

整数アセット・アセットバランス・非分割・入木・ ホップ数を考慮したネットワーク設計モデル

片山直登

1 はじめに

ネットワーク設計問題は、費用を最小化するようにノードまたはアークを選択してネットワークを形成し、ネットワーク上のフローを求める問題 (Magnanti and Wong 1984, Wong 1984, 1985, Minoux 1989) である。ここでは、アークを選択するネットワーク設計問題を対象とする。ネットワーク設計問題には様々な条件を付加された問題が研究されており、よく知られたものとして、多品種とアーク容量を考慮した問題は容量制約をもつネットワーク設計問題とよばれている (Katayama 2015, Paraskevopoulos et al. 2016, Gendron et al. 2016, Momeni and Sarmadi 2016, Yaghini et al. 2016)。

近年、現実問題に即した条件を付加した問題の研究が盛んに行われるようになってきている。ネットワーク上のアセット (資産) のバランスを考慮したアセットバランス問題 (Pedersen et al. 2009, Chouman and Crainic 2011, Vu et al. 2013, Bai et al. 2018)、始点・終点間をフローが流れるパスを一意とする非分割フロー問題 (Hewitt et al. 2010, Yaghini and Kazemzadeh 2012, Hewitt et al. 2013, 片山 2018)、階段状や区分的線形費用を考慮する問題や整数アセットをもつ問題 (Muriel and Munshi 2004, Kim et al. 2006, Croxton et al. 2007, Frangioni and Gendron 2009, Gendron and Gouveia 2014)、同一終点をもつフローが入木となることを考慮する問題 (Farvolden and Powell 1994, Hoppe et al. 1999, Jarrah et al. 2009, Erera et al. 2012, 片山 2016)、始点・終点間のフローが経由するノード数であるホップ数を制限する問題 (Thiongane et al. 2015, Katayama 2016) などがある。さらに、需要の不確実性を考慮する問題 (Rahmaniani et al. 2018)、複数種類のアセットを考慮する問題 (Crainic et al. 2018) など多数存在している。

本研究では、これらの付加的な条件のうち、整数アセット、アセットバランス、非分

割フロー，入木およびホップ数制限を同時に考慮する問題を取り上げる．この問題に対するアークフローを用いたモデル，パスフローを用いたモデルおよび入木フローを用いたモデルを示す．さらに，アークフローを用いたモデルに対して，汎用の最適化ソルバーによる数値実験を行い，それぞれの条件が問題の困難性に与える影響を明らかにする．

2 定式化

2.1 前提条件と定義

はじめに，整数アセット・アセットバランス・非分割・入木・ホップ数を考慮したネットワーク設計（IAUTHND）問題の前提条件を示す．

- 1) ノード集合が与えられる．
- 2) 向きをもつアーク候補集合が与えられる．
- 3) 品種集合と需要が与えられる．品種は異なる始点・終点をもち，始点・終点の対で表す．
- 4) アーク上に，整数個のアセットを割り当てることができる．
- 5) 1つのアセットには，アークごとに一定の容量が与えられる．
- 6) アーク上を流れるフロー量は，アークに割り当てられたアセット容量以下である．
- 7) 品種の始点・終点間フローは，単一のパス上を流れる．
- 8) 同一の終点をもつ品種のフローは，終点を根とする入木上を流れる．
- 9) 当該アークを終点とするアセット数の合計と当該アークを始点とするアセット数の合計は一致する．
- 10) 品種の始点と終点間のホップ数に上限がある．
- 11) アークに割り当てられるアセットに対する単位当たりの固定費用が与えられる．
- 12) アーク上を移動するフローに対して，品種ごとの単位当たりのフロー費用が与えられる．
- 13) フローに関する変動費用とアークに関する固定費用の総和を最小化するアーク上のアセットおよびフローを求める．

条件4) から6) は，アーク上の容量およびアセット数の離散条件であり，整数アセット条件を表す．図1に示すように，アセット数が整数値をとることから，アーク上を流れるフローに対して容量と固定費用は階段状・離散的に増加する．なお，アセットはネットワーク上に配置される資産，例えば輸送車両であり，アーク上に割り当てられるアセット数に比例して，アーク容量と固定費用が増加する．条件7) は，品種のフローの非分割フロー条件であり，品種ごとの始点・終点間のフローは途中のノードで分岐や合流はせずに単一のパス上を流れる．図2は終点 d ，始点 o 間の品種のフローで

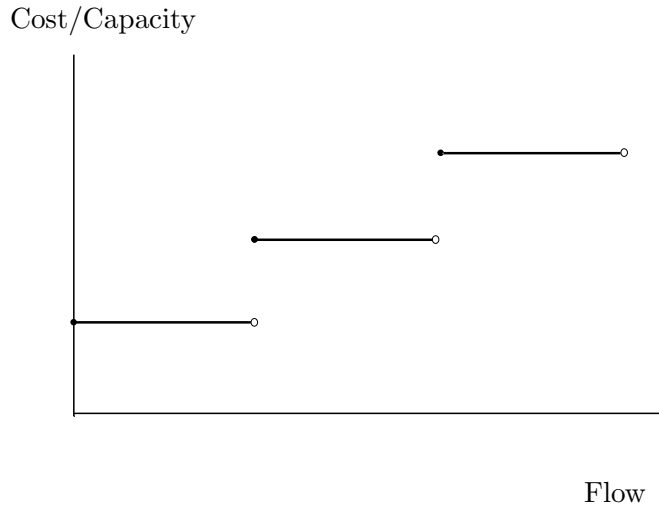


図 1 : Stepwise Cost/Capacity

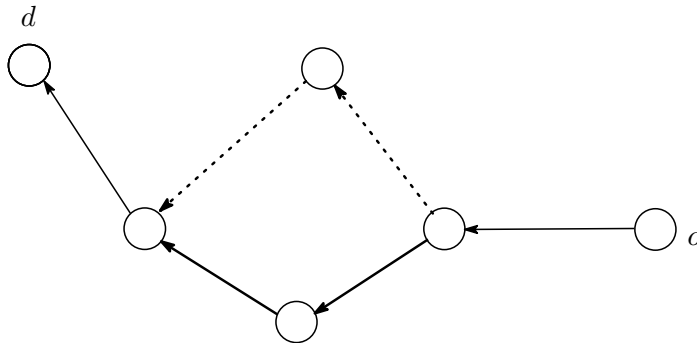


図 2 : Unspittable Flow

ある。フローが太線と破線を含むパスに分割されているため、非分割フロー条件を満たさず、破線または太線のアーク上のフローを取り除く必要がある。条件 8) は入木条件であり、同一ノードを終点とする品種のフローは入木上を流れることを意味し、途中のノードで合流はするが分岐はしない。図 3 は終点を d とする品種のフローである。太線と破線のパス上のフローは分岐を含んでいるために入木条件を満たさず、破線または太線のアーク上のフローを取り除く必要がある。なお、入木条件を満たせば、非分割フロー条件は自動的に満たされる。条件 9) はアセットバランス条件である。図 4 に示すように、当該ノードを終点とするアセット数の合計と当該ノードを始点とするアセット数の合計が一致する。また、特定のアセットに注目すると、当該アセットはネットワーク上で巡回し、バランスすることを意味する。条件 10) はホップ数条件であり、品種の

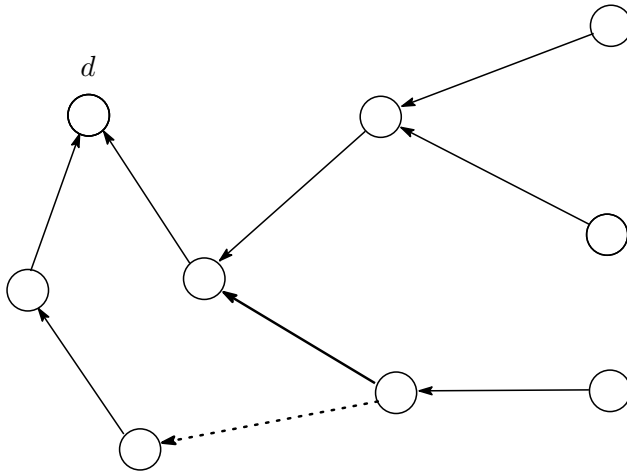


図 3 : In-Tree

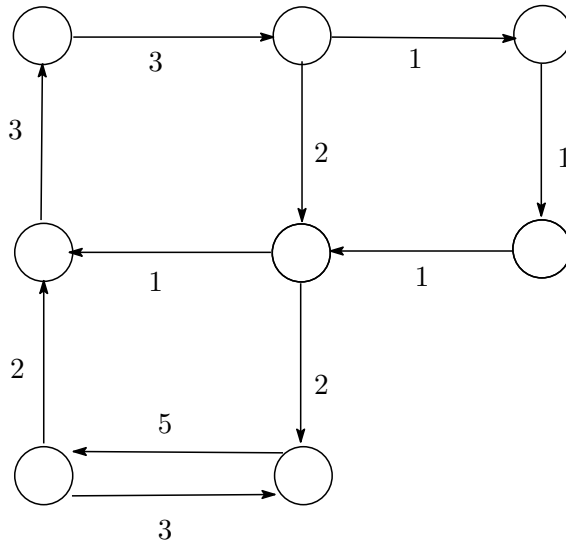


図 4 : Asset Balance

始点・終点間のフローは経由するノード数に制限があることを意味する。図5では、破線のアーキを含む (o, d) 間のフローはホップ数が3となるためにホップ数条件を満たさず、一方、太線のアーキを含む (o, d) 間のフローはホップ数条件を満たしている。

次に、IAUTHND 問題で使用する集合とパラメータを示す。

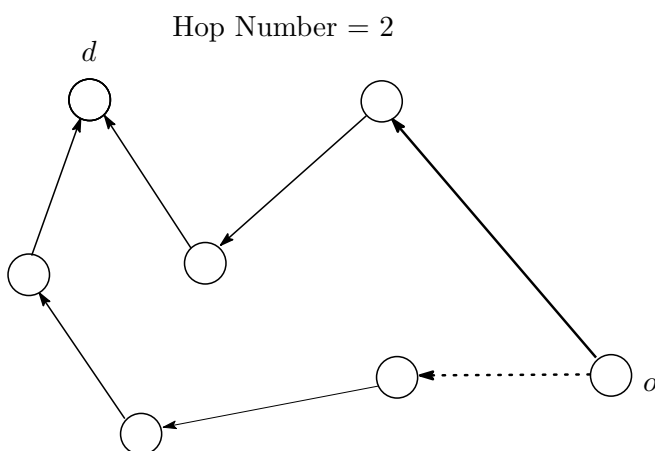


図 5 : Hop Number

- N : ノード集合
- A : アーク集合
- D : 品種の終点集合
- O^d : 終点を d とする品種の始点集合
- S_{ij} : アーク (i, j) 上に割り当てられるアセット数の集合
- N_n^+ : ノード n を終点とするアークの始点であるノード集合
- N_n^- : ノード n を始点とするアークの終点であるノード集合
- P^{od} : 始点を o , 終点を d とする品種の取りうるパス集合
- T^d : 終点を d とする品種の始点から終点 d への入木で構成される入木の集合
- c_{ij}^{od} : アーク (i, j) 上の品種 (o, d) の単位当たりのフロー費用
- f_{ij} : アーク (i, j) 上の単位当たりのアセットに対するデザイン費用
- b_{ij} : アーク (i, j) 上の単位当たりのアセットに対する容量
- q^{od} : 始点を o , 終点を d とする品種の需要量
- h^{od} : 始点を o , 終点を d のホップ数の上限
- δ_{ij}^p : パス p にアーク (i, j) が含まれるとき 1, そうでないとき 0 を表す定数
- $\eta_{ij,t}^d$: 終点を d とする入木 t 上にアーク (i, j) が含まれるとき 1, そうでないとき 0 を表す定数
- θ_{ij}^{odt} : 入木 t 上において, 品種の始点 o から終点 d へのパスにアーク (i, j) が含まれるとき 1, そうでないとき 0 を表す定数

最後に, IAUTHND 問題で使用する変数を示す.

- x_{ij}^{od} : 品種 (o, d) がアーク (i, j) 上を流れる場合 1, そうでないとき 0 であるアークフロー変数
- u_{ij}^{ods} : アーク (i, j) 上の $s - 1$ から s 個分のアセット容量の範囲内にフロー量が存在する場合 1, そうでないとき 0 であるアセットフロー変数
- z_p^{od} : 品種 (o, d) がパス p 上を移動するとき 1, そうでないとき 0 であるパスフロー変数
- y_{ij}^s : アーク (i, j) 上に s 個のアセットが割り当てられるとき 1, そうでないとき 0 であるアセット変数
- t_{ij}^d : 終点を d とする品種の入木がアーク (i, j) を含むとき 1, そうでないとき 0 である入木アーク変数
- w_t^d : 終点を d とする品種のすべてのフローが入木 t 上を移動するとき 1, そうでないとき 0 である入木変数

2.2 アークフローによる定式化

はじめに, IAUTHND 問題のアークフローを用いた定式化 AF を示す.

AF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^{od} - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & \text{if } n = o \\ 1 & \text{if } n = d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall n \in N, o \in O^d, d \in D, \quad (2)$$

$$x_{ij}^{od} = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ods} \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^{od} \leq h^{od} + 1 \quad \forall o \in O^d, d \in D, \quad (4)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \geq (s - 1) b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (6)$$

$$u_{ij}^{ods} \leq y_{ij}^s \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (7)$$

$$x_{ij}^{od} \leq t_{ij}^d \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (8)$$

$$t_{ij}^d \leq \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \quad \forall d \in D, (i, j) \in A, \quad (9)$$

$$\sum_{i \in N_n^+} \sum_{s \in S_{in}} s y_{in}^s - \sum_{j \in N_n^-} \sum_{s \in S_{nj}} s y_{nj}^s = 0 \quad \forall n \in N, \quad (10)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in N_i^+} t_{ij}^d \leq 1 \quad \forall i \in N, d \in D, \quad (12)$$

$$u_{ij}^{ods} \in \{0, 1\} \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$x_{ij}^{od} \in \{0, 1\} \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (14)$$

$$t_{ij}^d \in \{0, 1\} \quad \forall d \in D, (i, j) \in A. \quad (15)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (16)$$

目的関数である(1)式は、フローに関する変動費用とアークに関する固定費用の合計である総費用であり、これを最小化する。(2)式は、アークフロー保存式である。この式は、アーク (i, j) 上の始点 o と終点 d をもつ品種 (o, d) について、ノード n に入るフロー量とノード n から出るフロー量の差が、ノード n が始点 o であれば -1 、終点 d であれば 1 、それ以外のノードであれば 0 であることを表す。この式により、始点・終点間に需要が流れることが保証される。また、アークフロー変数が 0 または 1 であることと併せて、非分割フロー条件を表すことができる。(3)式は、アーク (i, j) 、品種 (o, d) に対して、アセットフロー変数の合計値がアークフロー変数値に一致することを表すフロー関係式である。アーク上のアークフロー変数が 1 である場合はアーク上にはいずれかのアセットフロー変数が 1 となることを表し、アークフロー変数が 0 の場合はすべてのアセットフロー変数が 0 となることを表す。これは、アーク上をフローが流れる場合に限り、アーク上にいずれかのアセット数をもつアセットフローが流れることを表す。(4)式は、品種 (o, d) に対するホップ数制約式である。ホップ数制約式は品種 (o, d) の始点と終点間のフローに含まれるノード数がホップ数以下であることを表すが、ここではノードのホップ数をパスに含まれるアーク数で代替し、アーク数がホップ数 $+1$ 以下とすることで、ホップ数制約式を表す。(5)式と(6)式は、アーク (i, j) 、アセット数 s に対するアセット容量制約式である。(5)式の左辺はアーク (i, j) 上のフロー量であり、右辺はアーク (i, j) 、アセット数 s に対するアセット変数が 1 のときにアセット容量の下限である $(s-1)b_{ij}$ となり、アーク上のフロー量がアセット容量の下限以上であることを表す。(6)式の右辺はアーク (i, j) 、アセット数 s に対するアセット変数が 1 のときにアセット容量の上限である $s b_{ij}$ となり、アーク上のフロー量がアセット容量の上限以下であることを表す。同時に、アーク (i, j) 、アセット数 s のアセット変数が 0 のときはアセット容量が 0 となり、アーク (i, j) 上のフロー量も 0 であることを表す。(7)式

はアーク (i, j) 、品種 (o, d) とアセット数 s に対する強制制約式である。これは、アーク (i, j) において、アセット数 s のアセット変数が 1 のときに品種 (o, d) のアセット式 s のアセットフローが存在し、そうでないときはフローが存在しないことを表す。(8)式はアーク (i, j) 、品種 (o, d) における入木フロー制約式である。これは、アーク (i, j) において、終点を d とする品種の入木アーク変数が 1 のときに品種 (o, d) のフローが存在し、そうでないときはフローが存在しないことを表す。(9)式はアーク (i, j) 、終点 d における入木制約式である。これは、いずれかのアーク (i, j) 、アセット数 s のアセット変数が 1 のときに限り、アーク (i, j) 上の入木アーク変数が 1 を取りうることを表す。(10)式はノード n におけるアセットバランス制約式であり、ノード n において n を終点とするアセット変数の合計値と n を始点とするアセット変数の合計値が一致することを表す。(11)式はアーク (i, j) におけるアセット数制約式であり、アーク (i, j) ではアセット変数の合計値が 1 以下、すなわち、たかだかアセット変数の 1 つが 1 を取ることを表す。(12)式は終点 d 、ノード i における入木制約式であり、終点 d 、ノード i における入木アーク変数の合計値が 1 以下、すなわち、たかだか入木アーク変数の 1 つが 1 を取り、入木アーク変数が 1 であるアークが入木を構成することを表す。(13)式から(16)式は変数の 0-1 条件を表す。

3 パスフローによる定式化

次に、IAUTHND 問題のパスフローを用いた定式化 PF を示す。

PF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} \sum_{p \in P^{od}} \delta_{ij}^p z_p^{od} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (17)$$

subject to

$$(\lambda^{od}) \quad \sum_{p \in P^{od}} z_p^{od} = 1 \quad \forall o \in O^d, d \in D \quad (18)$$

$$(\mu_{ij}^{od}) \quad \sum_{p \in P^{od}} \delta_{ij}^p z_p^{od} = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ods} \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (19)$$

$$(\nu^{od}) \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ods} \leq h^{od} + 1 \quad \forall o \in O^d, d \in D, \quad (20)$$

$$(\xi_{ij}^s) \quad \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \geq (s-1) b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (21)$$

$$(\pi_{ij}^s) \quad \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (22)$$

$$(\rho_{ij}^{ods}) \quad u_{ij}^{ods} \leq y_{ij}^s \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (23)$$

$$(\sigma_{ij}^{od}) \quad \sum_{p \in P^{od}} \delta_{ij}^p z_p^{od} \leq t_{ij}^d \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (24)$$

$$t_{ij}^d \leq \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \quad \forall d \in D, (i, j) \in A, \quad (25)$$

$$\sum_{i \in N_n^+} \sum_{s \in S_{in}} s y_{in}^s - \sum_{j \in N_n^-} \sum_{s \in S_{nj}} s y_{nj}^s = 0 \quad \forall n \in N, \quad (26)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (27)$$

$$\sum_{j \in N_i^+} t_{ij}^d \leq 1 \quad \forall i \in N, d \in D, \quad (28)$$

$$u_{ij}^{ods} \in \{0, 1\} \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (29)$$

$$z_p^{od} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P^{od}, o \in O^d, d \in D \quad (30)$$

$$t_{ij}^d \in \{0, 1\} \quad \forall d \in D, (i, j) \in A. \quad (31)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (32)$$

なお、式の左端の括弧内の変数は制約式に対する双対変数である。

- λ^{od} : (18) 式の品種 (o, d) に対する双対変数
- μ_{ij}^{od} : (19) 式のアーク (i, j) , 品種 (o, d) に対する双対変数
- ν^{od} : (20) 式の品種 (o, d) に対する非負の双対変数
- ξ_{ij}^s : (21) 式のアーク (i, j) , アセット s に対する非負の双対変数
- π_{ij}^s : (22) 式のアーク (i, j) , アセット s に対する非負の双対変数
- ρ_{ij}^{ods} : (23) 式のアーク (i, j) , アセット s , 品種 (o, d) に対する非負の双対変数
- σ_{ij}^{od} : (24) 式のアーク (i, j) , 品種 (o, d) に対する非負の双対変数

目的関数である(17)式は、フローに関する変動費用とアークに関する固定費用の合計である総費用であり、これを最小化する。(18)式はパスフロー保存式であり、品種 (o, d) の始点・終点間のパス変数の合計値が1、すなわち始点 o と終点 d 間のパスが1本であることを表す。パスフロー変数が0または1であることと併せて、非分割フロー条件を表すことができる。(19)式は、アーク (i, j) , 品種 (o, d) に対して、アセットフロー変数の合計値がパスフロー変数の合計値に一致することを表すフロー関係式である。アーク上のパスフロー変数の合計値が1である場合はアーク上にはいずれかのアセットフロー変数が1となることを表し、パスフロー変数の合計値が0の場合はすべてのアセットフロー変数が0となることを表す。(24)式はアーク (i, j) , 品種 (o, d) における入木フロー制約式である。これは、アーク (i, j) において、終点を d とする品種の入木アーク変数が1のときに品種 (o, d) のパスフローが存在し、そうでないときはフローが存在しないことを表す。(29)式から(32)式は変数の0-1条件を表す。

PFではパスフロー変数は指数オーダー個存在する．そのため，実際に解く際には，基底に入るようなパスフロー変数を適時生成する列生成法が用いられる．ここでは，フロー関係式である(19)式とアセットフロー変数も生成する．列生成法を行う際には，列である変数に対する被約費用が必要となる．

z_p^{od} と u_{ij}^{ods} に対する被約費用を次のようにおく．

- τ_p^{od} : z_p^{od} に対する被約費用
- v_{ij}^{ods} : u_{ij}^{ods} に対する被約費用

このとき，被約費用 τ_p^{od} および v_{ij}^{ods} は次のようになる．

$$\tau_p^{od} = \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \mu_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od} \right) - \lambda^{od} \quad \forall p \in P^{od}, o \in O^d, d \in D. \quad (33)$$

$$v_{ij}^{ods} = -\mu_{ij}^{od} + q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} + \nu^{od} \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (34)$$

ここで， z_p^{od} と u_{ij}^{ods} には(19)式の関係がある．列生成法では，被約費用が負であるパスフロー変数 z_p^k を生成する．同時に z_p^{od} に対応する(19)式自体が生成されていない場合は(19)式を生成し，これに含まれるアセットフロー変数を生成する．非基底であった変数 z_p^k が非基底から基底に入り正の値をとると，(19)式の左辺の値も正となるためにいずれかの u_{ij}^{ods} が非基底から基底に入ることになる． μ_{ij}^{od} に対応する(19)式が生成されていない，すなわち(19)式に含まれる z_p^k が生成されていない場合は， μ_{ij}^{od} の値が定義されていない．そこで，このような場合を考える．このとき，(19)式の両辺の変数値が0で等号が成り立つと考え， μ_{ij}^{od} に非負の値を設定する．ここで，(33)式と(34)式から分かるように， μ_{ij}^{od} は被約費用 τ_p^{od} および v_{ij}^{ods} の両方に含まれていることに注意する．

被約費用 τ_p^{od} に含まれる $\sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p (q^{od} c_{ij}^{od} + \mu_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od})$ は，アークの長さを $q^{od} c_{ij}^{od} + \mu_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od}$ としたときのパス p の長さであり， λ^{od} は品種の始点・終点間の現在までに生成されているバスの中での最短距離である．このため， τ_p^{od} が負であるパスフロー変数を探すためには， μ_{ij}^{od} が小さい方が望ましい．そこで， u_{ij}^{ods} ($s \in S_{ij}$) が非基底変数である範囲内で，値が最小となるように μ_{ij}^{od} の値を設定する．すなわち，アーク (i, j) ，品種 (o, d) において，アセット数 $s \in S_{ij}$ に関する被約費用 v_{ij}^{ods} が非負となるように，まだ生成されていない μ_{ij}^{od} の値を設定する．

現在，(34)式において v_{ij}^{ods} ($s \in S_{ij}$) は非負であることから，次式が成り立つ．

$$q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} + \nu^{od} \geq \mu_{ij}^{od} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (35)$$

したがって，すべての(35)式を満足する最小の μ_{ij}^{od} はアセット数 $s \in S_{ij}$ の中で(35)式の左辺の最小値となることから， μ_{ij}^{od} を次の値 $\bar{\mu}_{ij}^{od}$ とする．

$$\bar{\mu}_{ij}^{od} = \min_{s \in S_{ij}} \left\{ q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} \right\} + \nu^{od}. \quad (36)$$

(36)式を(33)式に代入することにより、次式を得る.

$$\tau_p^{od} = \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{\mu}_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od} \right) - \lambda^{od} \quad \forall p \in P^{od}, o \in O^d, d \in D. \quad (37)$$

$\bar{\mu}$ および σ が与えられたときに、 τ_p^{od} の値が負となるパスフロー変数を見つけることは、アークの長さを $q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{\mu}_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od}$ としたネットワーク上で、始点 o と終点 d 間のパスの中で長さが λ^{od} 未満であるパスを求めることに相当する. 始点 o と終点 d 間のパスの中で長さが最小のパスを見つけたとき、その長さが λ^{od} 以上であれば被約費用が負であるパスが存在しないことになり、 λ^{od} 未満であれば新たなパスが見つかったことになる.

そのため、品種 (o, d) ごとの価格付け問題である次のような最短経路問題 SP^{od} を解き、目的関数値が負となるパスフロー変数を求めればよい.

SP^{od} :

$$\min \sum_{p \in P^{od}} \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{\mu}_{ij}^{od} + \sigma_{ij}^{od} \right) z_p^{od} - \lambda^{od} \quad (38)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^{od}} z_p^{od} = 1, \quad (39)$$

$$z_p^{od} \geq 0 \quad \forall p \in P^{od}. \quad (40)$$

4 入木フロー変数を用いた定式化

入木フロー変数を用いた定式化 TF を示す.

TF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} \sum_{t \in T^d} \theta_{ijt}^{od} w_t^d + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (41)$$

subject to

$$(\phi^d) \quad \sum_{t \in T^d} w_t^d = 1 \quad \forall d \in D, \quad (42)$$

$$(\chi_{ij}^{od}) \quad \sum_{t \in T^d} \theta_{ijt}^{od} w_t^d = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ods} \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (43)$$

$$(\nu^{od}) \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ods} \leq h^{od} + 1 \quad \forall o \in O^d, d \in D, \quad (44)$$

$$(\xi_{ij}^s) \quad \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \geq (s-1) b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (45)$$

$$(\pi_{ij}^s) \quad \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od} u_{ij}^{ods} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (46)$$

$$(\rho_{ij}^{ods}) \quad u_{ij}^{ods} \leq y_{ij}^s \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (47)$$

$$(\psi_{ij}^{od}) \quad \sum_{t \in T^d} \theta_{ijt}^{od} w_t^d \leq \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i, j) \in A, \quad (48)$$

$$\sum_{i \in N_n^+} \sum_{s \in S_{in}} s y_{in}^s - \sum_{j \in N_n^-} \sum_{s \in S_{nj}} s y_{nj}^s = 0 \quad \forall n \in N, \quad (49)$$

$$u_{ij}^{ods} \in \{0, 1\} \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (50)$$

$$w_t^d \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T^d, d \in D, \quad (51)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (52)$$

なお、(47)式は次式に置き換えることができる。

$$\sum_{t \in T^d} \eta_{ijt}^d w_t^d \leq \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \quad \forall d \in D, (i, j) \in A, \quad (53)$$

目的関数である(41)式は、入木上のフローに関する変動費用とアークに関する固定費用の合計である総費用であり、これを最小化する。(42)式は、終点を d とする入木変数の合計値が1、すなわち入木は1本であることを表す。(43)式は、アーク (i, j) 、品種 (o, d) に対して、入木変数の合計値がアセットフロー変数の合計値に一致することを表すフロー関係式である。(48)式と(53)式は、アーク (i, j) 、品種 (o, d) に対して、いずれかのアセット変数が1であれば、アーク (i, j) 上の入木が存在しうることを表す。(51)式は入木変数の0-1条件を表す。

また、式の左端の括弧内の変数は制約式に対する双対変数である。

- ϕ^d : (42) 式の品種 (o, d) に対する双対変数
- χ_{ij}^{od} : (43) 式のアーク (i, j) 、品種 (o, d) に対する双対変数
- ν^{od} : (44) 式の品種 (o, d) に対する非負の双対変数
- ξ_{ij}^s : (45) 式のアーク (i, j) 、アセット s に対する非負の双対変数
- π_{ij}^s : (46) 式のアーク (i, j) 、アセット s に対する非負の双対変数
- ρ_{ij}^{ods} : (47) 式のアーク (i, j) 、アセット s 、品種 (o, d) に対する非負の双対変数
- ψ_{ij}^{od} : (48) 式のアーク (i, j) 、品種 (o, d) に対する非負の双対変数

TF では入木変数は指数オーダー個存在する。そのため、実際に解く際には、基底に入るような入木変数を適時生成する列生成法が用いられる。ここでは、フロー関係式である(43)式とアセットフロー変数も生成する。列生成法を行う際には、列である変数に対する被約費用が必要となる。

w_t^d と u_{ij}^{ods} に対する被約費用を次のようにおく.

- ω_t^d : w_t^d に対する被約費用
- v_{ij}^{ods} : u_{ij}^{ods} に対する被約費用

このとき, 被約費用 w_t^d と v_{ij}^{ods} を次のようにおく.

$$\omega_t^d = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^d} \theta_{ijt}^{od} \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \chi_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od} \right) - \phi^d \quad \forall t \in T^d, d \in D, \quad (54)$$

$$v_{ij}^{ods} = -\chi_{ij}^{od} + q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} + \nu^{od} \quad \forall o \in O^d, d \in D, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (55)$$

ここで, w_t^d と u_{ij}^{ods} には(43式)の関係がある. 列生成法では, 被約費用が負である入木フロー変数 w_t^d を生成する. 同時に, w_t^d に対応する(43式)が生成されていない場合は(43式)を生成し, これに含まれるアセットフロー変数を生成する. 非基底であった w_t^d が非基底から基底に入り正の値をとると, (43式)の左辺の値も正となるためにいずれかの u_{ij}^{ods} が非基底から基底に入る. χ_{ij}^{od} に対応する(43式)が生成されていない, すなわち(43式)に含まれる w_t^d が生成されていない場合は, χ_{ij}^{od} の値が定義されていない. そこで, このような場合を考える. このとき, (43式)の両辺の変数値が0で等号が成り立つと考え, χ_{ij}^{od} に非負の値を設定する. ここで, (54式)と(55式)から分かるように, χ_{ij}^{od} は被約費用 w_t^d および v_{ij}^{ods} の両方に含まれていることに注意する.

被約費用が負である w_t^d を探すためには, χ_{ij}^{od} が小さい方が望ましい. そこで, u_{ij}^{ods} ($s \in S_{ij}$) が非基底変数である範囲内で, 値が最小となるように χ_{ij}^{od} の値を設定する. すなわち, アーク (i, j) , 品種 (o, d) において, アセット $s \in S_{ij}$ に関する被約費用 v_{ij}^{ods} が最小であるアセット数の被約費用が0となるように, まだ生成されていない χ_{ij}^{od} の値を設定する.

アーク (i, j) , 品種 (o, d) について考えると, 現在, (55式)において v_{ij}^{ods} は非負であることから, 次式が成り立つ.

$$q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} + \nu^{od} \geq \chi_{ij}^{od} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (56)$$

したがって, すべての(56式)を満足する最小の χ_{ij}^{od} はアセット $s \in S_{ij}$ の中で(56式)の左辺の最小となるため, χ_{ij}^{od} を次のような $\bar{\chi}_{ij}^{od}$ とする.

$$\bar{\chi}_{ij}^{od} = \min_{s \in S_{ij}} \left\{ q^{od} (\pi_{ij}^s - \xi_{ij}^s) + \rho_{ij}^{ods} \right\} + \nu^{od}. \quad (57)$$

(57式)を(54式)に代入することにより, 次式を得る.

$$\omega_t^d = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^d} \theta_{ijt}^{od} \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{\chi}_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od} \right) - \phi^d \quad \forall t \in T^d, d \in D. \quad (58)$$

w_t^d が負となる生成する変数を見つけるためには、終点 d をもつアークの重みを $\sum_{o \in O^d} \theta_{ijt}^{od} (q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{x}_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od})$ としたネットワーク上で入木を求め、その入木の重み合計が ϕ^d 以下となればよい。そのためには、ネットワーク上の最小木を求めれば、十分である。

\bar{x} および ψ が与えられたときに、終点 d ごとの価格付け問題 $MST^d(\bar{x}, \psi)$ は次のようになる。

$MST^d(\bar{x}, \psi)$:

$$\min \sum_{t \in T^d} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^d} \theta_{ijt}^{od} (q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{x}_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od}) w_t^d, \quad (59)$$

subject to

$$\sum_{t \in T^d} w_t^d = 1, \quad (60)$$

$$w_t^d \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T^d. \quad (61)$$

$MST^d(\bar{x}, \psi)$ は、次のような終点を d とするフローと d を根とする入木を求める問題 $TF^d(\bar{x}, \psi)$ として表現することができる。

$TF^d(\bar{x}, \psi)$:

$$\min \sum_{o \in O^d} \sum_{(i,j) \in A} (q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{x}_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od}) v_{ij}^{od} - \phi^d \quad (62)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} v_{in}^{od} - \sum_{j \in N_n^-} v_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & \text{if } n = o \\ 1 & \text{if } n = d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall n \in N, o \in O^d, \quad (63)$$

$$v_{ij}^{od} \leq g_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, o \in O^d, \quad (64)$$

$$\sum_{j \in N_i^+} g_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N, \quad (65)$$

$$v_{ij}^{od} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, o \in O^d, \quad (66)$$

$$g_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (67)$$

$MST^d(\bar{x}, \psi)$, $TF^d(\bar{x}, \psi)$ ともに、始点によって異なるアークの重みをもつため、一般的なアークに重みが与えられた最小木問題とはならず、最適な解を求めることは容易ではない。

そこで、(67)式の 0-1 条件を 0 から 1 の連続変数に線形緩和する。この問題は付加制約をもつ最短経路問題となるが、線形計画問題であるために容易に解くことができる。

この緩和問題を $LP^d(\bar{x}, \psi)$ とし、 $LP^d(\bar{x}, \psi)$ の最適値を α とおく。 $LP^d(\bar{x}, \psi)$ は

$MST^d(\bar{\chi}, \psi)$ の緩和問題であるので、最適値 α が非負であれば、被約費用 ω_t^d が負である入木が存在しないことになる。一方、最適値 α が負の場合、 ω_t^d が負である入木フローが存在する可能性があり、そのような入木フローを探索しなければならない。

$TF^d(\bar{\chi}, \psi)$ の最適解が求められていない場合、(67)式を線形緩和していることから $LP^d(\bar{\chi}, \psi)$ において、 g_{ij} の値が0また1でない小数解が求められていることになる。そこで、緩和解からヒューリスティックに $TF^d(\bar{\chi}, \psi)$ の実行可能解を導出する。

まず、小数値をもつ g_{ij} を降順にソートする。降順に g_{ij} の値を1に固定して、 $LP^d(\bar{\chi}, \psi)$ を解く。この操作をすべての g_{ij} の値が0または1になるまで繰り返す。

繰り返す回数が高々ノード数となる。このようなヒューリスティックでは、必ずしも被約費用が負である入木フローを生成することはできないが、様々な近似解法の中で用いる場合は有効である。

一方、非負のLagrange乗数 β を用いて(64)式をLagrange緩和すると、Lagrange緩和 $LAG^d(\bar{\chi}, \psi, \beta)$ は次のようになる。

$LAG^d(\bar{\chi}, \psi, \beta)$:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^d} \left\{ \left(q^{od} c_{ij}^{od} + \bar{\chi}_{ij}^{od} + \psi_{ij}^{od} + \beta_{ij}^o \right) v_{ij}^{od} - \beta_{ij}^o g_{ij} \right\} - \phi^d \quad (68)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} v_{in}^{od} - \sum_{j \in N_n^-} v_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & \text{if } n = o \\ 1 & \text{if } n = d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall n \in N, o \in O^d, \quad (69)$$

$$\sum_{j \in N_i^+} g_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N, \quad (70)$$

$$v_{ij}^{od} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, o \in O^d, \quad (71)$$

$$g_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (72)$$

$LAG^d(\bar{\chi}, \psi, \beta)$ は、 v に関する最短経路問題と g に関する最小値選択問題となるため、容易に解くことができる。なお、Lagrange乗数 β については、劣勾配法を用いて設定することができる。 $LAG^d(\bar{\chi}, \psi, \beta)$ に対する劣勾配法および近似解法については、片山(2016)を参照のこと。

5 数値実験

容量制約をもつネットワーク設計問題で用いられるベンチマーク問題であるC問題(Pedersen et al. 2009)の31インスタンスに対して、パスフローによる定式化を汎用の最適化ソルバーを用いて解を求める数値実験を行った。

C問題の各インスタンスは、ノード数、アーク数と品種数によって分類される。2つの文字によって、同一の分類内のインスタンスの性質を区別する。Fは固定費用に対してフロー費用が相対的に高く、Vは相対的に低いインスタンスである。Tは容量が相対的にきつく、Lは相対的に緩いインスタンスである。

C問題のインスタンスは、アーク (i, j) に対するデザイン費用 F_{ij} 、アーク容量 C_{ij} 、フロー費用と始点・終点間の品種の需要量で構成されている。C問題は容量制約をもつネットワーク設計問題で用いられるベンチマーク問題であるため、本研究では、アーク容量 C_{ij} およびデザイン費用 F_{ij} を 1, 4, 8, 16等分したものをそれぞれアセット容量 b_{ij} およびアセット費用 f_{ij} とした4セットの問題を用いる。なお、1, 4, 8, 16をレベルとよぶことにする。

$$b_{ij} = \left\lfloor \frac{C_{ij}}{e} \right\rfloor, \quad f_{ij} = \left\lfloor \frac{F_{ij}}{e} \right\rfloor \quad \forall (i, j) \in A. \quad (73)$$

ここで、 e はレベルで、 $e = 1, 4, 8, 16$ である。また、アーク (i, j) のアセット数 $|S_{ij}|$ は需要合計をアセット容量で割ったものを切り上げた値とし、次のように設定する。

$$|S_{ij}| = \left\lceil \frac{e \sum_{d \in D} \sum_{o \in O^d} q^{od}}{C_{ij}} \right\rceil \quad \forall (i, j) \in A. \quad (74)$$

数値実験で使用した機器とソルバーの計算時間の上限を示す。

- 使用 OS および言語：UBUNTU 18.04, C++
- 最適化ソルバー：Gurobi 9.0
- CPU AMD Ryzen7 1800X 3.6GHz 8Cores, RAM 64GByte
- 使用コア数：8コア
- 最大計算時間：10時間

最適化ソルバー Gurobi を用いてアークフローによる定式化 AF を解き、10時間の計算時間の上限に達した場合はその時点における最良の上界値と下界値を算出する。なお、問題の規模により計算時間の上限に達した時点で、下界値や上界値が求められない場合がある。

以下の5種類の条件を考慮した問題について、パスフローによる定式化 AF を用いて計算を行った。

- UC：付加条件なし
- IU：整数アセット・非分割フロー条件
- IUT：整数アセット・非分割フロー・入木条件
- IUTA：整数アセット・非分割フロー・入木・アセットバランス条件
- IUTAH：整数アセット・非分割フロー・入木・アセットバランス・ホップ条件

なお、UC は容量制約のないネットワーク設計問題であり、アセット数の最大値が1である場合に相当する。また、ホップ数の上限値は、品種の始点・終点間の最短ホップ数にノード20の場合は1、ノード30の場合は2を加えたものを用いた。

表1に、各インスタンスのサイズを示す。インスタンス名は、ノード数、アーク数、品種数、費用特性、容量特性を表している。ノード数は20と30、アーク数は230から700、品種は40から400である。Total Asset は総アセット数であり、定式化における0-1変数の数に対応している。レベル1の総アセット数は366から1113、レベル16の総アセット数は4515から13484と膨大な数となっている。Total Variable は、パスフローを用いた定式化FAにおける変数の総数である。レベル1の総変数は2万から74万、レベル16の総変数は20万から572万と大きな数となっている。

表2に、UCにおける各インスタンスの誤差 (Gap)、計算時間 (Time)、上界値 (UB) および下界値 (LB) を示す。誤差は“(上界値-下界値)/下界値”で算出している。基本的な問題であるUCでは、最適解が求められたのは31インスタンス中の22であり、平均計算時間は13730秒であり、平均誤差は0.28%であった。このように、UCでは、汎用の最適化ソルバーにより、10時間の制限時間内に最適値または高い精度の解を算出することができている。

表3に、IUの集計結果を示す。上界値/下界値が求められないインスタンスがあるため、Average Gap は上界値/下界値が求められないインスタンスを除いた平均誤差である。平均誤差は、レベル4が6.96と最も大きく、レベル数が大きくなると減少し、レベル16では1.32となっている。ただし、レベル8と16では誤差が求められないインスタンスを除外しており、これらのインスタンスの誤差が他のレベルでは大きいことを考慮する必要がある。UCの誤差が0.3%以下であることと比べると、IUの誤差は5倍から25倍程度大きくなっている。これは、パスフロー変数が0-1離散変数となっているために問題が難しくなっていることや線形緩和のみでは良い下界値を求めることが難しいことを表している。なお、レベル16ではアーク当たりのアセット数が50程度となり、0-1変数ではあるが連続数に近い表現となるため、誤差が小さくなっていると考えられる。Average Time は平均計算時間であるが、10時間の上限に達した場合は10時間とし、上界値または下界値を求められなかった場合も10時間としている。大規模な離散最適化問題であるために10時間では最適解を求められないインスタンスが多く、平均計算時間は長いものとなっている。誤差と同様な理由から、平均計算時間はレベル4が最も大きく、レベル1と16の平均計算時間は短くなっている。Optimal は最適解を求められたインスタンス数であり、レベル1が20と最も多く、続いてレベル16、8、4と減少している。レベル1とレベル4を比べると、レベル1は0-1変数の数が1/4程度になるため、レベル4よりも解き易いインスタンスとなっている。レベル4とレベル8/16を比べると、レベル8/16は線形に近いアセット費用構造となるため、相対的にレベル4よりも

解き易いインスタンスとなっている。No Solution は問題サイズが大きいため10時間の計算時間の間に上界値または下界値を求められなかったインスタンス数である。これらのインスタンスは、レベル8で1、レベル16で6となっている。このようにレベル16では、多くのインスタンスにおいて10時間の計算時間内で下界値すら求めることができていない。これは、0-1変数の数が多いため、実行可能解を求められないことはもとより、線形緩和問題さえ解けていないことを意味している。このように、0-1変数が数千、変数が100万を超えるような規模のインスタンスに対しては、パスフローによる定式化を直接に最適化ソルバーで解く手法には無理があることが分かる。

表4にIUにおける誤差と計算時間を、表5にIUにおける上界値と下界値を示す。“-”は、上界値または下界値を求められなかったものである。品種数が40と少ないインスタンスでは、最適解を短時間で求めることができています。品種数100のインスタンスでは約半数が最適解が求められており、誤差は最大で6%となっている。品種数200のインスタンスでは誤差は最大で10%と大きいが、下界値と上界値ともに算出することができています。品種数400のインスタンスでは誤差は最大で55%と大変大きく、特にレベル16では大半のインスタンスの下界値と上界値が算出できていない。

表6に、IUTの集計結果を示す。平均誤差 Average Gap はレベル1が8.87%と最も大きく、レベル数が大きくなると減少し、レベル16では1.96%となっている。IUと比べると、レベル1とレベル16では誤差が大きくなっているが、レベル4では同程度、レベル8では小さくなっている。このように、入木条件の影響はそれほど大きくは現れてはいない。平均計算時間 Average Time はレベル16が最も大きく、レベル1が最も短いが、大半の問題で10時間の上限に達しているために大きな違いは見られない。Optimal はレベル1が17と最も多く、レベル4と16が11と少なくなっており、IUと比べるとその数は減少している。No Solution はレベル8で4、レベル16で6となっており、IUと比べるとレベル8で3増加している。表7にIUTの誤差と計算時間、表8にIUTの上界値と下界値を示す。全体的な傾向は、IUと同様である。

表9に、IUTAの集計結果を示す。平均誤差 Average Gap はレベル1が14.14%、レベル4が13.19%と10%を超えており、レベル数が大きくなると減少し、レベル16では2.51%となっている。IUTと比べるとすべてのレベルで誤差が大きくなっており、アセットバランス条件の影響は大きい。平均計算時間 Average Time はレベル2が最も大きいが、多くのインスタンスで10時間の上限に達しているために大きな違いは見られない。Optimal はレベル1/8が12と最も多く、レベル4は8と少なくなっており、IUTと比べるとその数は減少している。No Solution はレベル8で5、レベル16で7となっており、IUと比べると2増加している。表10にIUTAの誤差と計算時間、表11にIUTAの上界値と下界値を示す。全体的な傾向は、IUと同様である。

表12に、IUTAHの集計結果を示す。平均誤差 Average Gap はレベル1が27.15%、

レベル4が30.21%と20%を超えており、レベル8では12.35%、レベル16では5.50%となっている。IUTAと比べるとすべてのレベルで誤差が大きく増加している。これは、ホップ数条件が最短路上のホップ数+1または+2となっているため、タイトな条件となっていることが原因の一つである。平均計算時間 Average Time はレベル1が最も大きいですが、大きな違いは見られない。Optimalはレベル16が9と最も多く、レベル1/8では7、レベル8では6となっており、IUTAと比べるとその数は減少している。No Solutionはレベル1/8/16で6となっており、レベル1も難しいインスタンスとなっている。表13にIUTAHの誤差と計算時間、表14にIUTAHの上界値と下界値を示す。品種数40では、最適解を短時間で求めることができている。品種数100では最適解が求められたインスタンスもあるが、誤差が40%を超えるインスタンスも生じている。品種数200では誤差が5%以下であるインスタンスはなく、50%を超えるインスタンスが発生している。品種数400では半数近いインスタンスで実行可能解が求められておらず、誤差は100%を超えるものも発生している。

IUTAHにはタイトなホップ数条件があるため、非常に難しい問題となっている。ホップ数条件に関してはThiongane et al. (2015)が強い定式化を示しており、この定式化を用いる方が良い解を求める可能性があるが、サイズはさらに大きくなるため、工夫が必要となる。

6 おわりに

本研究では、ネットワーク設計問題における付加的な条件のうち、整数アセット、非分割フロー、アセットバランス、入木およびホップ数制限を同時に考慮する問題を取り上げ、この問題に対するアークフローを用いたモデル、パスフロー変数を用いたモデルおよび入木変数を用いたモデルの定式化を示し、パスフロー変数および入木フロー変数の生成法を提案した。

さらに整数アセット、非分割フロー・入木・アセットバランス・ホップ条件のいくつかを考慮した4種類のインスタンスに対して汎用の最適化ソルバーによる数値実験を行い、それぞれの条件が問題の困難性に与える影響を明らかにした。基礎的なUCとは大きく異なり、得られた解の誤差は大きく、近似解としての使用が困難と思われる状況が多数発生している。さらに、全体として品種数の大きな問題では解の誤差が大きく、10時間の計算時間では上界値または下界値を求めることができないインスタンスが存在した。これらのインスタンスの実行可能解を求めるためには計算時間の上限を大きく引き上げることが必要であるが、精度の高い解を求めることは困難である。

本研究で示した定式化は強制制約式を含んでいる。このため、良い下界値を算出するが定式化のサイズが大きくなる。上界値/下界値を求めることができないサイズのイン

スタンスには、強制制約式を除いた定式化を用いた方が、設定した指定した計算時間以内で上界値/下界値を求めることができる可能性がある。しかし、この場合は下界値が悪化するために、強制制約式の有効性は実験等により検証する必要がある。良い上界値・下界値を算出するためにはラグランジュ緩和の使用や強い妥当不等式の導入などが考えられるが、問題の規模や計算量の増大を招くことから、それらの有効性も実験等により検証する必要がある。一方、0-1変数が数千、変数が100万を超えるような規模のインスタンスに対しては、定式化を直接に最適化ソルバーで解く手法には限界があり、適当な実行可能解を算出することすらも困難なため、適切な計算時間で近似解を算出する近似解法の開発が必要である。

本研究は科学研究費基盤研究C(課題番号17K01268)による成果の一部である。

参考文献

- Bai, R., J.R.Woodward, N. Subramanian, J. Carlidge. 2018. Optimisation of transportation service network using k-node large neighbourhood search. *Computers & Operations Research* **89** 193-205.
- Chouman, M., T. G. Crainic. 2011. MIP-based tabu search for service network design with design-balanced requirements. Tech. Rep. CIRRELT-2011-68, Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation, Université de Montréal.
- Crainic, T. G., M. Hewitt, M. Toulouse, D. M. Vu. 2018. Scheduled service network design with resource acquisition and management. *EURO Journal on Transportation and Logistics* **7** 277-309.
- Croxtan, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2007. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research* **55** 146-157.
- Erera, A., M. Hewitt, M. Savelsbergh, Y. Zhang. 2012. Improved load plan design through integer programming based local search. *Transportation Science* 1-16.
- Farvolden, J. M., W. B. Powell. 1994. Subgradient methods for the service network design problem. *Transportation Science* **28**(3) 256-272.
- Frangioni, A., B. Gendron. 2009. 0-1 reformulations of the multicommodity capacitated network design problem. *Discrete Applied Mathematics* **157**(6) 1229-1241.
- Gendron, B., L. Gouveia. 2014. Reformulations by discretization for piecewise linear integer multicommodity network flow problems. Tech. Rep. CIRRELT-2014-01, Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation, Université de Montréal.
- Gendron, B., S. Hanif, R. Todosijević. 2016. An efficient matheuristic for the multicommodity fixed-charge network design problem. *IFAC-PapersOnLine* **49**(12) 117-120.

- Hewitt, M., G. L. Nemhauser, M. W. P. Savelsbergh. 2010. Combining exact and heuristics approaches for the capacitated fixed charge network flow problem. *INFORMS Journal on Computing* 22 (2) 314-325.
- Hewitt, M., G. L. Nemhauser, M. W. P. Savelsbergh. 2013. Branch-and-price guided search for integer programs with an application to the multicommodity fixed charge network flow problem. *INFORMS Journal on Computing* 25(2) 302-316.
- Hoppe, B., E. Z. Klampfl, C. McZeal, J. Rich. 1999. Strategic load-planning for less-than-truckload trucking. Tech. Rep. CRPC-TR99812-S, Center for Research on Parallel Computation, Rice University.
- Jarrah, A. I., E. Johnson, L. C. Neubert. 2009. Large-scale, less-than-truckload service network design. *Operations Research* 57(3) 609-625.
- Katayama, N. 2015. A combined capacity scaling and local branching approach for capacitated multi-commodity network design problem. *Far East Journal of Applied Mathematics* 92 (1) 1-30.
- Katayama, N. 2016. A combined capacity scaling and local branching matheuristic for the hop-constrained multicommodity network design problem. *Far East Journal of Applied Mathematics* 94(3) 185-215.
- Kim, D., X. Pan, P. M. Pardalos. 2006. An enhanced dynamic slope scaling procedure with tabu scheme for fixed charge network flow problems. *Computational Economics* 27 273-293.
- Magnanti, T. L., R. T. Wong. 1984. Network design and transportation planning : Models and algorithms. *Transportation Science* 18(1) 1-55.
- Minoux, M. 1989. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks* 19(3) 313-360.
- Momeni, M., M. Sarmadi. 2016. A genetic algorithm based on relaxation induced neighborhood search in a local branching framework for capacitated multicommodity network design. *Networks and Spatial Economics* 16(2) 447-468.
- Muriel, A., F. N. Munshi. 2004. Capacitated multicommodity network flows with piecewise linear concave costs. *IIE Transactions* 36 683-696.
- Paraskevopoulos, D. C., T. Bektaş, T. G. Crainic, C. N. Potts. 2016. A cycle-based evolutionary algorithm for the fixed-charge capacitated multi-commodity network design problem. *European Journal of Operational Research* 253(2) 265-279.
- Pedersen, M. B., T. G. Crainic, O. B. G. Madsen. 2009. Models and tabu search metaheuristics for service network design with asset-balance requirements. *Transportation Science* 43 158-177.
- Rahmaniani, R., T. G. Crainic, M. Gendreau, W. Rei. 2018. Accelerating the benders decom-

- position method: Application to stochastic network design problems. *SIAM Journal on Optimization* 28(1) 875-903.
- Thiongane, B., J. Cordeau, B. Gendron. 2015. Formulations for the nonbifurcated hop-constrained multicommodity capacitated fixed-charge network design problem. *Computers & Operations Research* 53 1-8.
- Vu, D. M., T. G. Crainic, M. Toulous. 2013. A three-stage matheuristic for the capacitated multi-commodity fixed-cost network design with design-balance constraints. *Journal of Heuristics* 19 757-795.
- Wong, R. T. 1984. Introduction and recent advances in network design: Models and algorithms. M. Florian, ed., *Transportation Planning Models*. Elsevier Science, North Holland, Amsterdam, 187-225.
- Wong, R. T. 1985. Location and network design. M. O'heEigartaigh, J. Lenstra, A. RinnooyKan, eds., *Combinatorial Optimization Annotated Bibliographies*. John Wiley & Sons, New York, 129-147.
- Yaghini, M., M. Karimi, M. Rahbar, M. H. Sharitabaro. 2016. A cutting-plane neighborhood structure for fixed-charge capacitated multicommodity network design problem. *INFORMS Journal on Computing* 27(1) 45-58.
- Yaghini, M., M. R. A Kazemzadeh. 2012. A simulated annealing algorithm for unsplitable capacitated network design. *International Journal of Industrial Engineering & Production Research* 23 (2) 91-100.
- 片山直登 . 2016. フロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題のための木生成法 . 流通経済大学流通情報学部紀要 21(1) 1-17.
- 片山直登 . 2018. 非分割フローを考慮した容量制約をもつネットワーク設計の MIP 近傍探索法 . 流通経済大学流通情報学部紀要 22(2) 17-31.

表 1 : Dimensions of Instances

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	Total Asset				Total Variable			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	366	1222	2325	4528	27684	63636	109962	202488
20/230/040/V/T	375	1246	2393	4675	29235	66688	116009	214135
20/230/040/F/T	376	1208	2306	4515	29048	64824	112038	207025
20/230/200/V/L	376	1203	2300	4499	126488	294369	517060	963457
20/230/200/F/L	384	1247	2390	4676	128552	303741	535770	999828
20/230/200/V/T	370	1233	2363	4622	125490	300679	530069	988646
20/230/200/F/T	371	1199	2293	4485	125473	293557	515639	960615
20/300/040/V/L	454	1483	2846	5564	35938	80185	138794	255668
20/300/040/F/L	480	1567	2998	5846	37398	84139	145672	268136
20/300/040/V/T	476	1570	3000	5859	37814	84856	146346	269283
20/300/040/F/T	473	1560	2975	5810	37685	84426	145271	267176
20/300/200/V/L	490	1573	3011	5879	164150	383999	675913	1258117
20/300/200/F/L	469	1552	2978	5811	159447	379296	668774	1243873
20/300/200/V/T	478	1564	3000	5851	161054	381512	673020	1251773
20/300/200/F/T	473	1549	2963	5783	160039	378467	665509	1237969
30/520/100/V/L	835	2733	5219	10199	153345	348839	604897	1117837
30/520/100/F/L	847	2736	5225	10196	153805	348372	604739	1116752
30/520/100/V/T	853	2771	5279	10289	155329	352883	611207	1127237
30/520/100/F/T	839	2730	5198	10184	153627	348400	602604	1116162
30/520/400/V/L	846	2737	5237	10212	564538	1326611	2334111	4339036
30/520/400/F/L	841	2773	5286	10301	562523	1341119	2353858	4374903
30/520/400/V/T	837	2726	5206	10154	559191	1320458	2319898	4313942
30/520/400/F/T	828	2706	5172	10087	556424	1313258	2307056	4287801
30/700/100/V/L	1092	3582	6873	13436	200196	456666	795639	1471628
30/700/100/F/L	1090	3592	6899	13478	199990	457696	798317	1475954
30/700/100/V/T	1113	3646	6978	13643	203262	464161	807357	1493852
30/700/100/F/T	1125	3661	7013	13707	204369	465577	810833	1500315
30/700/400/V/L	1097	3610	6910	13480	736641	1749380	3079280	5726990
30/700/400/F/L	1101	3579	6847	13346	735673	1734307	3051311	5670408
30/700/400/V/T	1100	3590	6889	13445	734840	1738310	3067807	5709875
30/700/400/F/T	1113	3624	6910	13484	742229	1754162	3078420	5727742

表 2 : Results for UC

Instance	Gap(%)	Time(seconds)	UB	LB
20/230/040/V/L	0.00	0	423848	423848
20/230/040/V/T	0.00	0	371475	371475
20/230/040/F/T	0.00	3	643036	643036
20/230/200/V/L	0.00	1576	94213	94213
20/230/200/F/L	0.00	9464	137642	137642
20/230/200/V/T	0.00	613	97914	97914
20/230/200/F/T	0.00	18455	135863	135863
20/300/040/V/L	0.00	0	429398	429398
20/300/040/F/L	0.00	4	586077	586077
20/300/040/V/T	0.00	1	464509	464509
20/300/040/F/T	0.00	1	604198	604198
20/300/200/V/L	0.00	14872	74811	74811
20/300/200/F/L	1.27	36000	115489	114042
20/300/200/V/T	0.00	358	74991	74991
20/300/200/F/T	0.50	36000	107102	106568
30/520/100/V/L	0.00	109	53958	53958
30/520/100/F/L	0.00	19475	93922	93922
30/520/100/V/T	0.00	742	52046	52046
30/520/100/F/T	0.69	36000	97098	96428
30/520/400/V/L	0.00	6944	112774	112774
30/520/400/F/L	0.69	36000	149093	148066
30/520/400/V/T	0.00	2774	114640	114640
30/520/400/F/T	1.09	36000	152507	150858
30/700/100/V/L	0.00	27	47603	47603
30/700/100/F/L	0.00	20134	59958	59958
30/700/100/V/T	0.00	1555	45872	45872
30/700/100/F/T	0.00	4506	54904	54904
30/700/400/V/L	0.35	36000	97837	97495
30/700/400/F/L	2.29	36000	134539	131525
30/700/400/V/T	0.52	36000	95274	94785
30/700/400/F/T	1.31	36000	130037	128353
Average	0.28	13730		

表 3 : Aggregate Results for IU

Level	1	4	8	16
Average Gap	5.18	6.96	4.92	1.32
Average Time	18103	23109	21211	19819
Number of Optimal	20	12	14	15
Number of No Solution	0	0	1	6

表 4 : Gaps and Computation Times for IU

Level	Gap(%)				Time(Seconds)			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	0	2	3	4
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	0	1	2	6
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	2	1	4	7
20/230/200/V/L	0.00	5.40	2.64	1.56	4534	36000	36000	36000
20/230/200/F/L	0.00	8.33	7.12	2.66	3418	36000	36000	36000
20/230/200/V/T	0.00	1.83	0.00	0.00	3464	36000	9137	11993
20/230/200/F/T	0.00	6.36	3.33	5.43	610	36000	36000	36000
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	0	1	2	6
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00	11	3	10	12
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	0	1	2	9
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	14	7	8	9
20/300/200/V/L	0.00	9.50	5.35	2.24	27021	36000	36000	36000
20/300/200/F/L	0.00	10.30	9.53	4.21	16682	36000	36000	36000
20/300/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	24221	20735	4769	10893
20/300/200/F/T	0.00	10.02	5.67	3.70	2051	36000	36000	36000
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	15635	5188	828	769
30/520/100/F/L	0.00	5.99	4.53	3.34	8789	36000	36000	36000
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	5156	1167	115	511
30/520/100/F/T	5.40	5.81	6.23	2.31	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/L	12.40	10.47	6.08	2.71	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/L	10.03	14.19	11.82	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/T	7.85	12.77	10.02	4.75	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/T	11.99	28.26	22.14	-	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	22770	1249	436	305
30/700/100/F/L	0.00	1.94	0.00	0.00	30827	36000	29122	7728
30/700/100/V/T	2.48	0.00	0.00	0.00	36000	4024	1095	407
30/700/100/F/T	5.48	6.17	1.90	0.00	36000	36000	36000	5716
30/700/400/V/L	14.89	18.85	15.69	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/L	20.05	13.69	21.70	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/T	15.07	10.35	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/T	54.82	35.63	13.92	-	36000	36000	36000	36000

表 5 : Upper Bound and Lower Bound for IU

Level	Upper Bound				Lower Bound			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	621560	445989	408623	390206	621560	445989	408623	390206
20/230/040/V/T	585739	409195	373571	356018	585739	409195	373571	356018
20/230/040/F/T	1325275	785592	663220	599966	1325275	785592	663220	599966
20/230/200/V/L	330924	156600	117240	93851	330924	148573	114228	92406
20/230/200/F/L	600554	248363	176385	136596	600554	229270	164654	133061
20/230/200/V/T	357125	171706	129432	103278	357125	168616	129432	103278
20/230/200/F/T	614208	252999	182345	147562	614208	237860	176467	139968
20/300/040/V/L	685710	471430	428551	403006	685710	471430	428551	403006
20/300/040/F/L	1321018	735101	609755	533218	1321018	735101	609755	533218
20/300/040/V/T	727598	511671	464779	447251	727598	511671	464779	447251
20/300/040/F/T	1465541	827145	684366	585616	1465541	827145	684366	585616
20/300/200/V/L	307162	139929	105545	83197	307162	127785	100181	81373
20/300/200/F/L	567560	229654	165238	128933	567560	208214	150861	123723
20/300/200/V/T	306206	137114	100499	80820	306206	137114	100499	80820
20/300/200/F/T	533271	219942	154756	119965	533271	199903	146456	115682
30/520/100/V/L	167238	87699	67959	56035	167238	87699	67959	56035
30/520/100/F/L	398913	173090	125341	98181	398913	163308	119910	95008
30/520/100/V/T	162572	86975	67341	56199	162572	86975	67341	56199
30/520/100/F/T	472076	207730	152188	114861	447879	196323	143257	112269
30/520/400/V/L	455020	218880	163099	130983	404811	198143	153745	127526
30/520/400/F/L	671519	323666	239036	-	610281	283439	213771	-
30/520/400/V/T	457104	233984	177400	140279	423829	207488	161244	133918
30/520/400/F/T	745750	378254	268148	-	665930	294907	219547	-
30/700/100/V/L	156692	80380	61897	50238	156692	80380	61897	50238
30/700/100/F/L	222059	107315	80662	63141	222059	105278	80662	63141
30/700/100/V/T	149565	76875	59870	49694	145953	76875	59870	49694
30/700/100/F/T	223782	110504	82585	64000	212156	104085	81048	64000
30/700/400/V/L	423289	215913	162386	-	368416	181676	140359	-
30/700/400/F/L	716210	291265	228912	-	596590	256201	188095	-
30/700/400/V/T	401016	196374	-	-	348487	177961	-	-
30/700/400/F/T	876899	346413	216278	-	566402	255404	189855	-

表 6 : Aggregate Results for IUT

Level	1	4	8	16
Average Gap	8.87	6.97	4.36	1.96
Average Time	20979	23724	22518	23962
Number of Optimal	17	11	12	11
Number of No Solution	0	0	4	6

表 7 : Gaps and Computation Times for IUT

Level	Gap(%)				Time(Seconds)			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	1	3	3	10
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	1	1	3	9
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	6	2	6	13
20/230/200/V/L	0.00	6.31	3.72	2.74	8207	36000	36000	36000
20/230/200/F/L	0.00	9.57	8.77	4.06	5408	36000	36000	36000
20/230/200/V/T	0.00	4.61	0.00	1.40	4581	36000	32959	36000
20/230/200/F/T	0.00	6.06	4.99	5.90	1996	36000	36000	36000
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	1	2	4	12
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00	25	9	37	26
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	1	2	6	16
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	34	12	12	27
20/300/200/V/L	0.00	9.96	6.49	3.46	35383	36000	36000	36000
20/300/200/F/L	0.00	10.46	10.48	7.43	34944	36000	36000	36000
20/300/200/V/T	1.33	1.03	0.00	1.00	36000	36000	10168	36000
20/300/200/F/T	0.00	11.83	6.73	5.14	5572	36000	36000	36000
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	25395	5072	1687	10633
30/520/100/F/L	0.00	7.84	6.07	4.44	16113	36000	36000	36000
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	8676	1966	288	4957
30/520/100/F/T	6.24	6.84	7.50	3.86	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/L	15.75	8.30	6.40	3.46	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/L	17.51	25.73	-	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/T	9.39	11.89	14.75	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/T	14.76	11.35	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/L	1.55	0.00	0.00	0.00	36000	2577	1852	1615
30/700/100/F/L	3.64	1.11	1.67	0.00	36000	36000	36000	35763
30/700/100/V/T	3.82	0.00	0.00	0.00	36000	5796	3037	5732
30/700/100/F/T	6.12	5.65	3.24	0.46	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/L	42.46	24.21	24.93	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/L	53.01	17.43	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/T	31.04	18.50	12.05	5.74	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/T	68.26	17.34	-	-	36000	36000	36000	36000

表 8 : Upper Bound and Lower Bound for IUT

Level	Upper Bound				Lower Bound			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	621560	446914	408623	391107	621560	446914	408623	391107
20/230/040/V/T	585739	409195	373571	356509	585739	409195	373571	356509
20/230/040/F/T	1325275	785592	663395	600983	1325275	785592	663395	600983
20/230/200/V/L	330924	157005	117539	94582	330924	147685	113327	92058
20/230/200/F/L	600554	250318	177816	137401	600554	228459	163472	132040
20/230/200/V/T	357125	171833	129551	103762	357125	164254	129551	102331
20/230/200/F/T	614208	253775	182847	148259	614208	239268	174163	139995
20/300/040/V/L	685710	471430	428551	403307	685710	471430	428551	403307
20/300/040/F/L	1321018	735119	614476	537390	1321018	735119	614476	537390
20/300/040/V/T	727598	511671	465613	448861	727598	511671	465613	448861
20/300/040/F/T	1465541	830308	684366	596700	1465541	830308	684366	596700
20/300/200/V/L	307162	140472	105950	83648	307162	127748	99496	80853
20/300/200/F/L	567560	230055	167257	132433	567560	208270	151390	123270
20/300/200/V/T	306206	137533	100825	81578	302189	136136	100825	80769
20/300/200/F/T	533271	221815	155769	121813	533271	198343	145953	115854
30/520/100/V/L	167238	87730	68018	56276	167238	87730	68018	56276
30/520/100/F/L	398913	174602	126072	99303	398913	161915	118856	95080
30/520/100/V/T	162572	86975	67392	56563	162572	86975	67392	56563
30/520/100/F/T	472076	208086	153198	115761	444357	194761	142513	111456
30/520/400/V/L	471231	216735	163647	131938	407100	200118	153797	127527
30/520/400/F/L	723071	356370	-	-	615341	283439	-	-
30/520/400/V/T	461398	232538	185433	-	421808	207830	161594	-
30/520/400/F/T	764203	328371	-	-	665931	294905	-	-
30/700/100/V/L	156780	80380	62029	50407	154388	80380	62029	50407
30/700/100/F/L	222059	107375	80901	63352	214270	106196	79569	63352
30/700/100/V/T	149221	76875	59978	49928	143737	76875	59978	49928
30/700/100/F/T	223666	110786	82625	64349	210762	104858	80035	64054
30/700/400/V/L	525342	225667	175351	-	368766	181677	140359	-
30/700/400/F/L	912223	300855	-	-	596189	256198	-	-
30/700/400/V/T	456725	210889	155677	121306	348546	177959	138934	114718
30/700/400/F/T	948943	299690	-	-	563980	255404	-	-

表 9 : Aggregate Results for IUTA

Level	1	4	8	16
Average Gap	14.14	13.19	6.50	2.51
Average Time	24831	26895	24397	26351
Number of Optimal	12	8	12	9
Number of No Solution	0	0	5	7

表10 : Gaps and Computation Times for IUTA

Level	Gap(%)				Time(Seconds)			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	1	2	5	15
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	3	3	7	19
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	45	2	9	101
20/230/200/V/L	0.00	11.07	7.41	3.66	20901	36000	36000	36000
20/230/200/F/L	0.00	16.94	10.19	3.93	34046	36000	36000	36000
20/230/200/V/T	0.00	9.33	4.31	2.21	14132	36000	36000	36000
20/230/200/F/T	0.00	11.85	8.79	8.55	3460	36000	36000	36000
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	5	2	7	14
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00	39	16	212	203
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	3	3	7	48
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	134	24	19	104
20/300/200/V/L	7.68	11.71	8.54	5.18	36000	36000	36000	36000
20/300/200/F/L	3.52	13.69	13.86	9.52	36000	36000	36000	36000
20/300/200/V/T	5.58	6.78	0.00	1.73	36000	36000	30061	36000
20/300/200/F/T	0.00	12.64	10.44	2.68	12984	36000	36000	36000
30/520/100/V/L	6.16	1.79	0.00	0.00	36000	36000	12654	20055
30/520/100/F/L	1.92	9.34	12.09	7.20	36000	36000	36000	36000
30/520/100/V/T	5.64	0.00	0.00	0.63	36000	5694	3811	36000
30/520/100/F/T	11.72	12.32	11.55	4.26	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/L	23.78	29.37	11.62	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/L	23.53	43.71	-	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/T	20.97	15.77	19.09	7.46	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/T	74.14	34.73	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/L	9.78	2.39	0.00	0.00	36000	36000	7575	4322
30/700/100/F/L	7.55	6.76	3.30	1.07	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/T	7.39	0.96	0.00	0.51	36000	36000	17935	36000
30/700/100/F/T	13.02	10.50	6.24	1.60	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/L	61.04	46.16	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/L	31.11	34.53	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/T	64.40	31.74	41.69	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/T	59.55	34.73	-	-	36000	36000	36000	36000

表11 : Upper Bound and Lower Bound for IUTA

Level	Upper Bound				Lower Bound			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	654139	460504	417113	397403	654139	460504	417113	397403
20/230/040/V/T	607690	418697	382573	363851	607690	418697	382573	363851
20/230/040/F/T	1448253	809973	683984	632472	1448253	809973	683984	632472
20/230/200/V/L	339769	162661	122284	97683	339769	146453	113847	94230
20/230/200/F/L	626700	263219	181261	139263	626700	225094	164497	133997
20/230/200/V/T	365587	178042	133544	106907	365587	162851	128031	104600
20/230/200/F/T	629557	264774	191199	154655	629557	236725	175748	142476
20/300/040/V/L	714521	484928	438483	409160	714521	484928	438483	409160
20/300/040/F/L	1383842	765608	638902	563572	1383842	765608	638902	563572
20/300/040/V/T	746790	519608	469789	453769	746790	519608	469789	453769
20/300/040/F/T	1538380	859044	701188	621229	1538380	859044	701188	621229
20/300/200/V/L	323459	145448	109625	86794	300381	130197	101004	82523
20/300/200/F/L	583461	236163	176227	138710	563613	207722	154780	126658
20/300/200/V/T	317496	143030	104108	83655	300720	133949	104108	82231
20/300/200/F/T	553613	230018	163265	122806	553613	204206	147835	119598
30/520/100/V/L	176398	91217	69762	57107	166169	89614	69762	57107
30/520/100/F/L	412291	181901	135148	104246	404534	166366	120567	97247
30/520/100/V/T	172474	88533	69563	58648	163270	88533	69563	58282
30/520/100/F/T	494938	220999	160673	119530	443026	196765	144037	114644
30/520/400/V/L	510710	263085	173990	-	412579	203359	155884	-
30/520/400/F/L	765541	411284	-	-	619740	286195	-	-
30/520/400/V/T	517554	244229	193594	145701	427819	210969	162564	135587
30/520/400/F/T	1159822	400444	-	-	666027	297223	-	-
30/700/100/V/L	167594	83951	63706	51438	152666	81991	63706	51438
30/700/100/F/L	236986	112670	83151	64849	220360	105540	80496	64164
30/700/100/V/T	155202	78975	61845	51531	144527	78228	61845	51268
30/700/100/F/T	237954	114811	86028	66594	210537	103897	80974	65546
30/700/400/V/L	1193046	267428	-	-	740838	182972	-	-
30/700/400/F/L	1569232	346608	-	-	1196850	257641	-	-
30/700/400/V/T	577411	235919	198409	-	351228	179081	140030	-
30/700/400/F/T	905472	345831	-	-	567524	256683	-	-

表12 : Aggregate Results for IUTAH

Level	1	4	8	16
Average Gap	27.15	30.21	12.35	5.50
Average Time	27890	27874	27878	26283
Number of Optimal	7	7	6	9
Number of No Solution	6	0	6	6

表13 : Gaps and Computation Times for IUTAH

Level	Gap(%)				Time(Seconds)			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	5	6	6	13
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	15	4	9	18
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	77	5	10	73
20/230/200/V/L	10.07	18.34	14.51	6.36	36000	36000	36000	36000
20/230/200/F/L	21.43	33.29	29.08	13.05	36000	36000	36000	36000
20/230/200/V/T	19.96	21.26	13.32	5.76	36000	36000	36000	36000
20/230/200/F/T	22.57	26.07	23.30	12.89	36000	36000	36000	36000
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00	6	4	7	16
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00	90	20	139	150
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00	3	4	8	31
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00	389	40	33	105
20/300/200/V/L	33.10	28.58	21.19	8.84	36000	36000	36000	36000
20/300/200/F/L	53.31	43.18	38.42	18.49	36000	36000	36000	36000
20/300/200/V/T	37.99	30.21	19.17	5.68	36000	36000	36000	36000
20/300/200/F/T	35.83	35.02	30.53	20.84	36000	36000	36000	36000
30/520/100/V/L	21.06	8.03	0.47	0.00	36000	36000	36000	14453
30/520/100/F/L	44.90	25.62	15.39	8.58	36000	36000	36000	36000
30/520/100/V/T	19.42	3.97	0.73	0.20	36000	36000	36000	36000
30/520/100/F/T	42.92	26.60	17.96	6.83	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/L	-	44.20	31.81	12.90	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/L	-	83.04	-	-	36000	36000	36000	36000
30/520/400/V/T	-	45.37	31.46	11.08	36000	36000	36000	36000
30/520/400/F/T	-	84.80	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/L	26.91	8.69	0.76	0.00	36000	36000	36000	7923
30/700/100/F/L	35.92	20.73	9.12	2.82	36000	36000	36000	36000
30/700/100/V/T	22.24	7.03	1.63	0.54	36000	36000	36000	36000
30/700/100/F/T	42.87	20.45	9.98	2.71	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/L	-	76.36	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/L	-	88.64	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/V/T	90.87	52.32	-	-	36000	36000	36000	36000
30/700/400/F/T	97.49	104.79	-	-	36000	36000	36000	36000

表14 : Upper Bound and Lower Bound for IUTA

Level	Upper Bound				Lower Bound			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	688182	467738	419168	397403	688182	467738	419168	397403
20/230/040/V/T	627371	422670	383764	363851	627371	422670	383764	363851
20/230/040/F/T	1630001	840517	690115	632472	1630001	840517	690115	632472
20/230/200/V/L	758583	248584	158433	108495	689167	210053	138359	102008
20/230/200/F/L	1542612	484973	277881	172624	1270361	363862	215273	152691
20/230/200/V/T	890651	286497	174996	120176	742471	236267	154423	113632
20/230/200/F/T	1651154	487028	276947	176296	1347066	386329	224606	156171
20/300/040/V/L	724306	488084	438585	409160	724306	488084	438585	409160
20/300/040/F/L	1478565	776468	642686	563572	1478565	776468	642686	563572
20/300/040/V/T	765823	521259	470237	453769	765823	521259	470237	453769
20/300/040/F/T	1671550	874117	711463	622074	1671550	874117	711463	622074
20/300/200/V/L	726233	233420	143371	97596	545630	181537	118306	89666
20/300/200/F/L	1710272	459019	266730	164238	1115599	320582	192702	138615
20/300/200/V/T	723618	235824	146577	97081	524415	181114	123002	91860
20/300/200/F/T	1407540	405788	239161	154841	1036283	300533	183219	128132
30/520/100/V/L	200795	96017	70527	57229	165869	88883	70195	57229
30/520/100/F/L	618822	215839	142727	106339	427062	171822	123692	97935
30/520/100/V/T	193385	93237	71522	58837	161935	89680	71007	58718
30/520/100/F/T	688901	255307	172461	122523	482020	201669	146202	114692
30/520/400/V/L	-	303490	211232	148029	-	210463	160260	131114
30/520/400/F/L	-	552093	-	-	-	301632	-	-
30/520/400/V/T	-	314121	218910	151906	-	216085	166522	136749
30/520/400/F/T	-	575437	-	-	-	311382	-	-
30/700/100/V/L	195016	89137	65168	51745	153667	82013	64675	51745
30/700/100/F/L	303350	126959	87509	65890	223187	105158	80193	64082
30/700/100/V/T	175772	82933	62590	51531	143787	77483	61588	51255
30/700/100/F/T	310662	126614	89442	67473	217436	105117	81327	65693
30/700/400/V/L	-	333210	-	-	-	188940	-	-
30/700/400/F/L	-	519028	-	-	-	275140	-	-
30/700/400/V/T	711757	278873	-	-	372896	183083	-	-
30/700/400/F/T	1222196	549737	-	-	618854	268440	-	-