AS CONDIÇÕES NNT E NNR NA REALIZAÇÃO DE UM REFERENCIAL

NNT and NNR conditions in the realization of a referential

JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO
galera@prudente.unesp.br
Departamento de Cartografia
FCT UNESP - Campus de Presidente Prudente/SP

RESUMO

Nessa contribuição são apresentados os fundamentos teóricos envolvidos na inserção das condições NNT (*No Net Translation*) e NNR (*No Net-Rotation*) na realização de um referencial global. Além disto, são apresentados aspectos concernentes a implementação, com especial destaque para a realização de um referencial advindo de observações VLBI, onde comparece apenas informação de escala.

ABSTRACT

In this paper the theoretical fundamentals related to the introduction of NNT (No Net Translation) and NNR (No Net-Rotation) conditions in the realization of a referential are presented. Moreover, aspects related to the implementation are also presented, with special emphasis on the realization from VLBI data, where only scale information is available.

1. INTRODUÇÃO

Nas publicações sobre as realizações do ITRS (*International Terrestrial Reference System*) é comum encontrar os termos NNT e NNR. Tratam-se de condições impostas quando na realização de um sistema de referência global, as quais são introduzidas na forma de injunções. Elas se fazem necessárias pelo fato do sistema de equações envolvidas no ajustamento apresentar deficiência de posto (*rank defect*). O objetivo dessa contribuição é apresentar os fundamentos matemáticos envolvidos nas condições NNT e NNR e descrever como elas podem ser implementadas no ajustamento, visando à realização de um referencial com característica global.

2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA ENVOLVIDA

Admitindo-se que uma rede estática tri-dimensional apresente deficiência de posto em termos de origem e orientação, não se teria como obter as coordenadas da mesma, pois o sistema de equações normais seria singular, apresentando deficiência de posto igual a seis. Desta forma, tem-se que introduzir informações adicionais para poder solucionar o problema. Uma solução poderia ser mediante a introdução de pontos com coordenadas conhecidas, situação normalmente utilizada na densificação de redes geodésicas. Mas para uma rede global, onde não se assume a priori o conhecimento das coordenadas de nenhuma das estações, o mais adequado para eliminação dessa deficiência é mediante a introdução das condições NNT e NNR (ANGERMANN et al., 2003).

Uma rede que cumpre a condição NNT significa que ela é livre de translação. Para uma rede estática, vinculada a uma rede de ordem superior, essa condição é de certa forma trivial. Nesse caso, trata de uma densificação, onde as coordenadas das estações de ordem superior serão consideradas como fixas ou fiduciais, eliminado-se a deficiência de posto. Mas a condição de NNT pode ser em relação ao baricentro das coordenadas aproximadas, levando a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{x}_i = 0 \tag{01}$$

sendo m o número de estações da rede e $\Delta\vec{x}_i$ o vetor das correções aos parâmetros aproximados. Logo, essa condição pode ser representada por:

$$H_T \Delta\vec{x} = 0\,. \tag{02}$$

Nesse caso, a matriz H_T será dada por:

$$H_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{03}$$

Essa condição garante que não há alteração do baricentro das coordenadas aproximadas após o ajustamento. Em termos de orientação, deve-se garantir a minimização da rotação em relação aos valores aproximados. Logo, essa condição pode ser dada por:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i^0 \times \Delta\vec{x}_i = 0 \tag{04}$$

A condição representada pela equação (04), após o desenvolvimento do produto vetorial, é dada por:

$$H_{or}\Delta\vec{x} = 0 \tag{05}$$

sendo que a matriz H_{or} terá a seguinte estrutura:

$$H_{or} = \begin{pmatrix} 0 & Z_0^1 & -Y_0^1 & \dots & 0 & Z_0^m & -Y_0^m \\ -Z_0^1 & 0 & X_0^1 & \dots & -Z_0^m & 0 & X_0^m \\ -Y_0^1 & -X_0^1 & 0 & \dots & -Y_0^m & -X_0^m & 0 \end{pmatrix} \tag{06}$$

com $X_0^i, Y_0^i \; e \; Z_0^i = \vec{x}_i^0$ representando as coordenadas aproximadas das estações envolvidas na rede.

É conveniente ressaltar, para fins de esclarecimento ao leitor, que essas condições correspondem às injunções internas que comparecem no ajustamento livre (MONICO, 1988; MONICO, 1995).

Quando se trata da realização de um referencial cinemático, isto é, um referencial tetra-dimensional (4D), então comparece a evolução temporal das coordenadas das estações. Em termos de condição NNT, a realização deve cumprir a seguinte condição:

$$\Delta\vec{v}_M = \sum_{i=1}^{m} \Delta\vec{v}_i = 0 \tag{07}$$

Considerando que no ajustamento se tem o seguinte:

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i^0 + \Delta x_i, \quad \text{e} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i^0 + \Delta\vec{v}_i \tag{08}$$

a rede de valores aproximados (atribuídos a priori) é livre de translação se a seguinte equação é garantida:

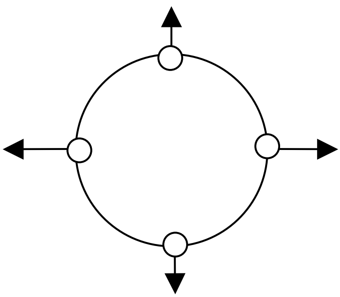
$$\sum_{i=1}^{m} \vec{v}_i^0 = 0 \tag{09}$$

algo que geralmente ocorre na prática, pois como se tratam de valores bem pequenos, a eles são atribuídos valores nulos. Na equação (08), $\vec{v}_i$ é o vetor das velocidades, $\vec{v}_i^0$ o vetor das velocidades aproximadas e $\Delta\vec{v}$ as correções aos valores aproximados. Já para a solução da rede, a condição é dada por:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{v}_i = 0 \tag{10}$$

Observe que a condição NNT, bem como a condição NNR, deve constar da definição de *datum*, usada para solucionar problemas de deficiência de rede. Como a translação da rede pode ser pensada como um movimento linear do seu baricentro, a condição de NNT pode ser simplesmente escrita como a equação (01). Essa condição garante que a relação entre a rede e o geocentro não muda com respeito à época de referência. A figura 1 ilustra o caso de uma rede em que a condição NNT é garantida. Como os módulos dos vetores são iguais, apesar de sentido diferentes, a resultante do movimento é nula, ou seja, sem translação.

Figura 1: Rede que cumpre a condição NNT



Num referencial cinemático, a condição NNR também deve levar em consideração a evolução temporal da rede, além da condição expressa pela equação (05). Nesse caso, a condição é que se deve minimizar a razão de variação (*rate*) da rotação, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i^0 \times \vec{v}_i^0 = const. \tag{11}$$

o que garante a conservação do momento angular. Considerando a equação (08), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \left((\vec{x}_i^0 \times \vec{v}_i^0) + (\Delta\vec{x}_i \times \vec{v}_i^0) + (\vec{x}_i^0 \times \Delta\vec{v}_i) + (\Delta\vec{x}_i \times \Delta\vec{v}_i) \right) \tag{12}$$

Combinando as equações (11) e (12) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(((\Delta\vec{x}_i \times \vec{v}_i^{\,0}) + (\vec{x}_i^{\,0} \times \Delta\vec{v}_i) + (\Delta\vec{x}_i \times \Delta\vec{v}_i)\Big) = 0 \qquad (13)$$

Se os valores aproximados estivem próximos dos valores estimados, o último termo da equação (13) pode ser desprezado. Logo, considerando a realidade atual, a equação (13) pode ser re-escrita como:

$$\sum_{i=1}^{m}\Big((\Delta\vec{x}_i \times \vec{v}_i^{\,0}) + (\vec{x}_i^{\,0} \times \Delta\vec{v}_i)\Big) = 0\,. \qquad (14)$$

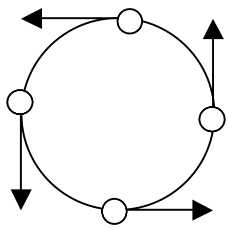
Analisando o trabalho referente a produção do ITRF2000 (ALTAMIMI et al., 2002), pode-se observar que apenas a segunda parte da equação (14) foi aplicada, juntamente com o que estabelece a equação (05), restrita a apenas 50 estações. Nesse caso, a equação (14) tomou a seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{NVor} H_{or_i}\Delta\vec{v}_i = 0 \qquad (15)$$

com *NVor* sendo o número de vértices que participam da realização da condição. As colunas correspondentes às estações não participantes da condição são preenchidas com zeros.

A figura 2 ilustra a condição de uma rede que cumpre a condição de NNR. Observe que a resultante da rotação será nula.

Figura 2: Rede que cumpre a condição NNR



3. IMPLEMENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES NNT E NNR

Para apresentar a implementação das condições de NNT e NNR, um exemplo bastante ilustrativo é o caso de uma rede VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) global, com estimativas de posição e velocidade. Como se sabe, os resultados advindos do VLBI proporcionam apenas escala, sendo deficiente em origem e orientação. Então, o modelo original será dado por:

$$A\Delta x - y = 0 \tag{16}$$

Sua solução por mínimos quadrados, no espaço dos parâmetros, terá deficiência de posto. Nessa expressão, A é a matriz dos coeficientes e Δx o vetor de correção aos parâmetros aproximados x_0 (posições e demais elementos envolvidos na solução), com y o vetor das observações. Logo, as condições representadas pelas equações (02) e (05) devem-se introduzidas no que se diz respeito às coordenadas. Nesse caso tem-se:

$$\begin{aligned} &A\Delta x - y = 0 \\ &H_T \Delta x = 0 \\ &H_{or} \Delta x = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

podendo-se então obter a solução final por:

$$(N + H_T{}^T H_T + H_{or}{}^T H_{or})\Delta x = U \tag{18}$$

com

$$\begin{aligned} &N = (A^T PA) \\ &U = (A^T Py) \end{aligned} \tag{19}$$

Quando se dispõe de um longo período de soluções VLBI (x_i i=1,...,k), pode-se estimar uma única solução numa determinada época com as respectivas velocidades das estações. Nessa estimativa pode-se introduzir a condição NNR com respeito à razão da variação da orientação. Assumindo-se que os valores aproximados das velocidades sejam nulos, basta aplicar a equação (15), substituindo $\Delta\vec{v}_i$ por $\vec{v}_i$.

Nesse caso, o modelo é dado por:

$$\begin{aligned} &x_1 = x(t_0) + v(t_1 - t_0) \\ &x_2 = x(t_0) + v(t_2 - t_0) \\ &\ldots \\ &x_k = x(t_0) + v(t_k - t_0) \\ &0 = H_{or} v \end{aligned} \tag{20}$$

tendo o seguinte conjunto de equações normais, após aplicar as condições NNT e NNR:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} N_i + H_T{}^T H_T + H_{or}{}^T H_{or} & \sum_{i=1}^{k} N_i (t_i - t_0) \\ \sum_{i=1}^{k} N_i (t_i - t_0) & \sum_{i=1}^{k} N_i (t_i - t_0)^2 + H_{or}{}^T H_{or} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - x^0(t_0)) \\ \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_0) N_i (x_i - x^0(t_0)) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Observe que cada uma das equações normais N_i está isenta das condições NNT e NNR aplicada em cada uma das soluções individuais (equação 18), sendo que na solução final essas condições foram aplicadas apenas uma vez. Deve-se notar que a condição NNR foi também aplicada ao vetor de velocidade, mas apenas no que diz respeito à segunda parte da equação (14). Desta forma, para obter a solução final dada pela equação (21), há a necessidade de conservar a equação normal advinda de cada solução.

4. COMENTARIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Nessa contribuição foram apresentados os conceitos de NNT e NNR, normalmente aplicados nas realizações de referenciais geodésicos terrestres para solucionar o problema de deficiência de informações (origem e orientação) na obtenção de coordenadas. Uma forma de implementação dos mesmos também foi apresentada. Uma característica muito importante nesse tipo de solução é que essas condições sejam inseridas uma única vez na solução final. Para tanto, deve-se preservar a equação normal N_i de cada solução individual, ou apresentar todas as informações necessárias, de modo que a mesma possa ser recuperada. Caso contrário, a solução final não estará de acordo com o estipulado na teoria.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi realizado durante intercâmbio científico junto ao DGFI (Munich) e Universidade de Hannover (Hannover), ambos na Alemanha, durante os meses de junho e julho de 2004, com suporte financeiro da CAPES e do DAAD.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTAMIMI Z., SILLARD P., BOUCHER C. ITRF2000: An New Release of the International Terrestrial Reference Frame For Earth Scicnes Applications, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107 NO. B10, 2214, 2002.

ANGERMANN D., DREWES D., GERSTIL M., KELM R., KRUGEL M, MEISEL B. ITRF Combination – Status and Recommendations for Future GPS, *Proceedings of IAG 2003 Assembly*, SAPORRO, 2003.

MONICO J. F. G. *High Precision Inter-continental GPS Network*, PhD Thesis, The University of Nottingham, 205p., 1995.

MONICO J. F. G. *Ajustamento e Análise Estatística de Observações Aplicados na detecção de deformações*, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, Curitiba, 1988.

(Recebido em outubro/04. Aceito em janeiro/05.)