

# 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を導入した 水文頻度解析手法および当該区間の構成プログラムの提案

清水啓太\*, 山田正\*\*, 山田朋人\*\*\*

## A Proposal of Hydrological Frequency Analysis Introducing Confidence Interval and Prediction Interval Based on Probability Limit Method Test and Its Construction Program

Keita SHIMIZU\*, Tadashi YAMADA\*\* and Tomohito YAMADA\*\*\*

### Abstract

The main purpose of hydrological frequency analysis is to estimate hydrological quantity with design return period. In conventional hydrological frequency analysis, we estimate  $T$ -year hydrological quantity by using observed data which were accumulated for several decades. However, observed data of extremes which were accumulated so far is so limited one that the design hydrological quantity includes uncertainty to a large extent. Moreover, one of the difficulties caused by shortage of extreme value data is not to predict catastrophic heavy rainfalls which deviate greatly from adopted probability distribution which is used for river planning. So, it is often impossible to evaluate catastrophic heavy rainfalls and these rainfalls are treated as unexpected. Therefore, we propose new hydrological frequency analysis introducing confidence interval and prediction interval based on probability limit method test. By introducing this confidence interval into hydrological frequency analysis, uncertainty of design hydrological quantity can be quantified. Also, by introducing this prediction interval, it can be possible to predict the scale and occurrence risk of catastrophic heavy rainfalls. In this research, the theoretical frame work of hydrological frequency analysis introducing confidence interval and prediction interval and its construction program are shown.

### 1 はじめに

従来の洪水対策では、過去数十年間に渡る水文観測により得られた極値水文資料を統計解析することで、計画水文学の推定が行われてきた。極値水文資料は、一般的に、水文学の観測時系列のうち年最大値から構成される標本（年最大値資料）と設定した閾値を超過する観測値から構成される標本（閾値超過資料）に分類される。また、上述した統計解析手法は、水文頻度解析と呼ばれる。水文頻度解析手法の多くは、極値理論にその数理的基礎を置く。R.A.Fisher, L.H.C. Tippet [1] は、標本中の最大値は、サンプル数が多いほど、漸近的に3種類の極値分布のいずれかに従うことを示し、極値理論の基礎を構築した。後に、各種極値分布は、それぞれ Gumbel 分布, Frechet 分布および負の Weibull 分布と呼ばれるようになった。また 1941 年には、Gumbel [2] が、Fisher と Tippet が提案した第一種最大値漸近分布を、洪水流量を表す確率分布モデルとして採用した。この Gumbel の研究は、Fisher と Tippet が構築した極値理論を初めて水文頻度解析に導入した先駆的なものである。さらに、Gnedenko [3] は、各種極値分布の吸引領域に母集団分布が属するための必要十分条件を明らかにした。また、Jenkinson [4] は、各3種の極値分布を統一的に表した一般化極値分布を提案した。1958年には、Gumbel が、それまでに行われてきた極値理論に関する研究を集大成さ

\* 中央大学大学院理工学研究科都市人間環境学専攻 〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27

\*\* 中央大学理工学部都市環境学科 〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27

\*\*\* 北海道大学大学院工学研究院 〒060-8628 北海道札幌市北区北十三条西8丁目

せ体系づけたものに加えて、種々の新理論を掲載した著書“Statistics of Extremes” [5] を発表した。これは、世界初となる極値理論に関する専門書である。加えて、Coles [6] や de Haan [7] は、当時までの主要な極値統計学における研究成果ならびに手法を豊富な例題とともに解説し、著書にまとめている。従来の水文頻度解析では、既往の極値水文資料に対し、候補として挙げた確率分布モデルの母数推定を行い、適合度および安定性といった評価基準を十分に満たす確率分布モデルを一つ採用し、確率水文学量の推定を行うということが常である。

しかしながら、今日までに蓄積されている極値水文学量の観測値（観測極値）は数十個から多くとも百数十個程度であるため、従来の水文頻度解析における推定は不確実性を大いに内包している。すなわち、観測極値の不足に起因する不確実性が水文頻度解析による記録的豪雨の評価を困難としている。具体的には、観測極値の不足に起因する困難点として、寶 [8] は、記録的豪雨の観測値の多くが、採用した確率分布モデルから大きく外れ、数千年あるいは数万年といった再現期間を示す場合があることを挙げている。また、藤部 [9] は、データの観測年数を超える長期の再現期間に相当する確率水文学量を推定する際、確率分布モデルによる外挿に伴い、推定誤差が増大することを指摘している。加えて、近年、我が国では、過去経験のないような規模の豪雨が多発しており、各地で人命ならびに社会基盤等に対して大規模な被害をもたらしている。このような現状を鑑みると、上述したような近年における降雨の激甚化ならびに地球温暖化に伴う豪雨の頻発傾向を考慮した洪水対策の策定は喫緊の課題である。糸川・山田 [10] はそれまでの既往最大値を更新する、記録破りの大雨の出現頻度を新記録の理論を用いて明らかとした。渋谷 [11] は、新記録の発生個数が従う分布であるスターリング分布を用いて、新記録の理論の発展に寄与した。糸川・山田 [10] は、日本各地の日降雨量の年最大値のデータの中からその地点の新記録の発生個数の分布を求め、上記の理論との比較を行い、両者の良好な一致を確認し、この理論の妥当性を示している。また、激甚豪雨に対応した洪水対策の構築に向けて、近年では、アンサンブル気候予測データベースを用いた洪水リスク評価手法が提示されている [12] [13]。アンサンブル気候予測データベースとは、気象モデルによる過去気候および将来気候の計算結果を格納したデータベースである。このデータは、我々が過去経験する可能性のあった降雨ならびに将来経験する可能性のある降雨の観測値として捉えることができる。従来の洪水対策では、実績として存在するただ一つの観測標本に基づき計画降雨量を設定してきたが、同データを用いることで、計画降雨量の“振れ幅”を合理的に推定することができる。計画外力の振れ幅とは、信頼区間と定義されるものである。従来の水文頻度解析では、信頼区間は、ジャックナイフ法やブートストラップ法等の数値的手法や、確率水文学量がある確率分布に従うという仮定に基づくパラメトリックな手法を用いることによって表されてきた。これらの手法は、中心極限定理を用いて、推定量（例えば、確率水文学量）に正規分布を仮定する。しかしながら、確率水文学量の分布を正規分布として扱うことには困難があると考えられる。これは、既述したように、限られた観測極値の下で、確率水文学量を始めた各統計量に正規性を仮定することは難しいためである。これらのことを受け、本論では、確率限界法検定 [14] の理論を応用し、このような仮定を設定せず、可能な限り解析的に構成可能な信頼区間を提案する。加えて、当該信頼区間の精度が極めて高いことを示す。

信頼区間と混合しやすい概念として予測区間がある。予測区間は、将来期間において生じうる観測値が存在する範囲と定義されるものである。この定義を踏まえると、極値の予測区間は、将来期間に実現する最大値を確率変数とみなして、この確率変数の分布がある割合で含まれる範囲を表すものである。予測区間の理論体系の多くは竹内 [15] により示されている。一方、極値の予測区間に関する既往研究は、著者の知る限りさほど多くはない。従来の水文頻度解析では、極値の予測区間は、将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が正規分布あるいは  $t$  分布に従うとして、構築されてきた。しかしながら、北野ら [16] が指摘するように、将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が従う確率分布は正規分布や  $t$  分布ではなく、一般的に極値分布とすることが妥当と考えられる。なぜならば、将来期間に生起しうる年最大雨量などの極大値を推定することを考えたとき、極大値の実現値は、生起確率が低頻度である一方その規模は莫大となる。そのため、極大値をもたらす確率分布の形状としては、正規分布のように左右対称なものではなく、低頻度かつ大規模現象の存在を表現可能な右裾部が歪んだ分布を考えることが妥当であり、その分布としては極値分布が最適であるといえる。さらに、観測極値の個数が十分なら

ば、中心極限定理により、正規性の仮定を置くことは妥当であると考えられる。しかしながら、現在我々が利用可能なデータは正規性の仮定を設定するには不十分である。近年では、北野ら [17] がベイズ法を用いて将来期間における極値の予測区間を構成する手法を示している。北野らの手法は、生起率の従う確率分布をガンマ分布と仮定し、観測標本に対して正規性の仮定を設定せずに予測区間を構成可能という点で従来手法に対して優位性を有する。本論では、確率限界法検定の理論に基づいて予測区間を構成する手法を示すとともに、同検定に基づく予測区間を用い、将来期間における激甚現象の生起リスクを算出する理論的枠組みを提示する。本論は、著者の既往論文において示した研究成果を総合的にまとめ、さらにその後の進展を記したものである。

## 2 信頼区間・予測区間の定式化

本章では、統計的推定および予測の方法を述べるとともに、信頼区間および予測区間の概念を詳説する。なお、信頼区間については竹村 [18] の著書、予測区間については竹内 [15] の著書に準拠し、これらの方法を解説する。

### 2.1 統計的推定の方法

統計的推定とは、一般的に、利用可能な標本 $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ に基づき、母集団の特性値（母数あるいはパラメータという）を推定することである。母数の例としては、位置母数、尺度母数、形状母数、母平均、母分散、母集団分布のパーセンタイル値（水文頻度解析における確率水文量）等が挙げられる。

統計的推定の方法としては、主に点推定と区間推定がある。点推定とは、母数 $\theta$ を標本 $X$ から推定した唯一の統計量 $\hat{\theta}$ で指定する方法である。このとき、 $\hat{\theta}$ を推定量という。一方、区間推定とは、母集団分布の未知母数 $\theta$ を推定するときに、標本 $X$ を用いて、下側信頼限界値 $L_{C.I.}(X)$ 、上側信頼限界値 $U_{C.I.}(X)$ を求め、これらの信頼限界値から構成される区間 $[L_{C.I.}(X), U_{C.I.}(X)]$ の中に、母数 $\theta$ が $1-\alpha$ 以上の確率で含まれていることを保証するという推定方法である。ここで、 $\alpha$ は有意水準であり、母数 $\theta$ が信頼区間に入らない確率を表す。このとき、区間 $[L_{C.I.}(X), U_{C.I.}(X)]$ を信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間あるいは $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間という。なお、有意水準 $\alpha$ が取りうる値の範囲は $0<\alpha<1$ である。次に、母数 $\theta$ に関する信頼区間の定義式を式(1)に示す。

$$P(L_{C.I.}(X) \leq \theta \leq U_{C.I.}(X)) \geq 1 - \alpha \quad (1)$$

ここで、 $1-\alpha$ は信頼係数を表す。

信頼区間の具体的意味は、母集団から大きさ $n$ の標本を任意の回数 $N$ だけ抽出した場合に、得られる $N$ 個の信頼区間のうち $100(1-\alpha)\%$ 以上が母数 $\theta$ を含むことである。

次に、数理モデル（回帰直線、確率分布モデル等）に関する信頼区間の定義及び用法等を詳述する。確率分布モデル $D(X; \hat{\theta})$ の信頼区間の定義を、確率変数を $X$ 、確率分布の母数を $\theta$ 、観測値の総数を $n$ として次に示す。確率分布モデル $D(X; \hat{\theta})$ の信頼区間とは、同一条件の下で、同様な観測・実験を $N$ 回実施した際、得られる $N$ 個のアンサンブル標本 $X_{ens}^j$ に確率分布モデル $D(X; \theta)$ を当てはめ、母数推定を行い、求まる $N$ 個の確率分布モデル $D(X; \hat{\theta}^j)$  ( $j=1, 2, \dots, N$ )が存在する範囲である。ここで、各アンサンブル標本 $X_{ens}^j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ )の標本の大きさは $n$ とする。例えば、確率分布モデル $D(X; \hat{\theta})$ の95%信頼区間とは、上述した手順に基づき求めた $N$ 個の確率分布モデル $D(X; \hat{\theta}^j)$ のうち、95%程度が存在する範囲である。ここに、 $j$ : 標本の番号、 $\hat{\theta}$ : 母数 $\theta$ の推定値である。

標本 $X$ を当てはめた確率分布の累積分布関数を $F(X)$ と表す。このとき、累積分布関数 $F(X)$ の信頼区間を式(2)に示す。

$$P(L_{C.I.}(X) \leq F(X) \leq U_{C.I.}(X)) \geq 1 - \alpha \quad (2)$$

### 2.2 統計的予測の方法

統計的予測とは、利用可能なデータ（標本） $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ に基づき、将来期間に発生する未知量 $Y$ を予測することである。ここで、 $Y$ は将来観測値を表す確率変数である。河川・水文分野における統計的予測の一例としては、「過去の極値降水量の観測系列(= $X$ )を用いて、将来期間において発生する極値降水量(= $Y$ )を予

測すること」等が挙げられる。

統計的予測の方法としては、点予測と区間予測等がある。点予測とは、標本 $X$ から求めた予測値 $\hat{Y}$ により、 $X$ から $Y$ の値そのものを予測する方法である。一方、区間予測とは、標本 $X$ から下側予測限界値 $L_{PI}(X)$ 、上側予測限界値 $U_{PI}(X)$ を求め、将来観測値 $Y$ が $L_{PI}(X)$ と $U_{PI}(X)$ の間に、ある確率をもって存在するという形式で予測を行う方法である。将来観測値 $Y$ に対する予測区間を式(3)に示す。

$$P(L_{PI}(X) \leq Y \leq U_{PI}(X)) \geq 1 - \alpha \quad (3)$$

このとき、 $Y$ が $1-\alpha$ 以上の確率で含まれていることを保証する区間 $[L_{PI}(X), U_{PI}(X)]$ を信頼係数 $1-\alpha$ の予測区間あるいは $100(1-\alpha)\%$ 予測区間という。例えば、95%予測区間とは、将来の観測値のうち95%程度が入る区間である。

確率分布の振れ幅を推定したい場合は信頼区間を使用し、将来期間に生起する極値そのものを予測したい場合は予測区間を使用する必要がある。

### 3 確率限界法検定の概要

確率限界法検定は、Kolmogorov-Smirnov 検定 [19] の弱点である“仮定した確率分布の裾部に対する検定力の低さ”を改善した検定理論である。ここで、検定力とは、誤った仮説を棄却する確率を表し、検定力が高いほど信頼区間は狭まり、推定の精度が向上する。同検定では、仮定した確率分布の確率表現関数の両側に確率限界線（確率限界法検定における棄却限界線）を構成し、観測値が両線により定まる区間の外部に存在する場合、有意な差があると判定する。ここで、確率表現関数とは累積分布関数の逆関数である [20]。

以降では、仮定した確率分布を  $D(X; \theta)$ 、 $D(X; \theta)$  の累積分布関数を  $F_X(X)$ 、 $D(X; \theta)$  の確率表現関数を  $\chi_X(u)$  と表記する。また、 $X$  は確率変数を表し、 $F_X(X)$  により求まる  $X$  の累積確率を確率変数  $U(=F_X(X))$  と表記する。確率分布  $D(X; \theta)$  の累積分布関数の関数形  $F_X(x)$  を式(4)、確率表現関数の関数形  $\chi_X(u)$  を式(5)により表す。

$$u = F_X(x) \quad (4)$$

$$x = \chi_X(u) \quad (5)$$

ここに、 $x$  : 確率変数  $X$  の実現値、 $u$  : 累積確率（確率変数  $U$  の実現値）である。

#### 3.1 確率限界法検定

本節では、確率限界法検定の理論を詳説する。累積確率  $U(=F_X(X))$  は、区間 $[0,1]$ の一様分布（以降、標準一様分布あるいは  $U[0,1]$  と表記）に従う。また、 $U$  の実現値から構成された順序統計量  $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$  に関して、第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の確率分布は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布となる。このため、式(6)が成立する。

$$\begin{aligned} F_{U_{(i)}}(i) &= P(U_{(i)} \leq u) \\ &= I_u(i, n-i+1) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $F_{U_{(i)}}(u)$  : 第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の累積分布関数、 $I_u(i, n-i+1)$  : 母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の累積分布関数である。ここで、確率  $\alpha$  を「確率限界値を求めるための確率（極端な  $U_{(i)}$  が生起する確率、すなわち、 $U_{(i)}$  が母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の裾部付近に生起する確率)」、 $F_{U_{(i)}}(u) = \alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における下方確率限界値  $z_L(i)$ 」および  $F_{U_{(i)}}(u) = 1-\alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における上方確率限界値  $z_U(i)$ 」として定義する。すなわち、 $z_L(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100\alpha\%$  ile 値、 $z_U(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100(1-\alpha)\%$  ile 値である。また、確率  $\alpha_{min}$  は式(7)により定義される。

$$\alpha_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{Min} \left[ \begin{array}{l} I_u(i, n-i+1) \\ I_{1-u}(i, n-i+1) \end{array} \right]_{u=u_{(i)}} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $I_u(i, n-i+1)|_{u=u_{(i)}}$  : 第  $i$  順序統計量  $u_{(i)}$  の非超過確率、 $I_{1-u}(i, n-i+1)|_{u=u_{(i)}}$  : 第  $i$  順序統計量  $u_{(i)}$  の超過確率である。

式(7)は、「順序統計量  $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$  が有する非超過確率および超過確率をそれぞれ比較し、どちらか小さい方を抽出することで、 $n$  個の確率を得る。このとき、求めた  $n$  個の確率のうち、最小値を  $\alpha_{min}$  とする。」という数学的操作を表す。ここで、前述した  $n$  個の確率を、 $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  と記述すると、 $\alpha_{min} = \text{Min}\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  である。

次に、式(7)に示される確率  $\alpha_{min}$  の分布の構成方法および特性を詳述する。まず、標準一様分布に従う乱数  $u^j$  を  $n$  個発生させ、これらの乱数から構成される標本  $U_{ens.}^j = \{u^j_1, u^j_2, \dots, u^j_n\}$  を作成する。この操作を  $N$  回行い、 $N$  個の標本  $\{U_{ens.}^1, U_{ens.}^2, \dots, U_{ens.}^N\}$  を得る。ここで、 $j$  は作成した標本の番号を表す ( $j=1, 2, \dots, N$ )。標本  $U_{ens.}^j$  において、第  $i$  順序統計量  $U^j_{(i)}$  は、母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布に従うため、当該分布の最端部近傍に生じた  $u^j_{(i)}$  の非超過確率あるいは超過確率を求めることができる。以降の説明を簡単にするため、当該の  $u^j_{(i)}$  (標本  $U_{ens.}^j$  中で母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の最端部近傍に生じた  $u^j_{(i)}$ ) を  $u^{j(i)}$  と表記する。 $u^{j(i)}$  が母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の左裾部に存在する場合、 $u^{j(i)}$  の非超過確率を抽出し、この非超過確率を  $\alpha_{min}(j)$  とする。一方、 $u^{j(i)}$  が母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の右裾部に存在する場合、 $u^{j(i)}$  の超過確率を抽出し、この超過確率を  $\alpha_{min}(j)$  とする。

式(7)が示す操作を  $N$  個の標本  $\{U_{ens.}^1, U_{ens.}^2, \dots, U_{ens.}^N\}$  に対して実行し、 $\{\alpha_{min}(1), \alpha_{min}(2), \dots, \alpha_{min}(N)\}$  を得る。ここで、 $\alpha_{min}$  はオーダーが小さく (例えば、 $N=1000$  の場合、 $\alpha_{min}$  の平均値は  $10^{-2}$  オーダーである)、これらの値を扱いやすくするため、 $N$  個の  $\alpha_{min}$  をそれぞれ  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  という関数形に変形する。Fig-1 は  $N=1000$  の場合、1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  を、この値を与える  $u_{(i)}$  の累積確率  $F(u_{(i)}) (=i/n)$  を用いて、プロットしたものである。この図において、 $\alpha_{min}$  が  $I_{u(i, n-i+1)}$  により与えられた場合、すなわち、 $\alpha_{min}$  が非超過確率となる場合、対応する  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  を「×」で示す。一方、 $\alpha_{min}$  が  $I_{1-u(n-i+1, i)}$  により与えられた場合、すなわち、 $\alpha_{min}$  が超過確率となる場合、対応する  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  を「●」で示す。この図から、 $\alpha_{min}$  はほぼ一様に分布しており、 $\alpha_{min}$  が非超過確率である割合と  $\alpha_{min}$  が超過確率である割合は同程度であることが分かる。なお、非超過確率を表す  $\alpha_{min}$  (同図における「×」) の総数と超過確率を表す  $\alpha_{min}$  (同図における「●」) の総数は同程度となることが示されている [14]。

任意の有意水準に応じた確率  $\alpha$  を決定するために、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  を用いて、経験的表現関数  $\chi_{emp.}(u)$  (経験分布の確率表現関数) を作成する。 $N=1000$  の場合、この経験的表現関数の一例を Fig-2 に示す。この図に示す経験的表現関数において累積確率  $u$  が 1 に近い範囲に相当する確率  $\alpha$  ほど、母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の最端部付近に生起する第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の非超過確率あるいは超過確率を表す。ここで、確率  $\alpha$  が非超過確率である割合と超過確率である割合はほぼ同程度であるため、両側確率  $100(1-p)\%$  に対応する確率  $\alpha$  は、非超過確率としての  $\alpha_{min}$  のうち値の小さい  $\alpha_{min}$  を  $100((1-p)/2)\%$  分だけ除いたものを表すとともに、超過確率としての  $\alpha_{min}$  のうち値の小さい  $\alpha_{min}$  を  $100((1-p)/2)\%$  分だけ除いたものを表す [14] [21]。

次に、両側確率  $100(1-p)\%$  で確率限界法検定を行う場合における確率  $\alpha$  の導出方法を示す。両側確率  $100(1-p)\%$  に相当する確率  $\alpha$  は Fig-2 に示す経験的表現関数  $\chi_{emp.}(u)$  の  $100p\%$  ile 値について成立する方程式  $\chi_{emp.}(p) = -\log_{10}(2\alpha)$  を  $\alpha$  について解くことで求まる。例えば、両側確率  $5\%$  の場合における確率  $\alpha$  は、 $\chi_{emp.}(0.95) = -\log_{10}(2\alpha) \doteq 2.5$  より、約  $1.5 \times 10^{-3}$  となる。

上述した手順に基づき算出した確率  $\alpha$  を用いて  $U[0,1]$  における下方確率限界値  $z_L(i)$  および上方確率限界値  $z_U(i)$  を求める。ここで、式(6)において、事象  $(U_{(i)} \leq u)$  とは  $n$  回の独立な試行において  $u$  以下の値が  $i$  回以上発生することに等しいため、式(8)が成立する。

$$F_{U_{(i)}}(u) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} \quad (8)$$

$U[0,1]$  における確率限界値の算出には、式(8)による方法が数値計算上便利である。

両側確率  $100(1-p)\%$  の場合における下方確率限界値は、第  $i$  順序統計量を取りうる値のうち、極端に小さい値が発生する確率を  $100((1-p)/2)\%$  分除いたものであり、上方確率限界値は極端に大きな値が発生する確率を  $100((1-p)/2)\%$  分除いたものである。確率限界値に適当な累積確率  $F_U(u_{(i)})$  を与えることで定まる実験点を下方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  および上方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_U(i))$  とする。ここでは、 $F_U(u_{(i)})$  は  $i/n$  としている。標準一様分布の場合、 $i=1, 2, \dots, n$  について、 $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  を連ねた線を下方確率限界線、 $(F_U(u_i), z_U(i))$  を連ねた線を上方確率限界線とする。Fig-3 は両側確率  $5\%$ 、 $n=41$  の場合における標準一様分布における確

率限界線を示したものである。この図は、上記した条件の下で、同一の確率  $F_U(u_{(i)})$  において、累積確率  $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$  が取りうる幅  $[z_L(i), z_U(i)]$  を示している。

次に、仮定した確率分布  $D(X; \theta)$  における確率限界値の導出手順を示す。  $U$  は標準一様分布に従うため、標準一様分布における確率限界値を累積確率として扱うことができる。したがって、仮定した確率分布  $D(X; \theta)$  における下方確率限界値は  $\chi_X(z_L(i))$ 、上方確率限界値は  $\chi_X(z_U(i))$  となる。

Fig-4 は、草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量の観測値が従うと仮定した Gumbel 分布に対して、この分布に対する両側確率 5% 確率限界線の構成過程を示したものである。この図から、累積確率の限界値  $z_L(i)$  および  $z_U(i)$  が仮定した確率分布の確率表現関数を介して降雨量  $X_{(i)}$  に対する推定区間  $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$  が構成されていることが分かる。なお、本研究で扱う草木ダムの年最大総降雨量は、72 時間という期間内に生起した草木ダムにおける流域平均降雨量の年最大値である。

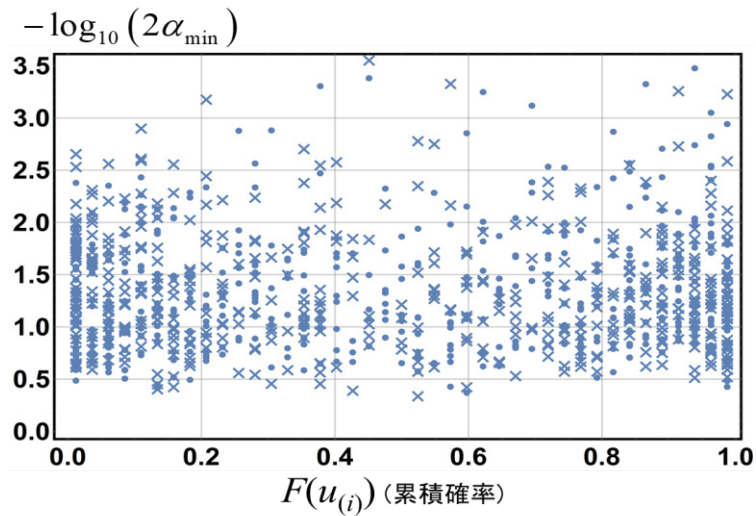


Fig-1 The relationship between  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  and cumulative probability  $F(u_i)$  of  $i$ th order statistics which gives probability  $\alpha_{min}$

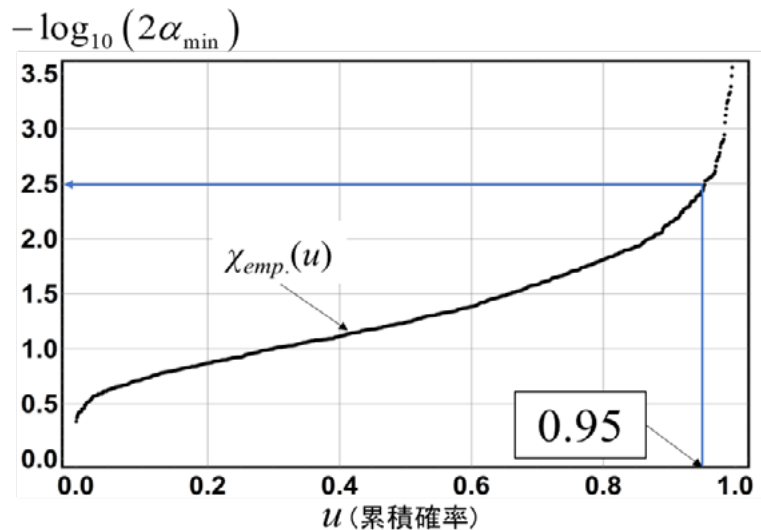


Fig-2 Empirical representative distribution  $\chi_{emp}(u)$  constructed of 1000 sets of  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  (Hazen plot)

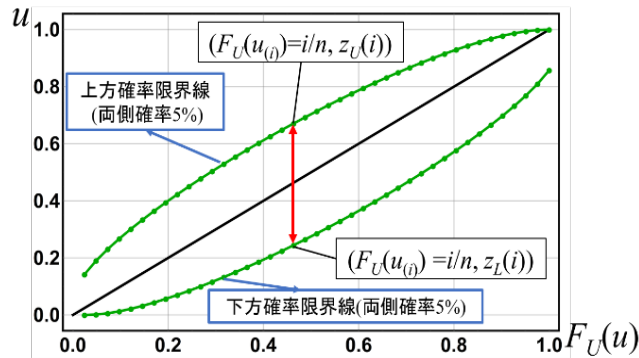


Fig-3 Probability limit line of probability limit method test in the case of 5% two-side probability and 41 sample size

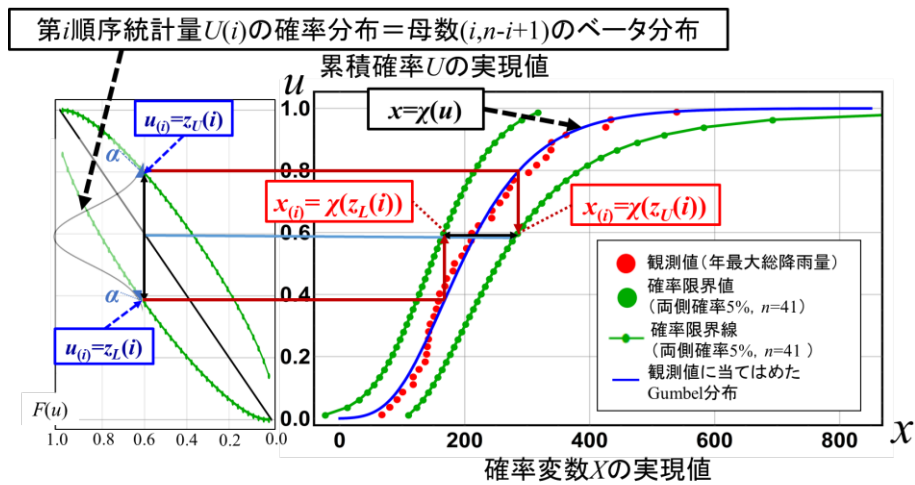


Fig-4 Construction process of probability limit line of probability limit method test in the case of 5% two-side probability and 41 sample size (Hazen plot)

### 3. 2 Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定の検定力の比較

森口 [14] は、Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定における検定力の比較を行い、確率限界法検定の Kolmogorov-Smirnov 検定に対する優位性を示している。本節では、この有意性を両検定の採択域を描画することで確認する。Fig-5 は上述したデータおよび確率分布に加えて両検定の両側確率5%限界線を示したものである。同図より、確率限界法による限界線から構成される区間は、Kolmogorov-Smirnov 検定のそれよりも仮定した確率分布の両端部で狭まり、当該部に対して高い検定力をもつことが分かる。

採択域（棄却限界線から成る区間）とは、選定した仮説検定の下では、どの程度データが散らばっているのかを示すものである。同図より、Kolmogorov-Smirnov 検定では、仮定した確率分布の両端部において、幅が無限大の大きさとなっていることが分かる。これは、Kolmogorov-Smirnov 検定の下では、無限大の雨量や流量も存在するということである。無限大の雨量や流量の存在は、我々の認識に照らし合わせてみると、それらの存在はあり得ないことである。一方、同図より、確率限界法検定の採択域は、Kolmogorov-Smirnov 検定のそれとは異なり、仮定した確率分布の両端部で狭まっていることが分かる。これは、確率限界法検定の下では、雨量や流量はある有限の幅の中に存在するということを意味しており、このことは我々の認識とも整合性が取れている。また、検定力と信頼区間・予測区間は互いに関連している。一般的に、検定力が高いほど、その仮説検定理論に基づく信頼区間・予測区間は、狭まり高い精度をもつ。計画規模相当の水文量の値は、水文頻度解析に採用する確率分布の裾部の形状によって変動する。このため、本研究では、計画規模相当の水文量を適切に評価するために、確率分布の裾部に対して高い検定力を有する確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を構成した。

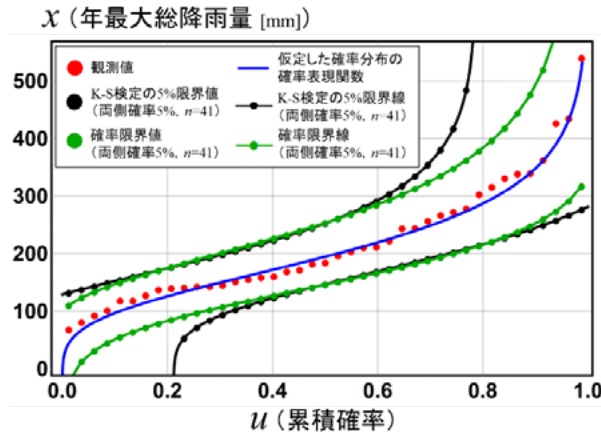


Fig-5 Comparison of the power of test between Kolmogorov-Smirnov test and probability limit method test in the case of 5% two-side probability and 41 sample size (Hazen plot)

4 確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した水文頻度解析手法

本章では、確率限界法検定を応用し、信頼区間を構成する理論を詳説する。なお、当該信頼区間の構成にあたり、設定した仮定を以下に示す。

- 1) 水文量は定常過程に従い生起する。
- 2) 水文量の物理的上限值および下限値は存在しない。

以降では、当該信頼区間の導出過程を記す。

4.1 確率限界法検定に基づく信頼区間の構成手法

本研究では、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布  $D_{Ext}(\theta_\alpha)$  を当てはめ、母数推定を行った当該分布  $D_{Ext}(\hat{\theta}_\alpha)$  を用いて、確率  $\alpha$  を求めている。この点で、森口 [14] が定義した確率  $\alpha$  と本研究における確率  $\alpha$  は異なるものである。なお、上述した母数推定には最尤法を採用している。ここで、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめた理由を次に示す。前述した  $n$  個の確率  $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  を変形し、標本  $\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  を得る。このとき、 $-\log_{10}(2\alpha_{min}) = \text{Max}\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  が成立するため、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  はこの標本中の最大値となる。標本中の最大値は、サンプリング数が多いほど、極値分布に漸近的に従うため、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめることは妥当であり、本研究では、Gumbel 分布を採用した。Fig-6 に 1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_\alpha(u)$  を示す。同図より  $\chi_\alpha(u)$  と 1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  から作成した経験的表現関数  $\chi_{emp}(u)$  はほとんど一致していることが分かる。 $\chi_\alpha(u)$  を求めることにより、任意の有意水準に応じた信頼区間を構成することが可能となる。例えば、両側確率 5% の場合、95% 信頼区間の構成に必要な確率  $\alpha$  は、 $\chi_\alpha(0.95) = -\log_{10}(2\alpha) \doteq 2.5$  より、 $\alpha \doteq 1.5 \times 10^{-3}$  となる。

次に、確率分布の信頼区間を構成する方法を示す。区間  $[z_L(i), z_U(i)]$  は、確率変数列  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  から求まる第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$  の累積確率  $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$  が数学上取りうる幅である。確率表現関数  $\chi_X(u)$  に標準一様分布における確率限界値を代入することで  $X_{(i)}$  の推定区間  $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$  を構成することができる。すなわち、 $\chi_X(z_L(i))$  および  $\chi_X(z_U(i))$  は採用した確率分布に従う  $X_{(i)}$  が取りうる値の下限値および上限値である。次に、 $100p\%$  信頼限界線を構成する手順を示す。採用した確率分布  $D(X; \theta)$  を、「下方確率限界値から構成される標本  $X_L = \{\chi_X(z_L(1)), \chi_X(z_L(2)), \dots, \chi_X(z_L(n))\}$ 」および「上方確率限界値から構成される標本  $X_U = \{\chi_X(z_U(1)), \chi_X(z_U(2)), \dots, \chi_X(z_U(n))\}$ 」に当てはめ、母数  $\theta$  を推定する。 $X_L$  から推定した母数を  $\hat{\theta}_L$ 、 $X_U$  から推定した母数を  $\hat{\theta}_U$  とすると、これらの推定値から求まる確率分布  $D(X; \hat{\theta}_L)$  は  $D(X; \theta)$  に対する下側信頼限界となり、かつ、確率分布  $D(X; \hat{\theta}_U)$  は  $D(X; \theta)$  に対する上側信頼限界となる。したがって、本研究では、 $D(X; \hat{\theta}_L)$  を  $100p\%$  下側信頼限界線、 $D(X; \hat{\theta}_U)$  を  $100p\%$  上側信頼限界線とし、両限界線から構成される区間を  $D(X; \theta)$  の  $100p\%$  信頼区間と定義した。Fig-7 は、草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値に当てはめた Gumbel 分布の 95% 信頼区間の構成過程を示したものである。同図から、標本  $X_L$  および標本  $X_U$  に採用確率分布を当てはめ、信頼限界線が構成されていることが分かる。なお、本研究では、採用確率分布は Gumbel 分布である。



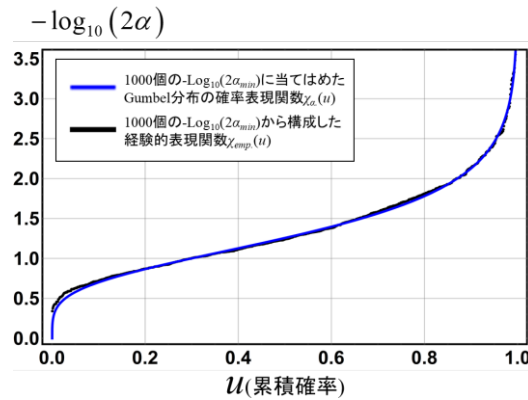


Fig-6 Empirical representative function of Gumbel distribution constructed of 1000 sets of  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  and probability representative function of Gumbel distribution fitted with 1000 sets of  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  (Hazen plot)

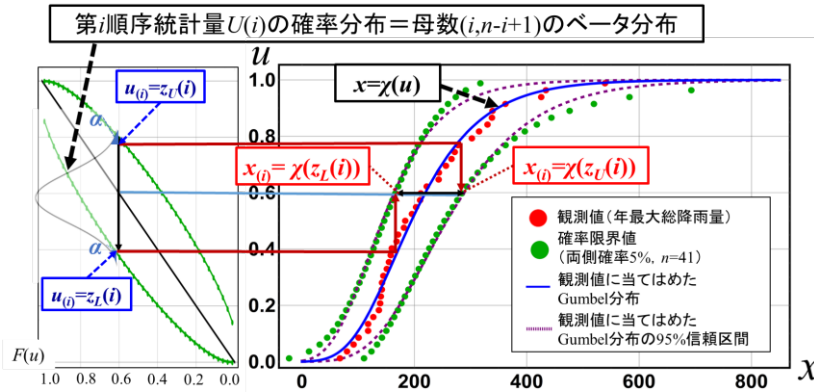


Fig-7 Construction process of 95% confidence interval (Hazen plot)

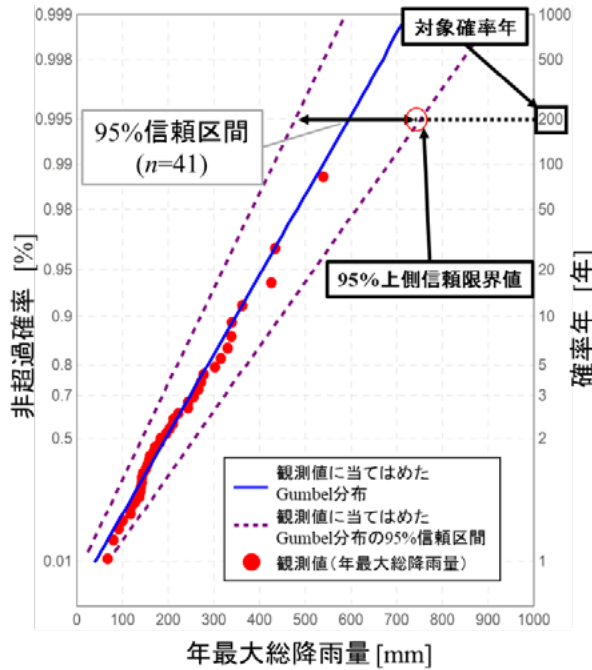


Fig-8 Observed data of annual maximum total rainfall for 41 years in Kusaki dam basin, Gumbel distribution fitted with these data and 95% confidence interval based on probability limit method test Where, “n” means total number of observed data.

#### 4. 2 信頼区間を導入した水文頻度解析手法の概要

本節では、信頼区間を導入した水文頻度解析の具体的手法を示す。Fig-8 は、草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値、これら 41 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定を応用し導出した当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示したものである。信頼区間の導入により、確率水文学量を取りうる値が理論的に推定可能となり、従来採用してきた観測実績に基づく確率分布は平均曲線として捉えることができる。従来では、上述した平均曲線のみを用いて水文学量の確率年を評価してきたが、このような従来手法は記録的豪雨の確率年を合理的に評価できないという困難点をもつ。信頼区間を導入することにより、 $T$ 年確率規模の洪水対策において、 $T$ 年確率水文学量の振れ幅が求まり、上述したような記録的豪雨をその振れ幅の中の現象として捉えることができるようになる。すなわち、信頼区間は、記録的豪雨の確率年の合理的評価を可能とするものである。上側信頼限界値の超過確率は、「対象確率年」と「信頼区間の超過確率」との積により求まる。 $T$ 年確率規模を対象とした洪水対策において、 $\beta\%$ 上側信頼限界値を超える降雨量が発生するリスクは、 $(1/T) \times (100-\beta)/2$  [%]により表すことができる [21]。この具体例について、Fig-8 を用いて示す。同図において、200 年確率年最大総降雨量の 95%上側信頼限界値の超過確率は、上式より 1/8000 となる。このように、信頼区間の導入により、従来では考慮されなかった規模の激甚豪雨が生起するリスクを定量的に求めることが可能となる。加えて、上記の枠組みにより算出されるリスクは他分野におけるリスク（例えば、交通事故で死亡する割合である 1/2 万、飛行機事故で死亡する割合である 1/50 万等）と同程度のオーダーとなる。すなわち、激甚豪雨が生起するリスクを他分野におけるリスクと比較・評価することができるようになる。中西 [22] はリスクの程度を相対的に比較することで、合理的な対策が実現することに言及しており、この結果は、洪水対策において、リスクの相対評価が実現する可能性を示唆するものである。従来の水文頻度解析では、信頼区間はプロファイル尤度を用いる方法あるいはパラメトリック手法などにより算定されてきた。前者はプロファイル対数尤度から構成した統計量が漸近的にカイ二乗分布に従うという仮定を用い、後者は確率水文学量がある確率分布に従うという仮定を用いる。著者らが提案する確率限界法検定による方法は、上述したような仮定を設定せずに出来るだけ解析的に信頼区間を導出できる点で他の手法に対して優位性をもつ。なお、上述した信頼区間を導入した水文頻度解析手法は、降雨流出解析ならびに総合確率法に適用可能である。これらの詳細については、著者らの既往論文を参照されたい [23] [24]。

#### 5 確率限界法検定に基づく予測区間を導入した水文頻度解析手法

本章では、確率限界法検定の理論に基づいて予測区間を構成する手法を示すとともに、同検定に基づく予測区間を用い、将来期間における激甚現象の生起リスクを算出する理論的枠組みを提示する [25]。加えて、確率限界法検定に基づく予測区間の適用例を紹介する。具体的には、名古屋地方気象台における 1901 年から 1999 年までの年最大日降水量の観測値を用いて、確率限界法検定に基づく予測区間を構成し、このことにより、2000 年に生起した東海豪雨が統計的に予測可能であることを示す。

##### 5. 1 確率限界値の性質

本節では、予測区間の構成において、その理論的根拠となる確率限界法検定における棄却限界値（確率限界値）の性質を示す。

Fig-9 は、名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値（1901 年～1999 年）、これら 99 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布、両側確率 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1% の確率限界値を示したものである。また、Fig-10 は、第 99 順序統計量の確率分布と確率限界法検定における両側確率 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1% の採択域との関係を示したものである。次に、確率限界法検定における採択域の被覆確率を算出し、この被覆確率を順位  $i$  ごとに比較した。ここでの被覆確率は、第  $i$  順序統計量の確率分布が採択域に含まれる割合とする。Fig-11 は、信頼係数と被覆確率の関係を示したものである。同図では、99 個の信頼係数と被覆確率の関係を順位  $i$  別にプロットしている。ここで、信頼係数とは、 $(1-p)$ により表されるものである（ $p$  は有意水準あるいは両側確率

である。 ( $0 < p < 1, i = 1, 2, \dots, 99$ )。なお、上記した各順序統計量の確率分布は、観測値に当てはめた Gumbel 分布の累積分布関数  $F_X(x)$  と確率密度関数  $f_X(x)$  を用いて求めた。任意の順位  $i$  に応じた、第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$  の累積分布関数  $F_{X_{(i)}}(x)$  は式(9)により表される。

$$F_{X_{(i)}}(x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F_X^k(x) \{1 - F_X(x)\}^{n-k} \quad (9)$$

Fig-11 より、信頼係数と被覆確率の関係は、順位  $i$  にほとんど依存せず、ほぼ同じものとなることが分かる。また、同図から、信頼係数の増加に伴い、信頼係数と被覆確率の値が近づいていくことが分かる。これは、信頼係数  $(1-p)$  として 1 に近い値を採用した場合、その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を  $p/2$  として近似可能であることを示している。上述したように、いずれの順位  $i$  においても信頼係数と被覆確率の関係の変化は目視での判別が不可能なほど小さい。これは、確率限界法検定における採択域の精度は順位  $i$  に依存せず一定の精度であることを示している。換言すれば、確率限界法検定による採択域は順序統計量の分布により表される観測値の存在範囲を高精度で推定するものである。このことは、確率限界値を外挿することにより、観測期間の外部、すなわち、将来期間においても未知観測値の存在範囲を推定できることを示している。

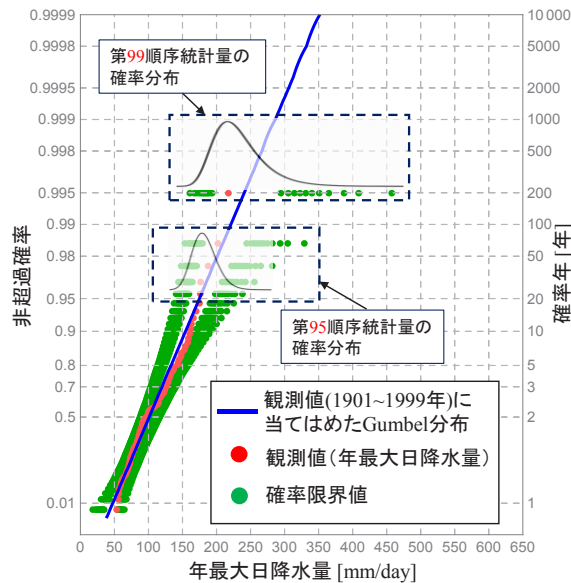


Fig-9 Relationship between probability distribution of order statistics and probability limit value

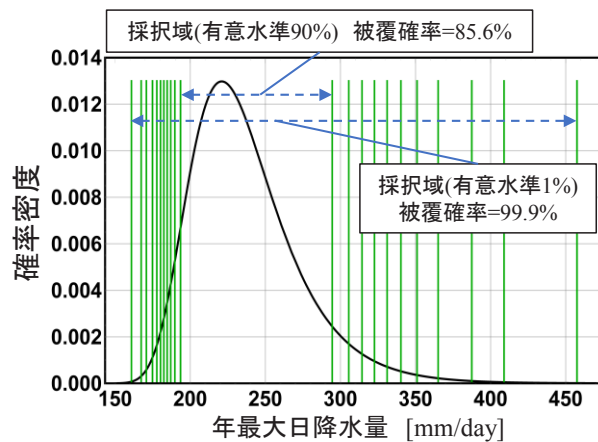


Fig-10 Relationship between probability distribution of p99th order statistics and adaptation area of probability limit method test

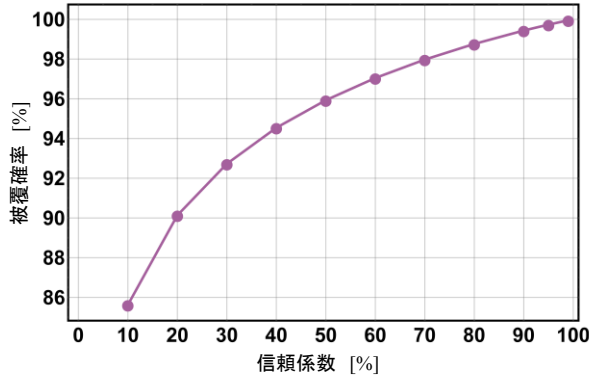


Fig-11 Relationship between confidence coefficient and coverage ratio of adaptation area of probability limit method

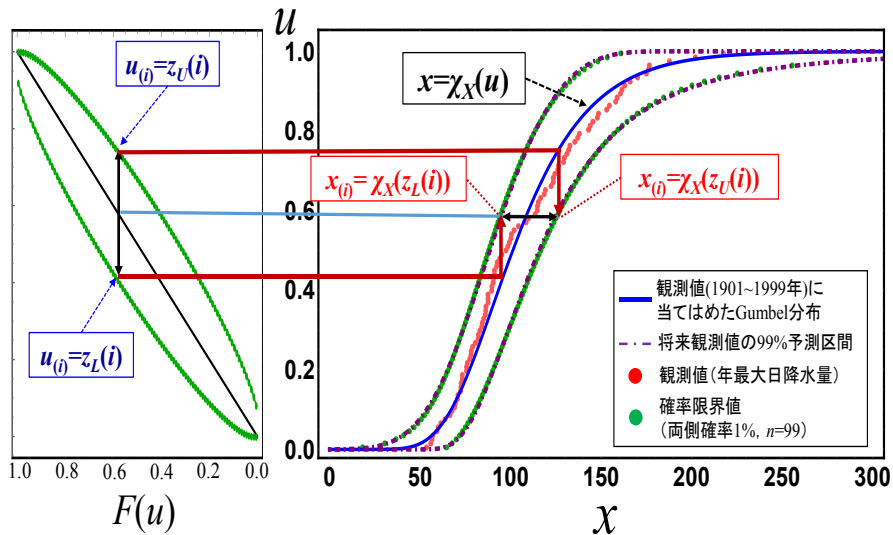


Fig-12 Construction process of 99% prediction interval based on probability limit method test

5. 2 確率限界法検定を用いた予測区間の構成

本節では、確率限界法検定を用いて極値の予測区間を構成する手法を示す。Fig-12は、名古屋地方気象台における99年間分の年最大日降水量の観測値（1901年～1999年）、これら99個の観測値に当てはめたGumbel分布、標準一様分布と当該Gumbel分布の両側確率1%の確率限界値および99%予測区間を示したものである。

採択域は、採用した仮説検定理論の下では、どの程度の値まで許容可能であるかを表す範囲である。ここで、採択域は、データが存在する範囲として扱えることを再記しておく。確率限界法検定は、仮定した確率分布の裾部に対して極めて高い検定力を有しているため、裾部に対して採択域が狭まっている。

確率限界法検定の採択域は、我々が過去経験した大雨の振れ幅を高精度で推定するものであるため、確率限界値を大雨の振れ幅の限界値として捉えることができる。したがって、確率限界値の標本に対して、高い適合度を有する確率分布モデルを選定することにより、当該確率分布モデルは、データの振れ幅の限界値を与えるものとして捉えることができる。加えて、当該確率分布モデルにより、使用したデータの外

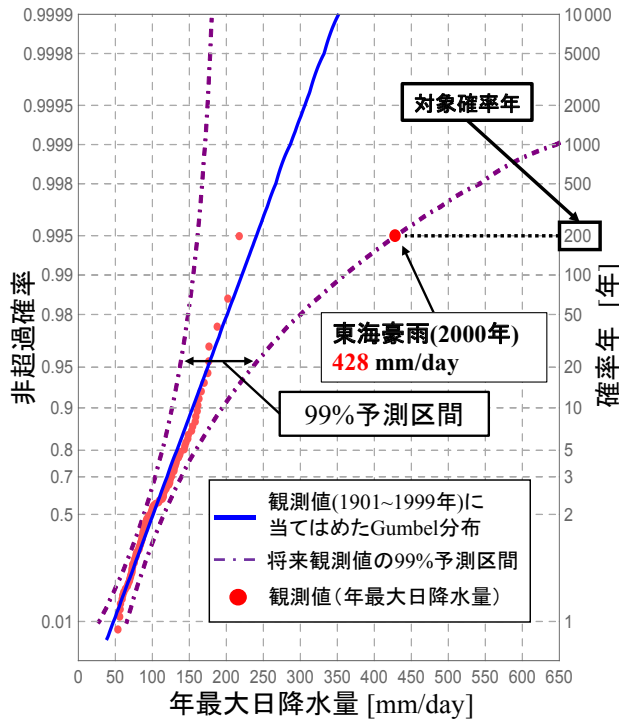


Fig-13 Observed data of annual maximum daily rainfall for 99 years from 1901 to 1999 in Nagoya regional meteorological observatory, Gumbel distribution fitted with these data, 99% prediction interval based on probability limit method test and observed data of Tokai heavy rainfall in year 2000

部に対しても、外挿値という形で値を得ることができる。このことは、将来期間に対しても、データの振れ幅の限界値を予測していることを表している。したがって、本研究では、当該確率分布モデルを予測限界線と定義した。加えて、Fig-12は、両側確率1%の確率限界値の標本に一般化極値分布を当てはめ、99%予測限界線が構成される過程を示している。当該予測限界線と確率限界値の適合度を、SLSC [26] (標準最小二乗規準)により評価すると、上側予測限界線のSLSCは0.006、下側予測限界線のSLSCは0.008であった。この結果は、一般化極値分布が確率限界値に極めて良好に適合し、一般化極値分布を予測限界線として採用することの妥当性を示すものである。

### 5. 3 予測区間を導入した水文頻度解析手法の概要

Fig-13は、名古屋地方気象台における99年間分の年最大日降水量の観測値(1901年~1999年)、これら99個の観測値に当てはめたGumbel分布、東海豪雨(2000年)の観測値、確率限界法検定に基づく将来観測値の99%予測区間を示したものである。99%予測限界線は、両側確率1%(信頼係数99%)の確率限界値の標本に当てはめた一般化極値分布である。同図から、確率年が長期になるにつれて、将来期間における観測値が取りうる範囲を表す予測区間が広がっていくことが分かる。また、上側予測限界線は下側予測限界線よりも広い範囲を取ることから、将来観測値の確率分布は右に歪むことが推定される。これは極値の性質の表したものであると考えられる。

予測区間の導入により、従来では“想定外”として扱われるような規模の豪雨を100年あるいは200年といった計画規模相当の確率年で評価できる。その具体例を次に示す。Fig-13において、東海豪雨の観測値は、99%上側予測限界線上にプロットされ、かつ、当該豪雨の確率年は200年として扱うことができる。加えて、予測区間の導入により、激甚豪雨が将来期間において発生するリスクを定量化することができる。すなわち、上述したリスク(上側予測限界値の超過確率)は、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」との積により表される。なお、Knight [27]は、確率分布が把握可能な事象をリスクとして数学的に定義して

いる。この定義を踏まえ、本論では、“リスク”を採用確率分布から大きく外れ、従来では想定外として扱われるような豪雨の“発生確率”として扱う。次に、このリスク評価手法を用いて、東海豪雨級の激甚豪雨が生起するリスクの算出例を示す。Fig-13において、東海豪雨の観測値は200年確率年最大日降水量の99%上側予測限界値となるため、当該値の超過確率は、上記したリスクの算出式より、 $(1/200) \times 0.005 = 1/40000$ となる。すなわち、東海豪雨級の激甚豪雨が将来生起するリスクは1/4万となる。なお、本論5.1節で示したように、信頼係数 $(1-p)$ として1に近い値を採用した場合、その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を $p/2$ として近似可能となる。このため、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により激甚豪雨（上側予測限界値）の生起リスクを算定するという手法は、1に近い信頼係数を選定するほど、その精度が向上する。すなわち、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により表される激甚豪雨の生起リスクが同じ値であっても、その外力値としては、高い信頼係数を有する予測区間上の値がより妥当なものとなる。当該手法により算出されるリスクは他分野におけるリスク（例えば、交通事故で死亡する割合である1/2万等）と同程度のオーダーとなる。この結果は、上記したリスク評価手法により、激甚豪雨が将来期間において生起するリスクを他分野におけるリスクと比較・評価可能となることを示すものである。

## 6 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成プログラム

### 6.1 信頼区間・予測区間の構成プログラムのフローおよびスクリプト

信頼区間・予測区間の構成プログラムにおけるフロー図をFig-14に示す。同図に示す当該プログラムは、実用上の便宜を考慮するため、「標準一様分布における確率限界値の導出」、「観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の導出」、「信頼限界線の母数推定」、「予測限界線の母数推定」の4つのものに大別し、作成した。また、このプログラムは、数式処理ソフト Mathematica(Version11.3)により作成されており、このスクリプトをTable-1に示す。

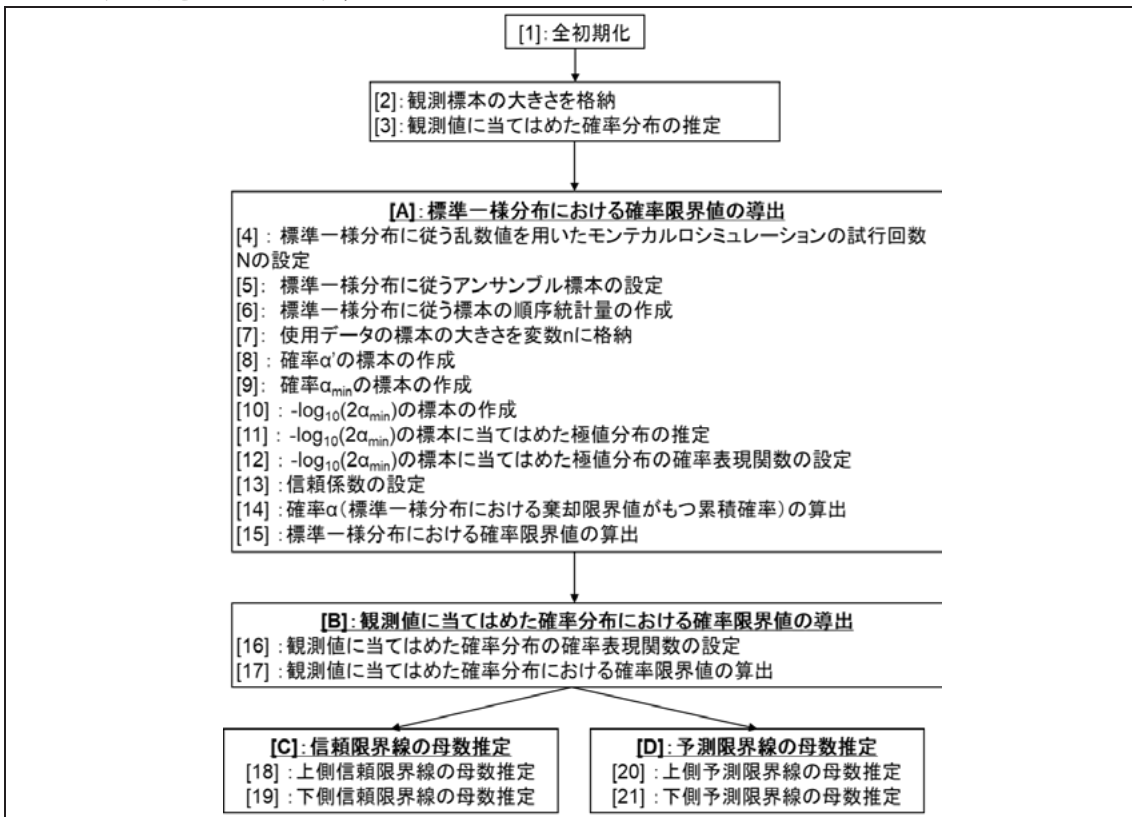


Fig-14 A flowchart of program to construct confidence interval and prediction interval based on probability limit method test

[1] 全初期化 <code>Remove["Global`*"]</code>
[2] 観測標本の大きさを格納 <code>sampleSizeObsExtremeData = Length[obsExtremeData]</code>
[3] 観測値に当てはめた確率分布の推定 <code>parObs = FindDistributionParameters[obsExtremeData, ExtremeValueDistribution[<math>\mu</math>,<math>\sigma</math>], ParameterEstimator -&gt; "MaximumLikelihood"]</code> <code><math>\mu</math>Obs = <math>\mu</math> /. parObs;</code> <code><math>\sigma</math>Obs = <math>\sigma</math> /. parObs;</code>
[4] 標準一様分布に従う乱数値を用いたモンテカルロシミュレーションの試行回数 $N$ の設定 <code>icyclenum = N</code>
[5] 標準一様分布に従うアンサンブル標本の設定 <code>Table[uniformDistDat[ic] = RandomVariate[UniformDistribution[], sampleSizeObsExtremeData], {ic, 1, icyclenum}];</code>
[6] 標準一様分布に従う標本の順序統計量の作成 <code>Table[uniformDistDatLess[ic] = Sort[uniformDistDat[ic], Less], {ic, 1, icyclenum}];</code>
[7] 使用データの標本の大きさを変数 $n$ に格納 <code>n = sampleSizeObsExtremeData;</code>
[8] 確率 $\alpha_{min}$ ([5]で作成したアンサンブル標本の一様乱数値がもつ片側確率のうち、最小となるもの)の標本の作成 <code><math>\alpha</math> := i; <math>\beta</math> := n - <math>\alpha</math> + 1;</code> <code>Table[adatmin[ic] = Table[{i, uniformDistDatLess[ic][[i]], Min[CDF[BetaDistribution[<math>\alpha</math>, <math>\beta</math>], x] /. x -&gt; uniformDistDatLess[ic][[i]], 1 - CDF[BetaDistribution[<math>\alpha</math>, <math>\beta</math>], x] /. x -&gt; uniformDistDatLess[ic][[i]]}], {i, 1, n}], {ic, 1, icyclenum}];</code>
[9] 確率 $\alpha_{min}$ から成る標本の順序統計量の作成 <code>aminMin = Table[Sort[adatmin[ic], #1[[3]] &lt; #2[[3]] &amp;][[1]], {ic, 1, icyclenum}];</code>
[10] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本の作成 <code>grdataminMinonly = Table[-Log[10, 2 aminMin[[it]][[3]]], {it, 1, icyclenum}];</code>
[11] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた極値分布の推定 <code>ClearAll[a,b,<math>\mu</math>,<math>\sigma</math>]</code> <code>parProba=FindDistributionParameters[grdataminMinonly, ExtremeValueDistribution[a,b]]</code> <code>probaAve=a/.parProba;</code> <code>probaPar=b/.parProba;</code>
[12] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた極値分布の確率表現関数の設定 <code>probaPRF[u_] := InverseCDF[ ExtremeValueDistribution[probaAve, probaPar], u]</code>

<p>[13] 信頼係数の設定</p> <pre>accuracyOfPrediction = {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99}; lengtha = Length[accuracyOfPrediction];</pre>
<p>[14] 確率 <math>\alpha</math> (標準一様分布における棄却限界値がもつ累積確率) の算出</p> <pre>proba =   Table[{10^-probaPRF[accuracyOfPrediction[[i]]]}/2, {i, 1,     Length[accuracyOfPrediction]}];</pre>
<p>[15] 標準一様分布における棄却限界値の算出</p> <pre>zul = Table[Table[{i, {lower =   InverseCDF[     BetaDistribution[i, sampleSizeObsExtremeData - i + 1],     proba[[j]]],   upper =   InverseCDF[     BetaDistribution[i, sampleSizeObsExtremeData - i + 1],     1 - proba[[j]]}], {i, 1,   sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1, lengtha}];</pre>
<p>[16] 観測値に当てはめた確率分布の確率表現関数の設定</p> <pre>prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[u_] :=   InverseCDF[frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>Obs, <math>\sigma</math>Obs], u]</pre>
<p>[17] 観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の算出</p> <pre>ClearAll[u] datimportantgreatgaisou =   Table[Table[     prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[zul[[j]][[i]][[2]][[2]]], {i, 1,     sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1,   lengtha}]; datimportantsmallgaisou =   Table[Table[     prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[zul[[j]][[i]][[2]][[1]]], {i, 1,     sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1,   lengtha}];</pre>
<p>[18] 上側信頼限界線の母数推定</p> <pre>coefgreatgaisou =   Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]],     frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>, <math>\sigma</math>]], {j, 1, lengtha} upperConfidencelimitFunc<math>\mu</math> =   Table[<math>\mu</math> /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; upperConfidencelimitFunc<math>\sigma</math> =   Table[<math>\sigma</math> /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}];</pre>
<p>[19] 下側信頼限界線の母数推定</p> <pre>coefsmallgaisou =   Table[FindDistributionParameters[datimportantsmallgaisou[[j]],     frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>, <math>\sigma</math>]], {j, 1, lengtha} lowerConfidencelimitFunc<math>\mu</math> =   Table[<math>\mu</math> /. coefsmallgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}];</pre>



<pre> lowerConfidenceLimitFuncσ =   Table[σ /. coefsmallgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; </pre>
<pre> [20] 上側予測限界線の母数推定 coefgreatgaisou =   Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]],     MaxStableDistribution[μ, σ, ξ]], {j, 1,     lengtha}] upperPredictionLimitFuncμ =   Table[μ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; upperPredictionLimitFuncσ =   Table[σ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; upperPredictionLimitFuncξ =   Table[ξ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; </pre>
<pre> [21] 下側予測限界線の母数推定 coefgreatgaisou =   Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]],     MaxStableDistribution[μ, σ, ξ]], {j, 1,     lengtha}] upperPredictionLimitFuncμ =   Table[μ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; upperPredictionLimitFuncσ =   Table[σ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; upperPredictionLimitFuncξ =   Table[ξ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengtha}]; </pre>
<p>Table-1 Mathematica script which enable construction of confidence interval and prediction interval based on probability limit method test</p>

## 6. 2 信頼区間・予測区間の構成プログラムの解説

以降では、Table-1 に示した Mathematica スクリプトに付記してある括弧内の数字とそれに該当するプログラムの内容やその中の変数定義を詳説する。

[1]では、初期設定を行う。すなわち、このコマンドを実行することで、変数に格納されている値をクリアにすることができる。

[2]では、観測標本の大きさは、変数 `sampleSizeObsExtremeData` に格納している。なお、本研究では、観測標本として年最大値資料を用いている。

[3]では、最尤法を用いて、観測標本に当てはめた確率分布の母数推定を行っている。このスクリプトでは、当該確率分布として、Gumbel 分布 (`ExtremeValueDistribution[μ,σ]`) を採用している。なお、推定された Gumbel 分布の位置母数は変数 `μObs`、尺度母数は変数 `σObs` に格納される。

[4]から[15]までは、確率限界法検定における標準一様分布の確率限界値を導出する過程 (Fig-14 における[A]) を記述したスクリプトである。

[4]では、標準一様分布に従う乱数値を用いたモンテカルロシミュレーションの試行回数 `icyclenum` を決定する。`icyclenum` には、任意の値  $N$  を与える。すなわち、式(7)の試行回数  $N$  を決定する。

[5]では、標準一様分布に従う  $N$  個の標本  $\{U_{ens. 1}, U_{ens. 2}, \dots, U_{ens. N}\}$  を設定する。すなわち、先ず、 $N$  回中

の  $ic$  回目の当該モンテカルロシミュレーションにおいて、標準一様分布に従う乱数  $u^{ic}$  を観測値の総数 (変数 `sampleSizeObsExtremeData` の値, 以降  $n$  と表記する) と同じだけ発生させ、これらの乱数から構成される標本  $U_{ens}^{ic} = \{u^{ic_1}, u^{ic_2}, \dots, u^{ic_n}\}$  を作成する ( $ic=1, 2, \dots, M$ ).  $U_{ens}^{ic}$  は、プログラム中では、`uniformDistDat[ic]` により表されている。この操作を  $N$  回行うことで得られる、 $N$  個の標本が  $\{U_{ens}^1, U_{ens}^2, \dots, U_{ens}^N\}$  である。

[6]では、[5]で作成した  $\{U_{ens}^1, U_{ens}^2, \dots, U_{ens}^N\}$  の順序統計量を求めている。すなわち、標本  $U_{ens}^{ic}$  (`uniformDistDat[ic]`) の順序統計量は、`uniformDistDatLess[ic]` に格納される。ここで、`uniformDistDatLess[ic]` は  $\{u^{ic_{(1)}}, u^{ic_{(2)}}, \dots, u^{ic_{(n)}}\}$  により構成される。

[7]では、観測標本の大きさ (変数 `sampleSizeObsExtremeData` の値) は、変数  $n$  に改めて格納されている。この処理の目的は、以降のプログラムのスクリプトの量を削減することである。

[8]では、確率  $\alpha'$  を算出している。ここで、 $u^{ic_{(i)}}$  がもつ非超過確率と超過確率のうち、どちらか小さい方を確率  $\alpha'$  と定義する ( $i=1, 2, \dots, n$ )。[8]では、この操作を順序統計量 `uniformDistDatLess[ic]` に対して実行する。この操作で得られる `adatmin[ic]` は、 $\{\text{順序統計量の順位 } i, \text{ 順序統計量 } u^{ic_{(i)}} \text{ の実現値, 順序統計量 } u^{ic_{(i)}} \text{ がもつ確率 } \alpha'\}$  という 3 つの要素をもつリストである。

[9]では、確率  $\alpha_{min}$  の標本を作成している。[8]で作成したリスト変数の `adatmin[ic]` のうち、確率  $\alpha'$  に相当する要素のみを抽出する。これにより、標準一様分布からのアンサンブル標本  $U_{ens}^{ic}$  (`uniformDistDat[ic]`) ごとに  $n$  個の確率  $\alpha'$  を抽出できる。これら  $n$  個の確率のうち最小値を  $\alpha_{min}$  と定義する ( $\alpha_{min} = \text{Min}\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ )。ここで、スクリプト中の `aminMin` は、 $N$  個の  $\alpha_{min}$  を格納するリストである。

[10]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本を作成している。  $\{\alpha_{min}(1), \alpha_{min}(2), \dots, \alpha_{min}(N)\}$  を得る。ここで、前章でも言及した通り、 $\alpha_{min}$  はオーダーが小さく (例えば、 $N=1000$  の場合、 $\alpha_{min}$  の平均値は  $10^{-2}$  オーダーである。)、これらの値を扱いやすくするため、 $N$  個の  $\alpha_{min}$  をそれぞれ  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  という関数形に変形する。プログラム中では、`grdataminMinonly` が  $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  すなわち、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本である。

[11]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた極値分布を求めている。 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめた理由を次に再記する。前述した  $n$  個の確率  $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  を変形し、標本  $\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  を得る。このとき、 $-\log_{10}(2\alpha_{min}) = \text{Max}\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  が成立するため、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  はこの標本中の最大値となる。標本中の最大値は、サンプリング数が多いほど、極値分布に漸近的に従うため、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめることは妥当である。プログラム中では、最尤推定を実行可能なコマンド「`FindDistributionParameters`」を用いて、対象確率分布 (本研究では、Gumbel 分布) の母数の最尤推定を求め、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた Gumbel 分布の位置母数を `probaAve`、尺度母数を `probaPar` に格納している。

[12]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた極値分布の確率表現関数の設定している。コマンド `InverseCDF` により、`probaPRF[u_]` で表される  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた Gumbel 分布 (`ExtremeValueDistribution[probaAve, probaPar]`) の確率表現関数を設定することができる。

[13]では、信頼係数の設定をしている。信頼係数の値は、リスト `accuracyOfPrediction` に格納されている。なお、`lengtha` は設定した信頼係数の総数である。

[14]では、確率  $\alpha$  (標準一様分布における棄却限界値がもつ累積確率) の算出している。両側確率  $(1-p)$  の場合、 $100(1-p)\%$  信頼区間の構成に必要な確率  $\alpha$  は、 $\chi_{\alpha}(p) = -\log_{10}(2\alpha)$  より、 $10^{\chi_{\alpha}(p)/2}$  となる。プログラム中において、確率  $\alpha$  はリスト `proba` に格納される。

[15]では、標準一様分布における確率限界値の算出している。ここで、 $F_{U(i)}(u) = \alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における下方確率限界値  $z_L(i)$ 」および  $F_{U(i)}(u) = 1 - \alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における上方確率限界値  $z_U(i)$ 」として定義する。すなわち、 $z_L(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100\alpha\%$  ile 値、 $z_U(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100(1-\alpha)\%$  ile 値である。プログラム中では、標準一様分布における下方確率限界値  $z_L(u)$  を `lower` というリストに格納し、上方確率限界値  $z_U(u)$  を `upper` というリストに格納している。両リストは、`zul` というリストに格納される。

[16]から[17]までは、観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の導出する過程 (Fig-14 における

[B] を記述したスクリプトである。

[16]では、観測値に当てはめた確率分布の確率表現関数の設定している。 **frequencyAnalysisModel** とは、観測値に当てはめを行う確率分布であり、本研究では、 **Gumbel** 分布を採用している。コマンド **InverseCDF** により、任意の確率分布の確率表現関数を設定することができる。

[17]では、観測値に当てはめた確率分布における確率限界値を算出している。区間 $[z_L(i), z_U(i)]$ は、確率変数数列 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ から求まる第 $i$ 順序統計量 $X_{(i)}$ の累積確率 $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$ が数学上取りうる幅である。確率表現関数 $\chi_X(u)$ に標準一様分布における確率限界値を代入することで $X_{(i)}$ の推定区間 $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$ を構成することができる。プログラム中では、観測値に当てはめた確率分布における上方確率限界値の標本は、 **datimportantgreatgaisou** というリストに格納され、下方確率限界値の標本は、 **datimportantsmallgaisou** というリストに格納される。

[18]から[19]までは、信頼限界線の母数を推定する過程 (Fig-14 おける[C]) を記述したスクリプトである。これらの手順により、信頼区間を導出することができる。

[18]では、上側信頼限界線の母数推定を行う。プログラム中では、上方確率限界値の標本 (**datimportantgreatgaisou**) に、観測実績に当てはめた確率分布と同じ関数形で最尤推定 (**FindDistributionParametes**) を行い、上側信頼限界線の母数を推定している。

[19]では、下側信頼限界線の母数推定を行う。プログラム中では、下方確率限界値の標本 (**datimportantsmallgaisou**) に、観測実績に当てはめた確率分布と同じ関数形で最尤推定 (**FindDistributionParametes**) を行い、下側信頼限界線の母数を推定している。

[18]と[19]を実行することで、任意の信頼係数 (有意水準) に応じた信頼区間を構成することができる。

[20]から[21]までは、予測限界線の母数を推定する過程 (Fig-14 における[D]) を記述したスクリプトである。これらの手順により、予測区間を導出することができる。

[20]では、上側予測限界線の母数推定を行う。プログラム中では、上方確率限界値の標本 (**datimportantgreatgaisou**) に、良好な適合度を示す確率分布 (本研究では、一般化極値分布) を当てはめ、上側予測限界線の母数を求めている。上側予測限界線の母数は、リスト **coefgreatgaisou** に格納される。

[21]では、下側予測限界線の母数推定を行う。プログラム中では、下方確率限界値の標本 (**datimportantsmallgaisou**) に、良好な適合度を示す確率分布 (本研究では、一般化極値分布) を当てはめ、下側予測限界線の母数を求めている。下側予測限界線の母数は、リスト **coefsmallgaisou** に格納される。

## 7 まとめ

信頼区間は、従来洪水対策に採用してきた確率分布の振れ幅を表すため、信頼区間をどこまで議論するかによって洪水対策におけるリスクが検討可能となる。一方、予測区間は、将来の観測値がとりうる幅を表すため、予測区間の導入により、激甚豪雨の規模やその生起リスクが把握可能となる。本論では、確率限界法検定の理論を応用することで、極値に対して極めて高い精度をもつ信頼区間・予測区間を構成する手法を示すとともに、それらの具体的適用手法を示した。

本研究の主な成果を以下に列挙する。

(1) 仮定した確率分布の裾部に対して高い検定力をもつ確率限界法検定を応用することで信頼区間・予測区間を極めて解析的に構成する理論を提示した。確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間は、洪水対策で重要となる確率分布の裾部で高い精度を有し、極端な水文現象の合理的な評価を可能とするものであ

る。

(2) 従来の水文頻度解析では、確率水文量を決定論的に算定してきたが、信頼区間・予測区間を導入することで、確率水文量が取りうる幅を求め、従来では想定外として扱われるような水文現象の生起確率を推定できるようになった。

(3) 信頼区間・予測区間の導入により、激甚な水文現象が発生するリスクを他の分野におけるリスクと比較・評価可能となることを示した。

#### 参考文献

- [1] Fisher, R.A. and L.H.C. Tippett: Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, *proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol.24, pp.180-190, 1928.
- [2] E.J. Gumbel: The return period of flood flows, *Ann. Math. Stat.* Vol. 12, pp.163-190., 1941.
- [3] B.V. Gnedenko: Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 44, No. 3, pp. 423-453., 1943.
- [4] A.F. Jenkinson: The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, 1955.
- [5] E.J.Gumbel (著), 河田竜夫 (訳), 岩井重久 (訳), 加瀬 滋男 (訳): 極値統計学—極値の理論とその工学的応用, 生産技術センター社, 1962.
- [6] Coles, S. : An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, 2001.
- [7] de Haan, Laurens, Ana Ferreira : Extreme Value Theory: An Introduction, Springer, 2006.
- [8] 寶馨: 水文頻度解析の進歩と将来展望, pp.740-756 水文・水資源学会誌, 1998.
- [9] 藤部文昭: 回答「極端な豪雨の再現期間推定精度に関する検討」, 天気 58(2), pp.147-151, 2011.
- [10] 糸川和弘, 荒川貴志, 岡部真人, 山田正: 大雨発生の周期性と発生頻度に関する研究, 中央大学理工学研究所論文集, 2011.
- [11] 渋谷 政昭: スターリング確率分布族, 応用統計学, 15 卷 3 号, pp.131-146, 1986.
- [12] 北海道地方における気候変動予測 (水分野) 技術検討委員会 ([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa%20kei/splaat000000vdyw.html))
- [13] 山田朋人, 星野剛ら: 北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化, 河川技術論文集, 第 24 巻, pp.391-396, 2018.
- [14] 森口繁一: 確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—, pp.233-244, 日本統計学会, 第 25 巻, 1995.
- [15] 竹内啓: 統計的予測論, 培風館, 1975.
- [16] 北野利一, 高橋倫也, 田中茂信: 降水量の極値の予測区間 ～ 確率降水量の信頼区間を誤解していませんか?, 土木学会論文集 B1 (水工学), 69(4), pp.I\_271-I\_276., 2013.
- [17] 北野利一, 高橋倫也, 田中茂信: ベイズ手法による降水量の極値の予測分布～最尤法による相違と相互補完, 土木学会論文集 B1 (水工学), 72(4), pp.I\_463-I\_468, 2016.
- [18] 竹村彰通: 現代数理統計学, pp.195-198, 創文社, 1991.
- [19] Kolmogorov, A. : Sulla Determinazione Empiri-ca di una Legge di Distribuzione. *Inst. Ital. At-tuari, Giorn*, 4, 83-91, 1933.
- [20] 森口繁一: 確率表現関数, 東京大学出版, 1995.
- [21] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正: 確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.
- [22] 中西準子: 環境リスク学—不安の海の羅針盤, 日本評論社, 2004.
- [23] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 確率限界法検定に基づく信頼区間を用いた確率洪水ピーク流量の不確実性評価, 土木学会論文集 G (環境) Vol.74, No.5, I\_293-I\_302, 2018.
- [24] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 信頼区間の導入による確率洪水ピーク流量の不確実性評価 - 総合確率法の拡張 -, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.5, I\_175-I\_180, 2018.
- [25] 清水 啓太, 山田 正, 山田 朋人: 信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価, 河川技術論文集, Vol.25, pp.13-18, 2019.
- [26] 寶馨, 高棹琢馬: 水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, 第 393 号/II-9, pp.151-160, 1988.
- [27] Knight, Frank H.: Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin Co., 1921.