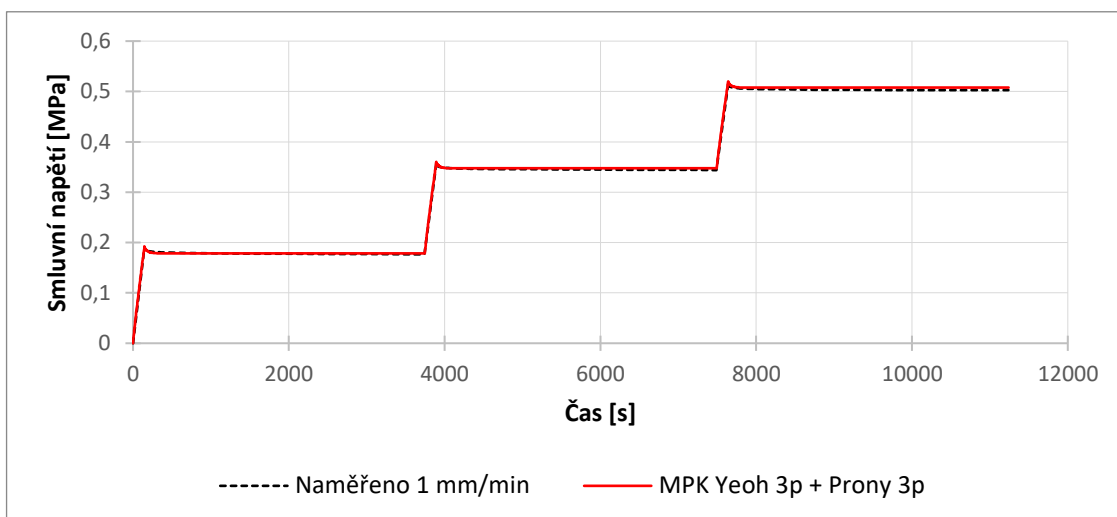
Tab. 17 – Souhrn nastavení časových intervalů a kroků

8.5. Výsledky simulací

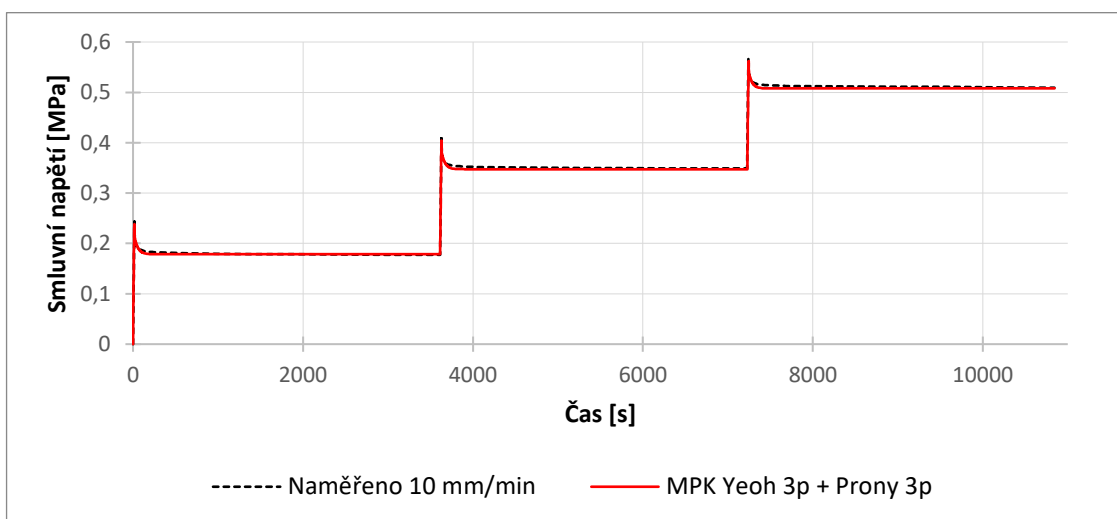
Aby bylo možné porovnat výsledky provedených zkoušek s MKP simulacemi, bylo nutné výsledné napětí a přetvoření přepočítat na smluvní hodnoty. Tyto veličiny byly poté opět zpracovány do formy grafů a pro porovnání vykresleny společně s naměřenými průběhy laboratorních zkoušek. Tyto průběhy pro materiálový model získaný fitem relaxačních křivek jsou k vidění v následující podkapitole.

Rovněž byly provedeny MKP simulace laboratorních zkoušek pro druhý materiálový model získaný fitováním naměřených hysterezních smyček. Pro simulace bylo použito stejné nastavení jako v případě prvního materiálového modelu (Tab. 17). Výsledky byly opět přepočítány na smluvní napětí, přetvoření a zpracovány do grafické podoby. Ta je uvedena v Příloze I.

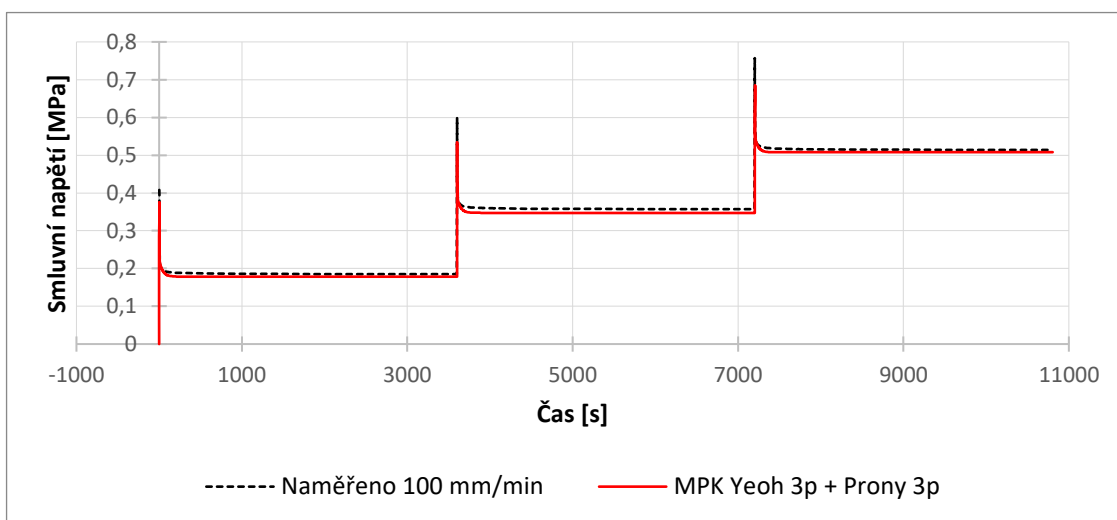
8.5.1. Výsledky pro materiálový model získaný fitem relax. křivek



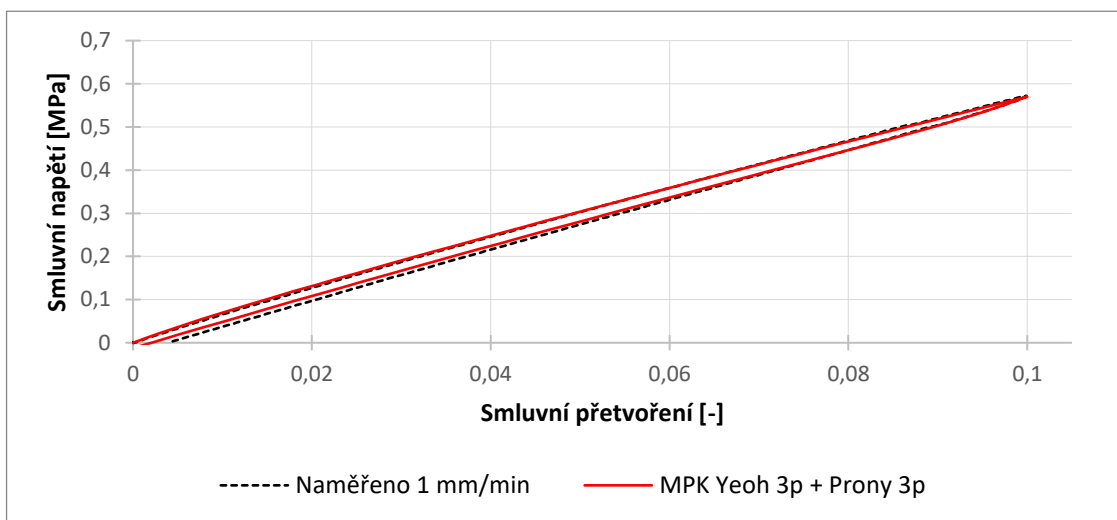
Obr. 46 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 1 mm/min



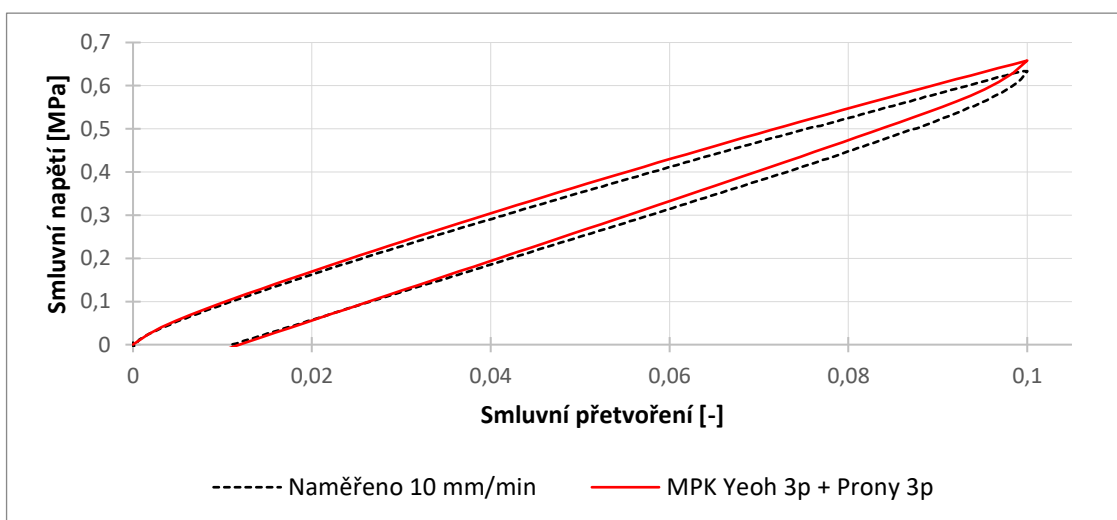
Obr. 47 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 10 mm/min



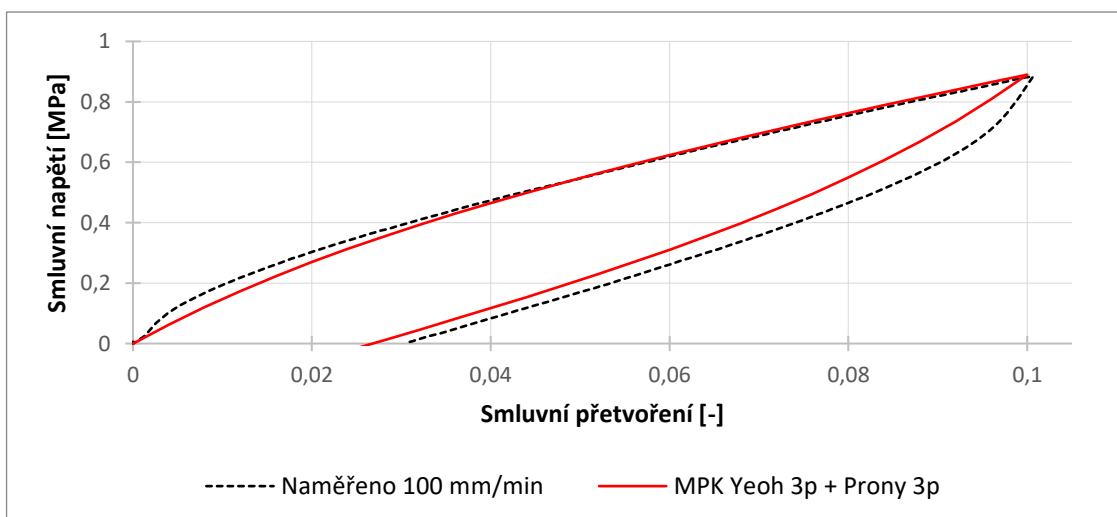
Obr. 48 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 100 mm/min



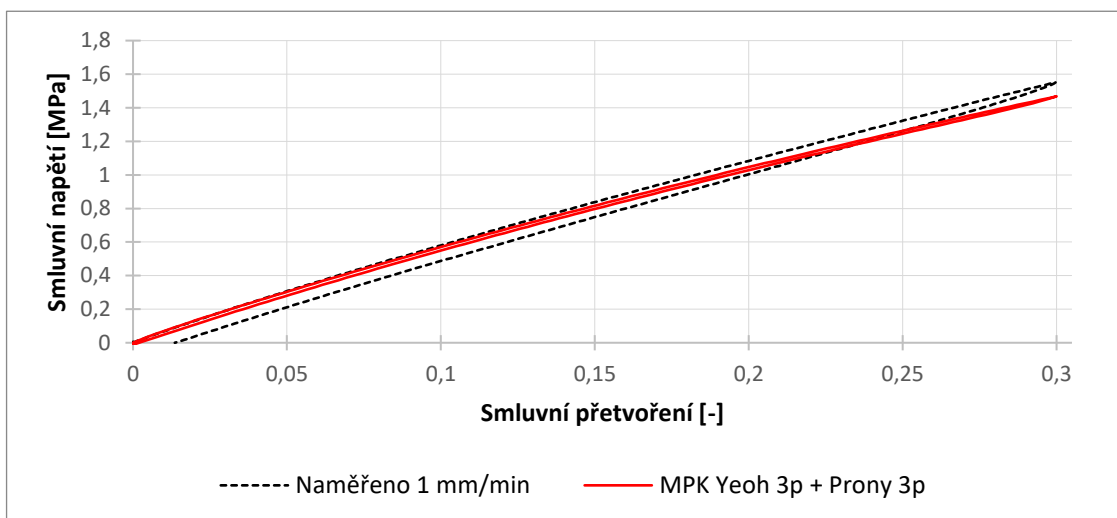
Obr. 49 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 1 mm/min



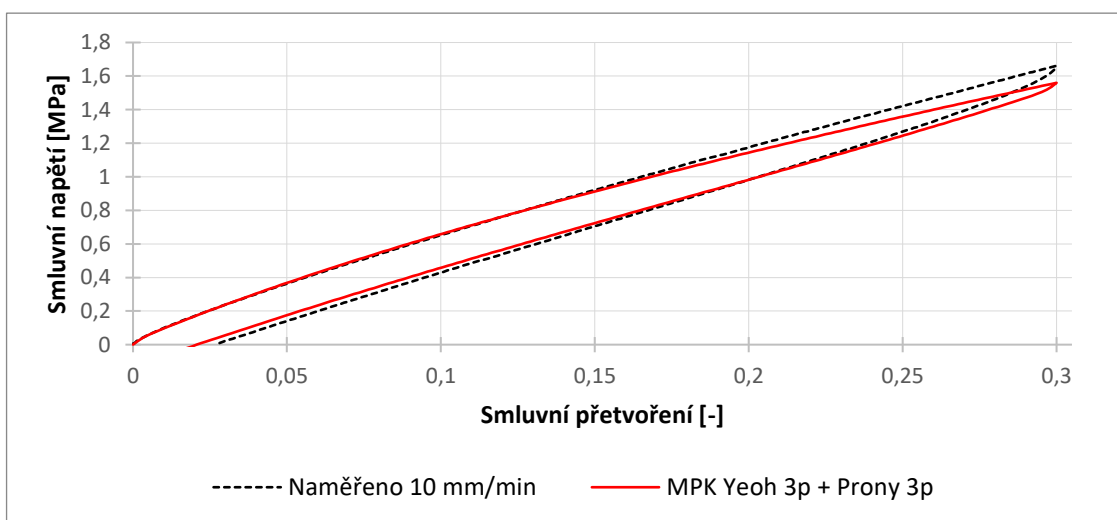
Obr. 50 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 10 mm/min



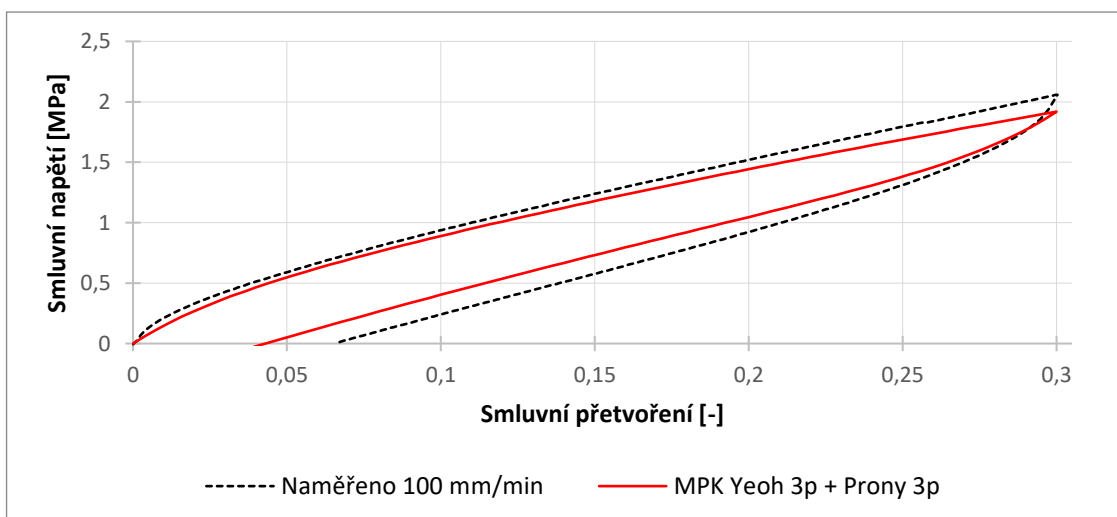
Obr. 51 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 100 mm/min



Obr. 52 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 1 mm/min



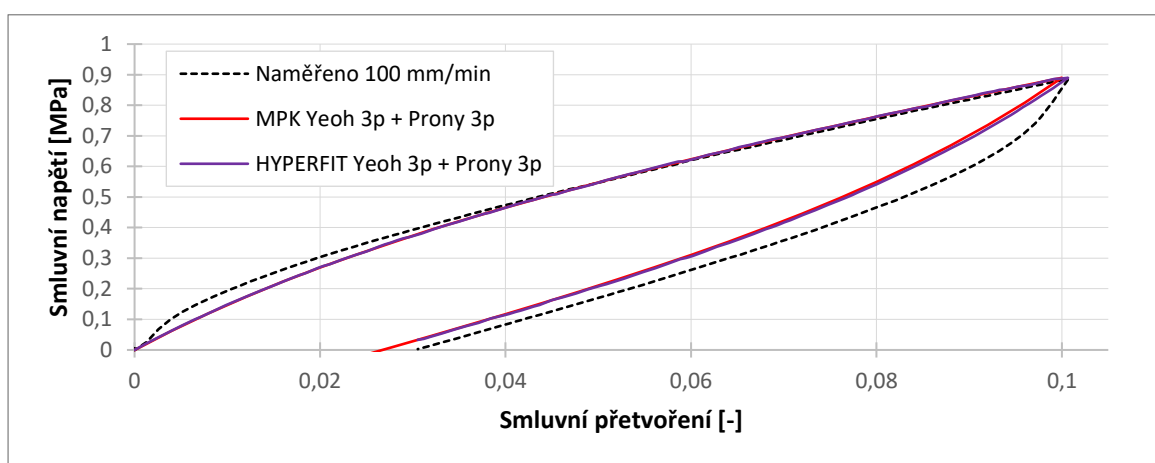
Obr. 53 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 10 mm/min



Obr. 54 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 100 mm/min

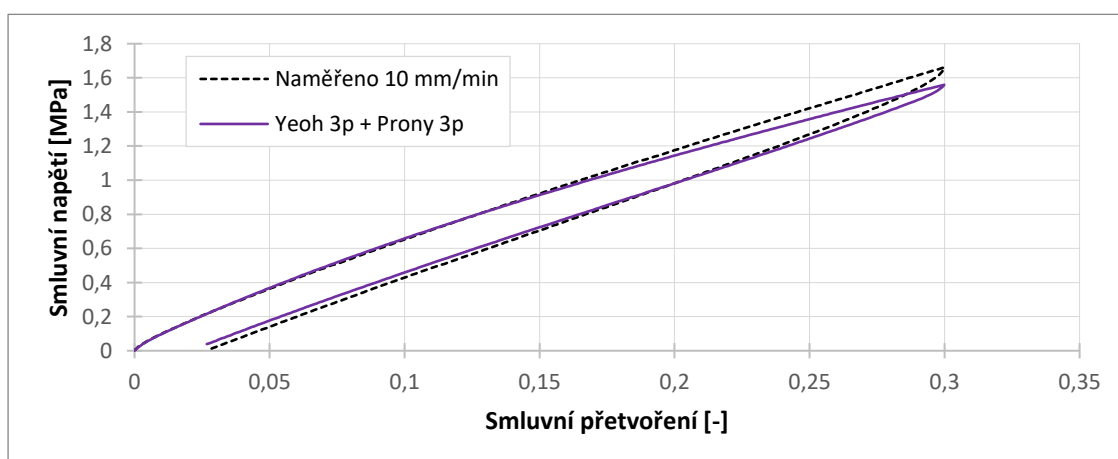
9. Diskuse

Výsledky MKP simulací byly rovněž vloženy pro porovnání do datové přílohy **Fity HYSTEREZE.xlsx** a **Fity RELAX.xlsx** a vyhodnoceny vizuálně. V těchto souborech byla nejprve pro oba nalezené materiálové modely vykreslena pouze data získaná měřením, výsledky MKP simulací a nakonec průběhy regrese z programu Hyperfit, a to pouze pro uvažovaný model (Yeoh 3p + Prony 3p). S tímto nastavením lze vidět graf jako na Obr. 55 níže. Zde si můžeme povšimnout, že regrese získané z programu Hyperfit se překrývají s výsledky MKP simulací. Pokud vezmeme v potaz určitou malou odchylku, je možné R^2 a NRMSE pro oba materiálové modely získané v programu Hyperfit (kapitola 7.2.2 tabulky Tab. 5 a Tab. 6) vztáhnout i na MKP výsledky. S nejhorším R^2 , který má hodnotu 0,985, lze konstatovat, že oba nalezené konstitutivní modely dokážou velmi dobře popsat provedené laboratorní zkoušky.



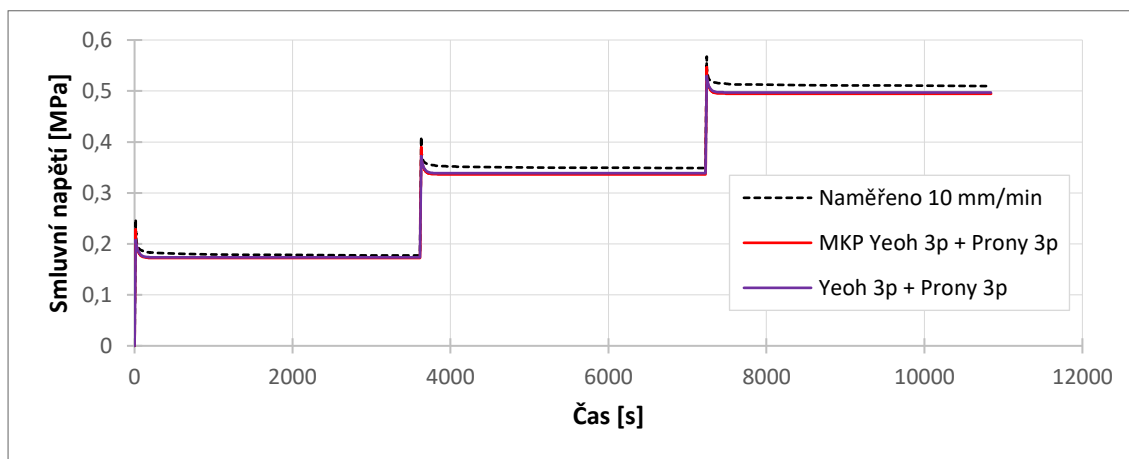
Obr. 55 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s pretvořením 30 % pro rychlost zatěžování 100 mm/min

Pokud zůstaneme u příloh s grafickými průběhy, lze si v případě materiálového modelu získaného fitem relaxačních křivek všimnout horší predikce hysterezních smyček při pretvoření do 30 %, kdy vrcholy hysterezních smyček dosahují menšího maximálního napětí, než bylo naměřeno. Tato horší predikce se dala očekávat, jelikož experimentálních data relaxačních zkoušek jsou pouze pro pretvoření do 9 %. Níže na Obr. 56 je pro ukázkou uveden průběh predikce hysterezní smyčky pro rychlost zatěžování 10 mm/min. Odchylka NRMSE tohoto modelu pro predikci hysterezních smyček je 5,96 %. To znamená, že fitem relaxačních zkoušek s pretvořením do 9 % je možné s relativně velkou přesností predikovat hysterezní chování do 30 % pretvoření.



Obr. 56 – Predikce hysterezní smyčky do 30 % pretvoření pro rychlost 10 mm/min z fitu relaxačních křivek

Pokud použijeme při simulacích model získaný fitem hysterezních smyček a zhodnotíme opět grafické průběhy, zjistíme, že získáme velmi dobrý popis hysterezního chování. V případě predikce všech relaxačních křivek ale dochází k větší konečné relaxaci napětí, než bylo zjištěno měřením, a to přibližně o 4 %. Níže na Obr. 57 je pro ukázkou uveden průběh predikce jedné z relaxačních křivek, konkrétně pro 10 mm/min. Tento rozdíl lze považovat za malý, a pokud potřebujeme najít konstitutivní model převážně pro jednoosé zatížení, jeví se jednoosé tahové zkoušky jako výhodnější, jelikož doba jejich měření je v porovnání s dobou realizace relaxačních zkoušek o poznání kratší.



Obr. 57 – Predikce relaxační křivky pro rychlost 10 mm/min z fitu hysterezních smyček

Nyní se zamyslíme nad použitelností nalezených modelů. Pro získání parametrů obou modelů byly použity zkoušky zatěžující vzorky pouze jednoosým tahovým namáháním. Proto jsou tyto modely vhodné pouze pro řešení problémů, kde se vyskytuje jednoosá napjatost. Pro nalezení univerzálnějšího materiálového modelu, který by dokázal dobře popsat chování materiálu i při dalších napěťově-deformačních stavech, jako je například dvouosá napjatost, je třeba rozšířit provedené laboratorní zkoušky. Především pro zvýšení robustnosti hyperelastické části by bylo vhodné provést navíc ekvibiaxiální zkoušky, kdy poměr rychlostí a velikostí posuvů v obou zatěžujících osách je 1:1, a dále zkoušky, kdy je vzorek namáhán smykem.

Také by stálo za úvahu provést podrobnější měření maximálního protažení materiálu před porušením a na základě výsledků přizpůsobit hodnoty zatížení při zkouškách tak, aby byla použitelnost modelu pro co největší rozsah.

10. Omezení práce

V průběhu řešení této práce se také vyskytlo několik omezení nebo byla učiněna jistá zjednodušení. První limitací byl dodaný materiál, kdy tisková laboratoř dodala vytištěné vzorky z jiného než původně zamýšleného materiálu, a to kvůli chybějícímu příslušenství k tiskárně. Tyto vytištěné vzorky byly vystaveny UV záření ve vytvrzovací stanici pouze na 12 minut, zatímco údaje pro maximální protažení uvedené výrobcem materiálu je uváděno pro vytvrzování 20 minut. Nejprve tedy proběhlo několik testovacích měření, při kterých byly zjištěny přibližné limity přetvoření pro zatěžování. Na základě těchto zjištění byly následně stanoveny hodnoty pro laboratorních zkoušky. Zkušebními testováními byl snížen celkový počet dodaných vzorků, proto byla pro snahu zvolit nižší bezpečnou hodnotu protažení při měření, aby proběhlo bezproblémové měření všech zkoušek na zbylých vzorcích.

Na základě provedených laboratorních zkoušek je nalezený konstitutivní model vhodný pro řešení problému, kde se vyskytuje jednoosá napjatost. Pokud by byl použit pro řešení problémů, při nichž se vyskytují napěťově-deformační typy stavů, které nebyly experimentálně naměřeny, je možné, že se výsledky mohou lišit. To stejné platí pro rozsah přetvoření, kdy řešený problém by neměl přesáhnout rozsah realizovaný při experimentu. To znamená maximální přetvoření 30 %.

Při hledání konstitutivního modelu byly učiněna některá zjednodušení a to, že není uvažován vliv teploty na mechanické vlastnosti materiálu a všechna měření tedy proběhla za pokojové teploty 22 °C. Vliv teploty nebyl následně uvažován také při MKP výpočtech. Dále při výběru hyperelastické části konstitutivního modelu byly brány v potaz pouze nestlačitelné materiálové modely.

Při tvorbě výpočtového modelu nebylo uvažováno reálné uchycení vzorků mezi čelisti trhačích stroje. Byla vymodelována pouze elementární krychle materiálu představující střední část vzorku za předpokladu, že měřené vzorky jsou dostatečné délky, aby nedocházelo k ovlivnění homogenní jednoosé napjatosti ve střední části vzorku.

11. Závěr

V rámci této diplomové práce byla nejprve provedena rešerše teorií potřebných pro popis mechanického chování gumy, konkrétně teorie konečných deformací. Dále jsou to teorie hyperelastivity a viskoelastivity, jelikož obě tyto teorie nejsou součástí běžných osnov magisterského studia na VŠB-TUO.

Na základě rešerše viskoelastických vlastností gum a způsobů jejich zkoušení byly zvoleny 2 druhy laboratorních zkoušek, konkrétně jednoosé tahové zkoušky a relaxační zkoušky. Při dvou jednoosých tahových zkouškách byly vzorky taženy do přetvoření 10 % nebo 30 % a poté odlehčeny do výchozího stavu. Při relaxační zkoušce byly vzorky podrobeny postupně narůstajícím hladinám přetvoření 3 %, 6 % a 9 %. Doba, po kterou byly udržovány jednotlivé hladiny přetvoření, je jedna hodina. Jelikož jsou viskoelastické vlastnosti materiálu závislé na rychlosti zatěžování byly tyto 3 zmíněné zkoušky provedeny pro různé rychlosti. Rychlost posunu příčnicku trhačích stroje byla 1, 10 a 100 mm/min. Celkově tedy proběhlo 9 zkoušek.

Hlavním cílem práce bylo najít konstitutivní model pro numerické výpočty. Pro zpracování naměřených dat a identifikaci parametrů modelu byl použit software Hyperfit. Při hledání konstitutivního modelu byly při fitování použity pouze data relaxační zkoušky nebo pouze data tahových zkoušek. Po zjištění parametrů modelu byla následně zkoumána kvalita predikce chování při zkoušce, jež nebyla použita pro fit. Při hledání konstitutivního modelu byla nejprve pozornost věnována hledání hyperelastické části. Bylo uvažováno o modelu Neo-Hooke a tříparametrickém Yeohově modelu. Na základě kvality proložení naměřených dat byl vybrán Yeohův model. V další fázi byla posuzována potřebná složitost viskoelastické části konstitutivního modelu. Pro popis viskoelastického chování byla použita Pronyho řada, kdy se začalo s jedním Maxwellovým členem a postupně se jejich počet navyšoval až do maximálního počtu čtyř. Bylo zjištěno, že se kvalita proložení a predikce výrazně nemění od 3 členů. Jako nejvhodnější konstitutivní model pro numerické výpočty byl tedy zvolen **tříparametrický Yeohův model s Pronyho řadou o třech Maxwellových členech**. Použitím vždy pouze dat jednoho typu zkoušky při fitování, vznikly dva materiálové modely o různých parametrech.

Oba materiálové modely byly následně implementovány do komerčního MKP software ANSYS Workbench verze R19.2 a byl vytvořen zjednodušený výpočtový model pro uniaxiální namáhání. Následně byly provedeny simulace laboratorních zkoušek. Výsledná data byla pro účely porovnání přepočtena ze skutečných hodnot na smluvní. Porovnáním výsledků průběhů MKP a laboratorních zkoušek lze říct, že oba nalezené modely dokážou popsat velmi dobře provedené zkoušky. Naměřená data, fity všech uvažovaných modelů a výsledky simulací byly nakonec zpracovány do grafické podoby v Microsoft Excel a jsou přiloženy v datové příloze této práce.

V závěru práce jsou zhodnocena omezení provedených zkoušek a navržena případná zlepšení v metodice zkoušení, konkrétně rozšíření laboratorních zkoušek o další typy zkoušek jako například biaxiální.

12. Bibliografie

- [1] 3D printing. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-02-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=3D_printing
- [2] BARNATT, Christopher. *3D printing*. 3rd Edition. California: CreateSpace, 2016. ISBN 978-1539655466.
- [3] EP-C5050 Wax/ Sand Mold 3D Printer. *Shining3D* [online]. 2019 [cit. 2020-03-05]. Dostupné z: <https://www.shining3d.com/solutions/ep-c5050-selective-laser-sintering-wax-sand-mold-3d-printer/>
- [4] Additive manufacturing of sand casting molds. In: *Voxeljet* [online]. [cit. 2020-03-05]. Dostupné z: <https://www.voxeljet.com/applications/sandcasting/>
- [5] Lost Wax Printing & Casting. In: *Materialise* [online]. [cit. 2020-03-05]. Dostupné z: <https://i.materialise.com/en/3d-printing-technologies/lost-wax-printing-casting>
- [6] A New Way to Heal Broken Bones: An Exoskeletal 3D Printed Cast of bones. In: *Arch2o* [online]. c2012-2020 [cit. 2020-03-05]. Dostupné z: <https://www.arch2o.com/new-way-heal-broken-bones-3d-printed-cast-3d-molds-exoskeletal/>
- [7] VENTOLA, C. Medical Applications for 3D Printing: Current and Projected Uses: Current and Projected Uses. *P & T: a peer-reviewed journal for formulary management*. MediMedia USA, Inc, 2014, **39**(10), 704-711. ISSN 1052-1372. Dostupné z: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25336867>
- [8] BOS, Freek, Rob WOLFS, Zeeshan AHMED a Theo SALET. Additive manufacturing of concrete in construction: potentials and challenges of 3D concrete printing. *Virtual and Physical Prototyping* [online]. 2016, **11**(3), 209-225 [cit. 2020-03-09]. DOI: 10.1080/17452759.2016.1209867. ISSN 1745-2759. Dostupné z: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17452759.2016.1209867>
- [9] Formlabs Flexible Resin 1L (FLGR02). In: *CREAT3D* [online]. 2020 [cit. 2020-03-26]. Dostupné z: <https://www.creat3d.shop/formlabs-resin-materials/formlabs-flexible-resin-1l.html>
- [10] Slicer (3D printing). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-03-24]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Slicer_\(3D_printing\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Slicer_(3D_printing))
- [11] ISO/ASTM 52900:2015 (en): Additive manufacturing - General principles - Terminology. In: *Online Browsing Platform (OBP)* [online]. [cit. 2020-02-24]. Dostupné z: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso-astm:52900:ed-1:v1:en>

- [12] KRUTH, J.-P., M.C. LEU a T. NAKAGAWA. Progress in Additive Manufacturing and Rapid Prototyping. *CIRP Annals*. 1998, **47**(2), 525-540. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)63240-5](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)63240-5). ISSN 0007-8506. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850607632405>
- [13] PHAM, D.T a R.S GAULT. A comparison of rapid prototyping technologies. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1998, **38**(10), 1257-1287. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(97\)00137-5](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(97)00137-5). ISSN 0890-6955. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890695597001375>
- [14] KELLY, Brett, Indrasen BHATTACHARYA, Hossein HEIDARI, Maxim SHUSTEFF, Christopher SPADACCINI a Hayden TAYLOR. Volumetric additive manufacturing via tomographic reconstruction. *Science*. 2019, **363**(6431), 1075. DOI: 10.1126/science.aau7114. Dostupné z: <http://science.sciencemag.org/content/363/6431/1075.abstract>
- [15] 3D Printing. In: *3D Hubs* [online]. 2020 [cit. 2020-03-06]. Dostupné z: <https://www.3dhubs.com/guides/3d-printing/>
- [16] MITTERAMSKOGLER, Gerald, Robert GMEINER, Ruth FELZMANN et al. Light curing strategies for lithography-based additive manufacturing of customized ceramics. *Additive Manufacturing*. 2014, **1-4**, 110-118. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addma.2014.08.003>. ISSN 2214-8604. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860414000086>
- [17] TUMBLESTON, John, David SHIRVANYANTS, Nikita ERMOSHKIN et al. Continuous liquid interface production of 3D objects. *Science*. 2015, **347**(6228), 1349. DOI: 10.1126/science.aaa2397. Dostupné z: <http://science.sciencemag.org/content/347/6228/1349.abstract>
- [18] VAROTSIS, Alkaios. Introduction to SLA 3D Printing. In: *3D Hubs* [online]. 2020 [cit. 2020-03-06]. Dostupné z: <https://www.3dhubs.com/knowledge-base/introduction-sla-3d-printing/>
- [19] GOKULDOSS, Prashanth, Sri KOLLA a Jürgen ECKERT. Additive Manufacturing Processes: Selective Laser Melting, Electron Beam Melting and Binder Jetting—Selection Guidelines. *Materials* [online]. 2017, **10**(6) [cit. 2020-03-11]. DOI: 10.3390/ma10060672. ISSN 1996-1944. Dostupné z: <http://www.mdpi.com/1996-1944/10/6/672>
- [20] BIKAS, H., P. STAVROPOULOS a G. CHRYSSOLOURIS. Additive manufacturing methods and modelling approaches: a critical review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* [online]. 2016, **83**(1-4), 389-405 [cit. 2020-03-7]. DOI: 10.1007/s00170-015-7576-2. ISSN 0268-3768. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s00170-015-7576-2>

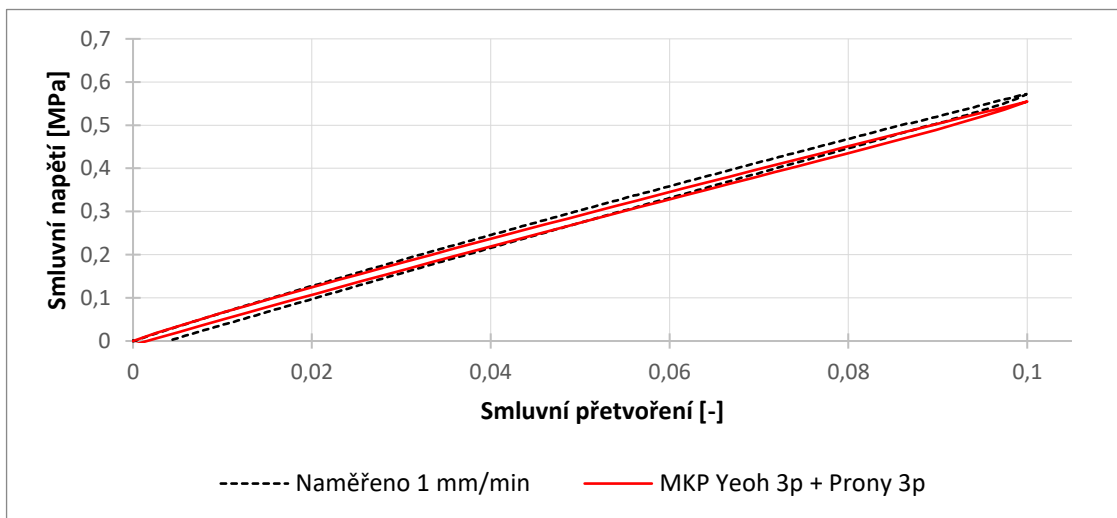
- [21] ZHAI, Yuwei, Haize GALARRAGA a Diana LADOS. Microstructure, static properties, and fatigue crack growth mechanisms in Ti-6Al-4V fabricated by additive manufacturing: LENS and EBM: LENS and EBM. *Engineering Failure Analysis*. 2016, **69**, 3-14. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.05.036>. ISSN 1350-6307. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630716303752>
- [22] HP JET FUSION 4200 series. In: *3Dees Industries s.r.o* [online]. [cit. 2020-03-13]. Dostupné z: <https://www.3dees.cz/hp-jetfusion-3d>
- [23] ADAMÍKOVÁ, A. Český design v boji proti koronaviru stojí v první linii. Ochranné pomůcky vznikají rychle a v nejlepší kvalitě. In: *Czechdesign* [online]. ©2003-2020 [cit. 2020-04-13]. Dostupné z: <https://www.czechdesign.cz/temata-a-rubriky/cesky-design-v-boji-proti-koronaviru-stoji-v-prvni-linii-ochranne-pomucky-vznikaji-rychle-a-v-nejlepsi-kvalite>
- [24] GIBSON, I., D. ROSEN a B. STUCKER. *Additive manufacturing technologies: rapid prototyping to direct digital manufacturing*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-1119-3.
- [25] PRŮVODCE MATERIÁLY. In: *Prusa Research a.s* [online]. 2020 [cit. 2020-03-10]. Dostupné z: <https://www.prusa3d.cz/materialy/>
- [26] Benefits of Wire vs. Powder Metal 3D Printing. In: *Sciaky Inc.* [online]. 2020 [cit. 2020-03-10]. Dostupné z: <https://www.sciaky.com/additive-manufacturing/wire-vs-powder>
- [27] GONG, Xibing, Ted ANDERSON a Kevin CHOU. Review on powder-based electron beam additive manufacturing technology. *Manufacturing Review* [online]. 2014, **1** [cit. 2020-03-13]. DOI: 10.1051/mfreview/2014001. ISSN 2265-4224. Dostupné z: <http://mfr.edp-open.org/10.1051/mfreview/2014001>
- [28] MOORE, Jacob a Christopher WILLIAMS. Fatigue properties of parts printed by PolyJet material jetting. *Rapid Prototyping Journal* [online]. 2015, **21**(6), 675-685 [cit. 2020-03-10]. DOI: 10.1108/RPJ-03-2014-0031. ISSN 1355-2546. Dostupné z: <https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/RPJ-03-2014-0031/full/html>
- [29] XJet's NanoParticle Jetting™ (NPJ). In: *Xjet* [online]. 2018 [cit. 2020-03-10]. Dostupné z: <https://www.xjet3d.com/technology/>
- [30] Laminated object manufacturing. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-03-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Laminated_object_manufacturing
- [31] NGO, Tuan, Alireza KASHANI, Gabriele IMBALZANO, Kate NGUYEN a David HUI. Additive manufacturing (3D printing): A review of materials, methods, applications and challenges. *Composites Part B: Engineering*. 2018, **143**, 172-196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.02.012>. ISSN 1359-8368. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836817342944>

- [32] FORM 3 BASIS 3D Printer, Form 3 Basic. In: *Reichelt elektronik GmbH & Co. KG* [online]. [cit. 2020-03-24]. Dostupné z: <https://www.reichelt.com/de/en/3d-printer-form-3-basic-br-form-3-basis-p255369.html>
- [33] Introducing the Form 3 and Form 3L, Powered by Low Force Stereolithography. In: *Formlabs* [online]. 2020 [cit. 2020-03-24]. Dostupné z: <https://formlabs.com/blog/introducing-form-3-form-3l-low-force-stereolithography/>
- [34] Formlabs Engineering Resins (konstrukční pryskyřice). In: *3Dwiser: Power of 3D printing* [online]. 2020 [cit. 2020-03-24]. Dostupné z: <https://eshop.3dwiser.com/pryskyrice/formlabs-engineering-resins/>
- [35] FUSEK, Martin a Radim HALAMA. *MKP a MHP* [online]. Ostrava: VŠB-TU, 2011 [cit. 2020-03-16]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecnych_prvku_a_hranicnich_prvku.pdf
- [36] BURŠA, Jiří. *Konstitutivní vztahy materiálů: Studijní opory FSI VUT* [online]. Brno: FSI VUT, 2018 [cit. 2020-02-26]. Dostupné z: <http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Konstitutivni%20modely.7z>
- [37] Finite strain theory. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-03-15]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory
- [38] HACKETT, Robert M. *Hyperelasticity primer*. New York, NY: Springer Science+Business Media, 2018. ISBN 978-3-319-73200-8.
- [39] Stress measures: Relations between stress measures. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-04-16]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_measures#Relations_between_stress_measures
- [40] MALACHOWSKI, Jerzy, Pawel BARANOWSKI, Roman GIELETA a Łukasz MAZURKIEWICZ. Rubber Structure under Dynamic Loading – Computational Studies. *Engineering Transactions*. 2013, **61**, 33–46.
- [41] Viscoelasticity. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-02-26]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Viscoelasticity>
- [42] Hyperelastic material. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic_material
- [43] *ANSYS Mechanical APDL, Release R1: CHAPTER 4: STRUCTURES WITH MATERIAL NONLINEARITIES – 4.6 Hyperelasticity* [online]. Help System, User's guides, ANSYS, Inc, 2020 [cit. 2020-04-17]. Dostupné z: <https://ansyshelp.ansys.com/>

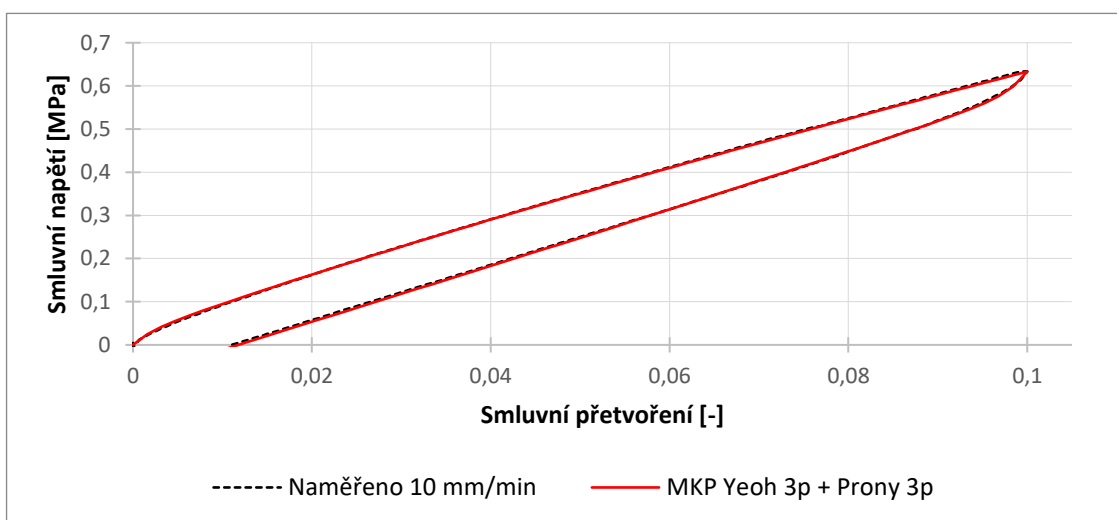
- [44] *Hyperfit: dokumentace softwaru*. Brno, c2009-2017. Dostupné z: <http://www.hyperfit.wz.cz/>
- [45] POLZER, Stanislav. *Mechanika plastů a kompozitů: Studijní opory Aplikované mechaniky* [Prezentace]. Ostrava, 2020 [cit. 2020-03-16].
- [46] BURŠA, Jiří. *Nelineární mechanika: Studijní opory FSI VUT* [online]. Brno, b.r. [cit. 2020-03-16]. Dostupné z: <http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Opory-nelmech.7z>
- [47] Arruda–Boyce model. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-03-19]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Arruda%E2%80%93Boyce_model
- [48] Creep (deformation). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-02-29]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Creep_\(deformation\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Creep_(deformation))
- [49] Stress relaxation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2020-02-29]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_relaxation
- [50] TAMÁS, Péter, Attila BOJTOS, Annamária DÉCSEI-PARÓCZI a Tamás FEKETE. *Metody konečných prvků: Studijní opory BME MOGI* [online]. Budapešť: BME MOGI, 2014 [cit. 2020-04-01]. ISBN 978-963-313-145-9. Dostupné z: http://moodle.autolab.uni-pannon.hu/Mecha_tananyag/vegeselem_modszerek/
- [51] BRINSON, Hal a L. BRINSON. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity* [online]. Boston, MA: Springer US, 2008 [cit. 2020-04-14]. DOI: 10.1007/978-0-387-73861-1. ISBN 978-0-387-73860-4.
- [52] KELLY, PA. *Lecture Notes - An introduction to Solid Mechanics: Studijní opory The University of Auckland* [online]. Auckland: The University of Auckland, b.r. [cit. 2020-04-15]. Dostupné z: http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_I/index.html
- [53] FINDLEY, William, James LAI a Kasif ONARAN. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials: with an introduction to linear viscoelasticity* [online]. New York: Dover, 1976 [cit. 2020-02-26]. ISBN 978-0-486-66016-5. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpCRNVMWI3/creep-relaxationnonlinear/creep-relaxation-nonlinear>
- [54] JIRÁSEK, Milan a Jan ZEMAN. *Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození* [online]. 2. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2012 [cit. 2020-02-27]. ISBN 978-80-01-05064-4. Dostupné z: https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/0/06/https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/0/06/Jirasek_and_Zeman_-_2012_-_Přetváření_a_porušování_materiálů.pdf

- [55] *Reologie - Časová závislost vztahu deformace a napětí, viskoelastické látky: Studijní opory MFF CUNI* [online]. Praha: MFF CUNI, b.r. [cit. 2020-04-15]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html
- [56] *ANSYS Mechanical APDL, Release R1: CHAPTER 4: STRUCTURES WITH MATERIAL NONLINEARITIES – 4.9 Viscoelasticity* [online]. Help System, User's guides, ANSYS, Inc, 2020 [cit. <https://ansyshelp.ansys.com/>].
- [57] SIMO, J.C. a L. VU-QUOC. A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* [online]. 1986, **58**(1), 79-116 [cit. 2020-04-16]. DOI: 10.1016/0045-7825(86)90079-4. ISSN 00457825. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782586900794>
- [58] HOLZAPFEL, G. A. On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. John Wiley & Sons, Ltd, 1996, **39**(22), 3903-3926. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3903::AID-NME34>3.0.CO;2-C. ISSN 0029-5981. Dostupné z: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3903::AID-NME34>3.0.CO;2-C](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3903::AID-NME34>3.0.CO;2-C)

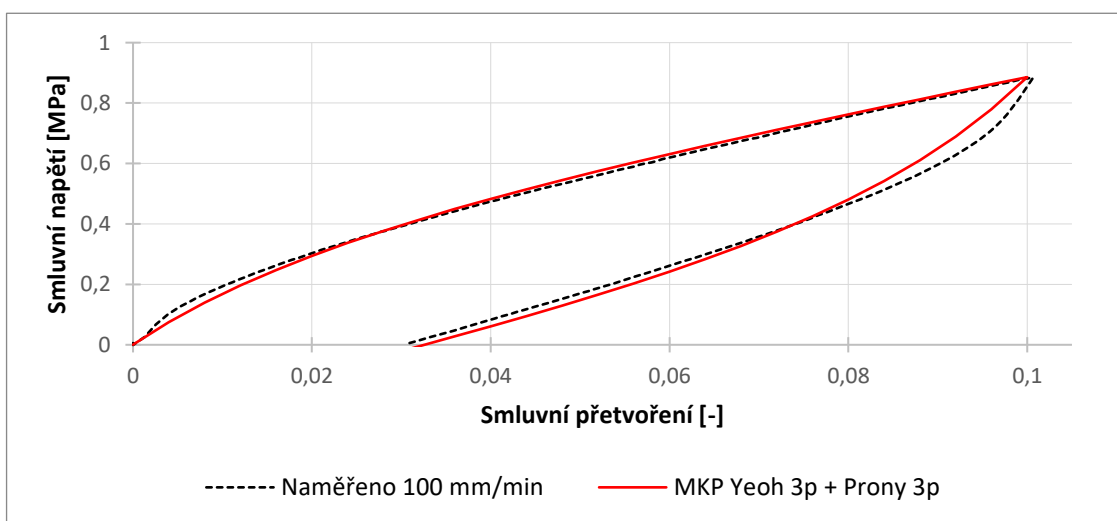
Příloha I – Výsledky pro materiálový model získaný fitem hysterezních smyček



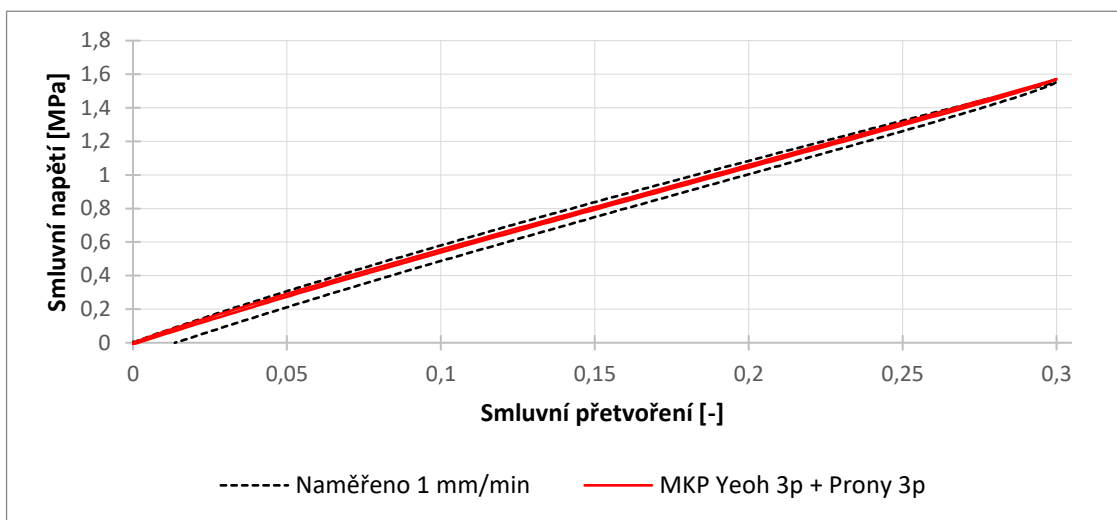
Obr. 58 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 1 mm/min



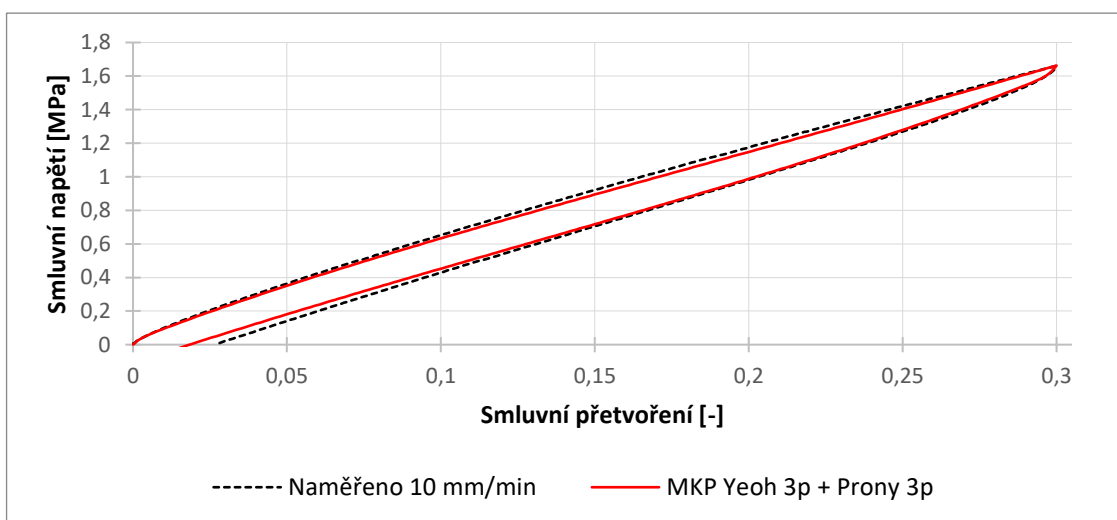
Obr. 59 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 10 mm/min



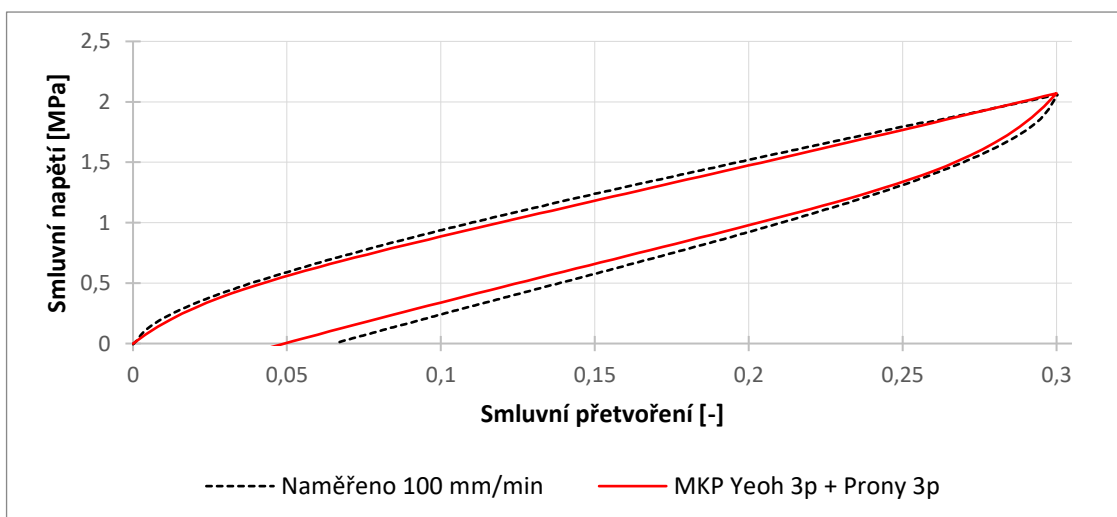
Obr. 60 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 10 % pro rychlost zatěžování 100 mm/min



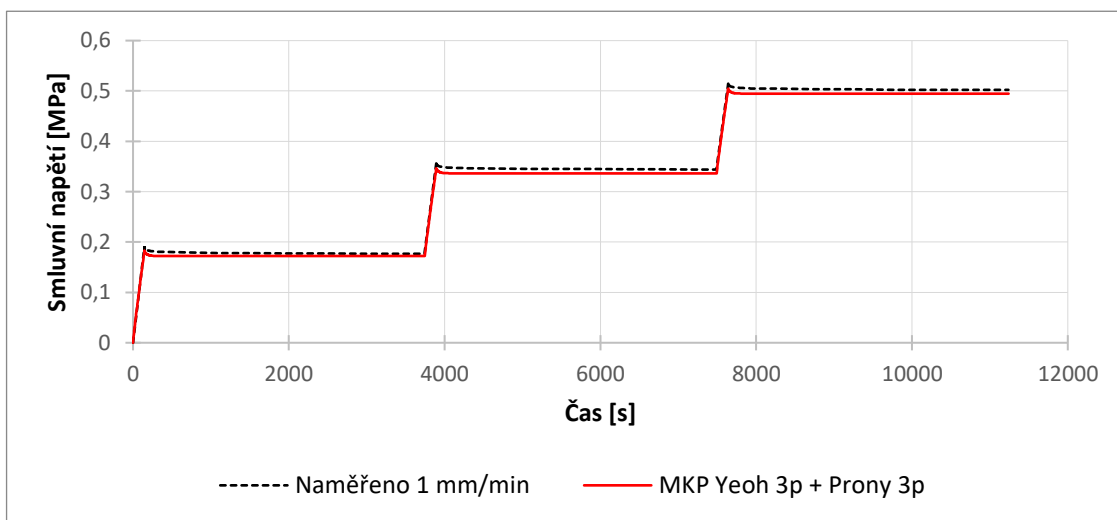
Obr. 61 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 1 mm/min



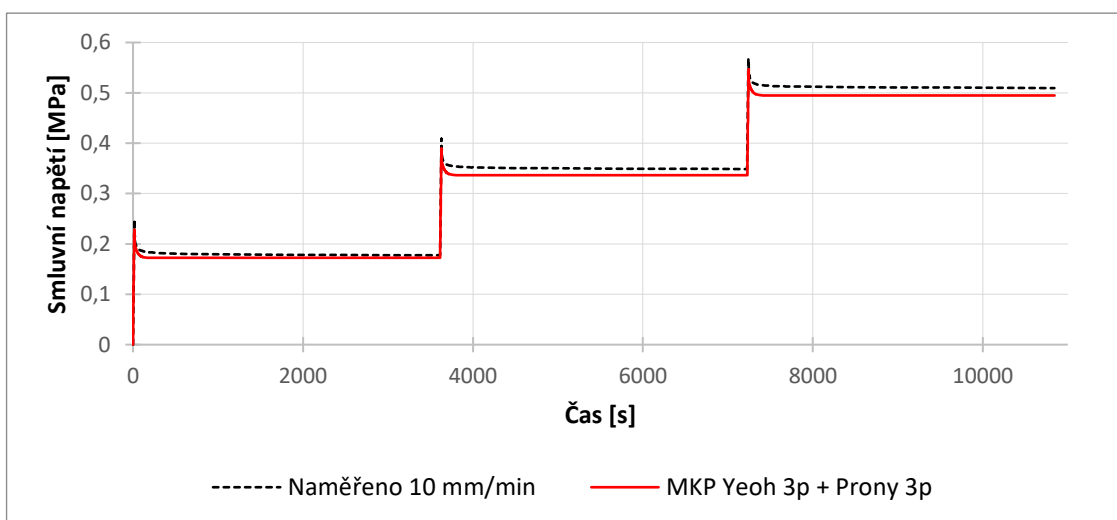
Obr. 62 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 10 mm/min



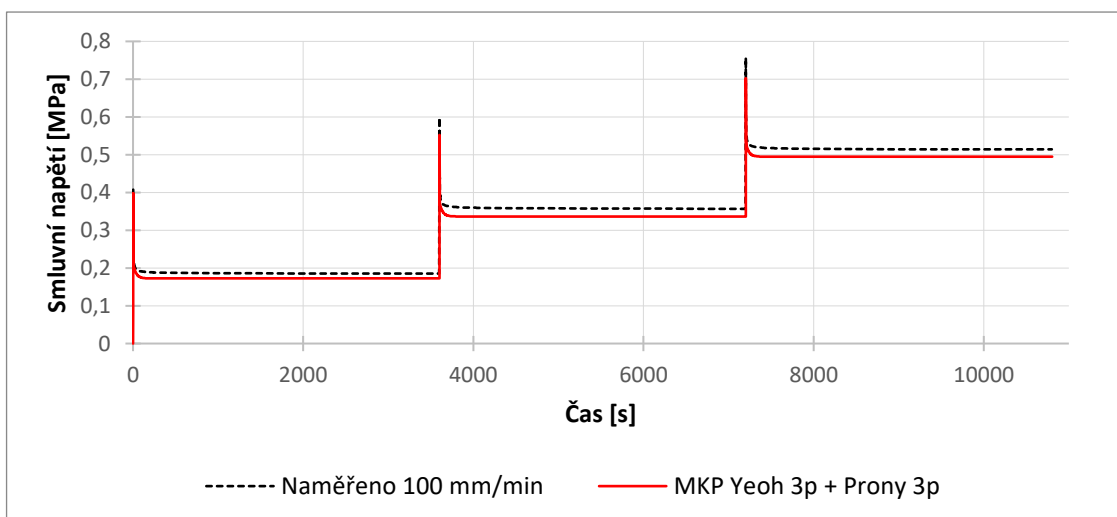
Obr. 63 – Pracovní diagram jednoosé tahové zkoušky s přetvořením 30 % pro rychlost zatěžování 100 mm/min



Obr. 64 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 1 mm/min



Obr. 65 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 10 mm/min



Obr. 66 – Relaxační zkouška pro rychlost zatěžování 100 mm/min