ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216

Поступила в редакцию 21.02.2020
Received 21.02.2020

А. Н. Лаврёнов[1], И. А. Лаврёнов[2]

[1]Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
[2]ООО «Октонион технолоджи», Минск, Беларусь

СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ 16D ОСЦИЛЛЯТОРА И ЕГО 9D КУЛОНОВСКОГО АНАЛОГА

Аннотация. Представлена квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ как алгебра скрытой симметрии для определенного класса точно решаемых потенциалов, обобщающих соответственно 16D осциллятор и его по отношению к преобразованию Гурвица 9D кулоновский аналог на основе $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. Обсуждается разрешимость уравнения Шредингера для этих задач методом разделения переменных в сферических и параболических (цилиндрических) координатах. Показано, что коэффициенты перекрытия между волновыми функциями в этих координатах совпадают с коэффициентами Клебша – Гордана для $SU(1,1)$ алгебры.

Ключевые слова: квадратичная алгебра Хана $QH(3)$, 9D кулоновская система, 16D гармонический осциллятор, преобразование Гурвица, скрытая симметрия, $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$

Для цитирования. Лаврёнов, А. Н. Скрытая симметрия 16D осциллятора и его 9D кулоновского аналога / А. Н. Лаврёнов, И. А. Лаврёнов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 206–216. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216

Alexandre N. Lavrenov[1], Ivan A. Lavrenov[2]

[1]Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus
[2]Octonion Technology Ltd., Minsk, Belarus

HIDDEN SYMMETRY OF THE 16D OSCILLATOR AND ITS 9D COULOMB ANALOGUE

Abstract. We present the quadratic Hahn algebra $QH(3)$ as an algebra of the hidden symmetry for a certain class of exactly solvable potentials, generalizing the 16D oscillator and its 9D coulomb analogue to the generalized version of the Hurwitz transformation based on $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. The solvability of the Schrodinger equation of these problems by the variables separation method are discussed in spherical and parabolic (cylindrical) coordinates. The overlap coefficients between wave functions in these coordinates are shown to coincide with the Clebsch – Gordan coefficients for the $SU(1,1)$ algebra.

Keywords: quadratic Hahn algebra $QH(3)$, 9D coulomb system, 16D harmonic oscillator, Hurwitz transformation, hidden symmetry, $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$

For citation. Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. Hidden symmetry of the 16D oscillator and its 9D coulomb analogue. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 206–216 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216

Введение. Осциллятор и кулоновская система являются первыми яркими представителями точно решаемых моделей, которые позволяют строить на их основе различные приближенные методы или уточнять границы применимости новых. Оказалось, что в определенных размерностях своих пространств данные модели являются дуальными через преобразование Гурвица [1–2]. В нормированных алгебрах с делением обсуждаемые в настоящей работе 16-мерный гармонический осциллятор и 9-мерная кулоновская система отражают последний возможный вариант реализации преобразовании Гурвица $R^{16} \to R^{9}$ (расслоение Хопфа $S^{15} \to S^{8}$). В цикле работ [3–8] тщательно проработаны многие вопросы последнего случая расслоения Хопфа, но только для изотропного осциллятора.

С другой стороны, осциллятор и кулоновская система имеют решение в различных системах координат, что отражает наличие определенных операторов симметрии. Часто данные операторы формируют свою алгебру так называемой скрытой симметрии. Для систематического поиска таких операторов были использованы различные подходы [9–21]. В частности, новый общий подход к системам, обладающим $SU(1,1)\oplus SU(1,1)$ динамической симметрией, был предложен в [22]. Автор указанной работы А. С. Жеданов также рассмотрел конкретную реализацию предложенной абстрактной схемы для следующих трехмерных кольцеобразных потенциалов: обобщенного кулона

$$H_1 = H_0 - \frac{\alpha}{r} + \frac{d_1}{r^2(1+\cos\theta)} + \frac{d_2}{r^2(1-\cos\theta)} \tag{1}$$

и осциллятора

$$H_2 = H_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{g_1}{x^2+y^2} + \frac{g_2}{z^2}, \tag{2}$$

где $H_0 = \frac{p^2}{2}$ есть гамильтониан свободного движения.

Целью настоящей работы является обобщение результатов А. С. Жеданова [22] на случай пространств размерности 16 и 9 для гармонического осциллятора и кулоновской системы соответственно.

Также отметим, что есть трансформация вышеуказанного подхода на многомерный случай в рамках тензорного произведения $SU(1,1)$ или ставшего модным в последнее время коммутантного подхода в смысле двойственности Хоу [23–27].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 напоминается правило сложения алгебр $SU(1,1)$ и проблема скрытой симметрии для систем, обладающих такой динамической симметрией в соответствии с [22]. В разделах 2 и 3 дается конкретная реализация вышеупомянутой абстрактной схемы однотипной скрытой симметрии в рамках алгебры Хана, приводящая к определенному классу точно решаемых потенциалов соответственно для 16-мерного осциллятора и 9-мерной кулоновской системы. В заключении приведено краткое изложение результатов и возможных перспектив.

1. Абстрактная динамическая система, связанная с $SU(1,1)\oplus SU(1,1)$. В начале этого раздела кратко напомним основные особенности алгебры Ли $SU(1,1)$. Она имеет операторы J_0, J_+, J_-, которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm; \quad [J_-, J_+] = 2J_0, \tag{3}$$

а ее оператор Казимира определяется так:

$$Q = J_0^2 - J_+J_- - J_0 = \lambda(\lambda-1). \tag{4}$$

Для представления положительной дискретной серии D^+ этой алгебры имеем

$$\begin{aligned} J_0|n,\lambda\rangle &= (n+\lambda)|n,\lambda\rangle; \\ J_-|n,\lambda\rangle &= \sqrt{n(n+2\lambda-1)}\,|n-1,\lambda\rangle; \\ J_+|n,\lambda\rangle &= \sqrt{(n+1)(n+2\lambda)}\,|n+1,\lambda\rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda > 0$ – параметр представления; $n = 0,1,2\ldots$.

Теперь рассмотрим сложение двух неприводимых представлений $SU(1,1)$, для которых начальные операторы Казимира принимают значения $Q^{(\beta)} = \lambda_\beta(\lambda_\beta - 1)$, $\beta = 1,2$, и запишем

$$J_0^{(12)} = J_0^{(1)} + J_0^{(2)}, \quad J_\pm^{(12)} = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)} \tag{6}$$

с супериндексом, обозначающим, на какой из двух факторов в $SU(1,1)^{\otimes 2}$ оператор действует.

Нетрудно убедиться, что новые операторы (6) также удовлетворяют коммутационным соотношениям (3). Связный базис $|n_{12},\lambda_{12}\rangle$ определяется так:

$$J_0^{(12)}|n_{12},\lambda_{12}\rangle=(n_{12}+\lambda_{12})|n_{12},\lambda_{12}\rangle;$$

$$Q^{(12)}|n_{12},\lambda_{12}\rangle=\lambda_{12}(\lambda_{12}-1)|n_{12},\lambda_{12}\rangle. \tag{7}$$

При разложении коэффициенты Клебша – Гордана (ККГ) $C^{l}_{mm'}$ записываются в виде

$$|j,\lambda_{12}\rangle=\sum_{n=0}^{n=N}C^{j,\lambda_{12}}_{n,\lambda_1;N-n,\lambda_2}|n,\lambda_1\rangle\otimes|N-n,\lambda_2\rangle, \tag{8}$$

где $\lambda_{12}=\lambda_1+\lambda_2+p;\quad N=j+p;p=0,1,2\ldots$. Явное выражение для ККГ в терминах полиномов Хана можно найти в работе [22]:

$$C^{j,\lambda_{12}}_{n,\lambda_1;N-n,\lambda_2}=h_n w_p\,{}_3F_2\begin{pmatrix}-n & -p & 2\lambda_1+2\lambda_2+p-1\\ & & ;1\\ & -N & 2\lambda_1\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что гамильтониан $H=J_0^{(12)}$ обладает динамической симметрией $SU(1,1)\oplus SU(1,1)$, и его спектр $\varepsilon=n_1+n_2+\lambda_1+\lambda_2$ вырожден. Это означает, что существуют интегралы движения, коммутирующие с H. Тривиальный пример таких интегралов для возможных комбинаций из начальных операторов $(J_0^{(1)},J_0^{(2)},J_\pm^{(1)},J_\pm^{(2)})$ можно предложить следующий:

$$K_1=J_0^{(1)}-J_0^{(2)}; \tag{10}$$

$$K_2=Q^{(12)}=Q^{(1)}+Q^{(2)}+2J_0^{(1)}J_0^{(2)}-J_+^{(1)}J_-^{(2)}-J_-^{(1)}J_+^{(2)}. \tag{11}$$

Скрытая симметрия нашего гамильтониана $H=J_0^{(12)}$ означает существование некоторой алгебры, составленной из интегралов K_1, K_2. Согласно работе [22] такая алгебра является квадратичной алгеброй Хана $QH(3)$ при коммутационных соотношениях

$$\left[K_2[K_1,K_2]\right]=2K_2K_1K_2-K_2^2K_1-K_1K_2^2=-2(K_1K_2+K_2K_1)+4\varepsilon(Q^{(1)}-Q^{(2)}); \tag{12}$$

$$\left[[K_1,K_2]K_1\right]=2K_1K_2K_1-K_1^2K_2-K_2K_1^2=-2K_1^2-4K_2+2\varepsilon^2+4(Q^{(1)}+Q^{(2)}). \tag{13}$$

Таким образом, диагонализация оператора K_1 соответствует, с одной стороны, выбору несвязанного базиса $|n_1,\lambda_1\rangle\otimes|n_2,\lambda_2\rangle$ в пространстве прямой суммы $SU(1,1)\oplus SU(1,1)$, а с другой – к разделению переменных в цилиндрических координатах. Аналогично диагонализация оператора K_2 соответствует, с одной стороны, выбору связного базиса $|n_{12},\lambda_{12}\rangle$ в пространстве прямой суммы $SU(1,1)\oplus SU(1,1)$, а с другой – для разделения переменных в сферических координатах. Перекрытия между собственными состояниями операторов K_1 и K_2 (или волновыми функциями в этих системах координат) могут быть записаны в терминах ККГ для $SU(1,1)$ или полиномов Хана (7).

2. 16-Мерный осциллятор. В начале этого раздела будем рассматривать модель сингулярного осциллятора для любого значения размерности N пространства R^N:

$$\hat{H}_0\Phi(\vec{x})\equiv\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\omega^2}{2}x_kx_k+\frac{c}{x_kx_k}\right]\Phi=E^{co}\Phi\equiv4Z\Phi$$

или

$$\hat{H}_0\Phi(\vec{x})=\left[\hat{H}_0^{go}+\frac{c}{x_kx_k}\right]\Phi\equiv\left[\hat{H}_0^{go}+V^c(x_kx_k)\right]\Phi=4Z\Phi, \tag{14}$$

где по паре повторяющихся индексов k ведется суммирование от 1 до N.

Введем вместо декартовых координат $(x_{k=1,N}) = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в пространстве R^N гиперсферические координаты – $(\phi_{l=1,N-1)}) = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1})$ – гиперсферические углы, r-гиперрадиус:

$$\begin{aligned} &x_{N-1} = r\cos(\phi_{N-1});\\ &x_{N-2} = r\sin(\phi_{N-1})\cos(\phi_{N-2});\\ &\ldots\\ &\ldots\\ &x_2 = r\sin(\phi_{N-1})\sin(\phi_{N-2})\ldots\sin(\phi_2)\cos(\phi_1);\\ &x_1 = r\sin(\phi_{N-1})\sin(\phi_{N-2})\ldots\sin(\phi_2)\sin(\phi_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Используя анзац $\Phi(\vec{x}) = \Phi(r, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1}) = R(r)\Omega(\phi)$, уравнение Шредингера для нашей модели N-мерного сингулярного осциллятора (14) можно переписать в терминах его отдельных уравнений для гиперрадиуса r и угловых переменных ϕ следующим образом:

$$\left[\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + (2E^{co} - \omega^2 r^2) - \frac{P+2c}{r^2}\right]R(r) = 0; \tag{16}$$

$$\left[\hat{L}^2 - P\right]\Omega(\phi) = 0, \tag{17}$$

где $P \equiv L(L+N-2)$ – константа разделения и также собственное значение оператора квадрата оператора орбитального углового момента количества движения или вращения $\hat{L}^2$ (17).

Фиксация квантового числа L позволяет свести задачу к одномерной. Это, в свою очередь, означает, что фактически симметрия задачи полностью определяется радиальной частью или уравнением (16). Таким образом, его решение или волновая функция для нашей модели N-мерного сингулярного осциллятора будет иметь следующий вид:

$$\Phi(\vec{x}) = R_{nL}(r)\Omega(\phi) = C_{nL} r^{L'} e^{-\frac{\omega r^2}{2}} {}_1F_1\left(-n; L' + \frac{N}{2}; \omega r^2\right)\Omega(\phi), \tag{18}$$

где $L'(L'+N-2) = L(L+N-2) + 2c,$ а энергетический спектр определится выражением

$$E_m^{co} = 2\omega\left(n + \frac{L'}{2} + \frac{N}{4}\right). \tag{19}$$

Теперь переведем все на язык операторов $SU(1,1)$ и дадим следующую их реализацию для любого значения размерности N пространства R^N:

$$J_0 = \left[-\frac{1}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\omega^2}{4}x_k x_k + \frac{c}{2\omega x_k x_k}\right]; \quad J_1 = \frac{\omega}{2}x_k x_k - J_0;$$

$$J_2 = \frac{i}{2}\left[x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{N}{2}\right]; \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2; \quad Q = \frac{N(N-4)}{16} + \frac{c - \hat{L}^2}{2}. \tag{20}$$

Нетрудно заметить, что, выбирая в качестве гамильтониана $\hat{H}_0$ оператор $2\omega J_0$, мы получаем вышерассмотренную модель сингулярного осциллятора, которая обобщает модель изотропного осциллятора [3]. Отметим, что при $N = 1$ и $N = 2$ воспроизводим результат, представленный в [22].

Однако при использовании определенного значения оператора Казимира Q фактически происходит фиксация квантового числа L для угловой части, что позволяет свести задачу к одномерной. Поэтому для радиальной части после выполнения калибровочного преобразования

$$J \to \tilde{J} = r^{\frac{(N-1)}{2}} J r^{-\frac{(N-1)}{2}}$$

(для устранения члена с производной по радиальной переменной r) операторы $SU(1,1)$ преобразуются к следующему виду:

$$\tilde{J}_0 = \left[-\frac{1}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\omega}{4} r^2 + \frac{g}{2\omega r^2} \right]; \quad \tilde{J}_\pm = \tilde{J}_1 \pm i\tilde{J}_2;$$

$$\tilde{J}_1 = \frac{\omega r^2}{2} - \tilde{J}_0; \quad \tilde{J}_2 = \frac{i}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \right], \tag{21}$$

где

$$g = \frac{4L(L+N-2) + 8c + (N-1)(N-3)}{8}.$$

Согласно предыдущему разделу, для того чтобы квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ была скрытой алгеброй симметрии, должны быть выполнены два условия. Во-первых, результирующий гамильтониан должен быть суммой двух исходных. Во-вторых, каждый из исходных гамильтонианов должен иметь симметрию $SU(1,1)$.

Таким образом, вышеописанная реализация операторов $SU(1,1)$ для любого значения размерности N пространства R^N позволяет представить результирующий гамильтониан $\hat{H}_0$ в пространстве $R^{N=16}$ размерности $N = 16$ в виде суммы двух исходных $\hat{H}_\beta$, $\beta = 1, 2$, каждый из которых имеет искомую алгебру симметрии $SU(1,1)$ в радиальной переменной r для своего значения размерности N_β пространства R^{N_β}. Так как возможные неэквивалентные значения разбиения числа $N = 16$ на положительные числа N_1, N_2 (т. е. $N = 16 \equiv N_1 + N_2$) известны – всего 8 пар:

$$(N_1 = 1, N_2 = 15), (N_1 = 2, N_2 = 14), (N_1 = 3, N_2 = 13), (N_1 = 4, N_2 = 12),$$

$$(N_1 = 5, N_2 = 11), (N_1 = 6, N_2 = 10), (N_1 = 7, N_2 = 9), (N_1 = 8, N_2 = 8)$$

или ($N_1 = s, N_2 = 16 - s$), где $s = 1,8$, то получаем однотипную скрытую симметрию в рамках квадратичной алгебры Хана для 16-мерного пространства в рамках определенного класса (8 вариантов) точно решаемых потенциалов сингулярного осциллятора своего пространства соответственно размерности N_1 и N_2:

$$\hat{H}_0\Phi \equiv (\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\Phi \equiv 2\omega\left[J_0^{(1)} + J_0^{(2)} \right]\Phi \equiv$$

$$\equiv 2\omega\left[-\frac{1}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\omega^2}{4} x_i x_i + \frac{c_1}{2\omega x_i x_i} \right]\Phi +$$

$$+2\omega\left[-\frac{1}{4\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\omega^2}{4} x_j x_j + \frac{c_2}{2\omega x_j x_j} \right]\Phi, \tag{22}$$

где еще раз обратим внимание, что по паре повторяющихся индексов i по декартовым координатам $(x_{i=1,N_1}) = (x_1, \ldots, x_{N_1})$ в первом гамильтониане ведется суммирование от 1 до N_1 в пространстве R^{N_1} и по паре повторяющихся индексов j по декартовым координатам $(x_{j=N_1+1,16}) = (x_{N_1+1}, \ldots, x_{16})$ во втором гамильтониане ведется суммирование от $N_1 + 1$ до $N = 16$ в пространстве R^{N_2}. Напомним, что $(x_{\sigma=1,16}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ – декартовы координаты в пространстве R^{16}.

Если все переписать только для радиальной части, то мы фактически получаем гамильтониан сингулярного осциллятора в двух измерениях:

$$\tilde{H}_0 \equiv 2\omega\left[\tilde{J}_0^{(1)} + \tilde{J}_0^{(2)}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2}\right) + \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) + \frac{2g_1}{r_1^2} + \frac{2g_2}{r_2^2}\right], \tag{23}$$

где

$$2g_\beta = L_\beta^{'}(L_\beta^{'} + N_\beta - 2) + \frac{(N_\beta - 1)(N_\beta - 3)}{4}, \quad \beta = 1, 2,$$

и не забываем, что каждому измерению β соответствует его N_β-мерный гиперрадиус r_β.

В заключение уточним, что параметры соответствующей квадратичной алгебры Хана как алгебры скрытой симметрии ((12)–(13)) нетрудно в каждом конкретном варианте найти по формулам (19)–(20). Также подчеркнем, что ограничение в размерности пространства числом 16 накладывает только цель данной работы, хотя обобщение для любого значения N имеет место.

3. 9D кулоновский аналог по отношению к преобразованию Гурвица для 16D осциллятора. Согласно [3] преобразование Гурвица $\mathrm{R}^{16} \to \mathrm{R}^9$, которое связывает определенным образом 9D пространство R^9 декартовых координат ($(y_{\mu=1,9}) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_9)$) с 16D пространством R^{16} декартовых координат $(x_{\sigma=1,16}) \equiv (\eta_{s=1,8}, \xi_{t=1,8}) = (\eta_1, \ldots, \eta_8, \xi_1, \ldots, \xi_8)$ можно записать следующим образом:

$$y_\mu \to 2(\Gamma_\mu)_{st}\,\eta_s \xi_t, \qquad y_9 \to (\eta_t \eta_t - \xi_t \xi_t), \tag{24}$$

где явный вид матриц Γ_μ дан в [3].

После применения преобразования Гурвица (24) к уравнению 16-мерного изотропного гармонического осциллятора (формула (14) при N = 16 и c = 0 или в [3]) получаем уравнение Шредингера для 9-мерной кулоновской задачи в SO(8) монопольном поле (так называемая MICZ-Кеплера проблема) в атомных единицах ($m = e = h = 1$) [6–8]:

$$\hat{H}_0 \Phi = \left[-\frac{\Delta}{2} + \frac{J^2 - L^2}{4r(r + y_9)} - \frac{Z}{r}\right]\Phi = E\Phi, \tag{25}$$

где $J = L + Q$ – операторы полного, орбитального и изоспинового углового момента количества движения; Δ – оператор Лапласа – Бельтрами в девятимерном пространстве R^9.

Отметим, что в уравнениях (14) и (25) роли $E = -\dfrac{\omega^2}{8}$ и Z поменялись. Переменные E и Z становятся отрицательным числом, которое обозначает соответственно энергию связанных состояний, и параметром, определяющим значение «заряда» в кулоновском потенциале. Именно поэтому 9D кулоновская система рассматривается как аналог 16D осциллятора по отношению к преобразованию Гурвица.

Введем параболические координаты на сфере S_7 в соответствии с работами [7–8]:

$$\begin{aligned}
&y_9 = \frac{u - v}{2};\\
&y_8 = \sqrt{uv}\cos(\phi_6);\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&y_2 = \sqrt{uv}\sin(\phi_6)\ldots\sin(\phi_1)\cos(\phi_0);\\
&y_1 = \sqrt{uv}\sin(\phi_6)\ldots\sin(\phi_1)\sin(\phi_0);\\
&r = \frac{u + v}{2},
\end{aligned} \tag{26}$$

где девять y_μ – декартовы координаты в гиперпараболических координатах: $(\phi_{\nu=0,6}) = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_6)$ – гиперпараболические углы и параболические координаты u, v с областью значений от 0 до ∞.

Учитывая эти определения, мы получаем полезные отношения:

$$r = \sqrt{y_\lambda y_\lambda} = \eta_s \eta_s + \xi_s \xi_s; \quad y_9 \to (\eta_t \eta_t - \xi_t \xi_t);$$

$$2\eta_s \eta_s = r + y_9 \equiv u; \quad 2\xi_s \xi_s = r - y_9 \equiv v. \tag{27}$$

Сейчас становится уместным напомнить, что ранее модель с потенциалом гармонического осциллятора $V^{го}(x_k x_k)$ нами была обобщена до модели с потенциалом сингулярного осциллятора $V^{со}(x_k x_k) \equiv V^{го}(x_k x_k) + V^c(x_k x_k)$ или, другими словами, при аддитивной добавке $\Lambda = V^c_{N_1}(x_i x_i) + V^c_{N_2}(x_j x_j)$ к гамильтониану осциллятора (14) получим аддитивный член Λ/r в гамильтониане кулоновской системы после преобразования Гурвица (25). Наиболее просто это увидеть, выполнив замену $Z \to Z - \Lambda$ в формулах (14), (25). Из всех вариантов расщепления 16D пространства $R^{N=16}$ на подпространства R^{N_1} и R^{N_2} ($N = 16 \equiv N_1 + N_2$), которое определяет явный вид сингулярных членов $V^c_{N_1}(x_i x_i)$, $V^c_{N_2}(x_j x_j)$ в гиперпараболических координатах, наиболее идеальным здесь выглядит симметричный вариант $N_1 = N_2 = 8$. В нем согласно последним двум соотношениям в (27), а также ранее полученным результатам в малоразмерных расслоениях Хопфа [28–32] аддитивный член Λ/r функционально подобен второму члену в (25) и имеет следующий вид:

$$\frac{\Lambda}{r} = \frac{1}{r}\left[V^c_{N_1=8}(x_i x_i) + V^c_{N_2=8}(x_j x_j)\right] \equiv \frac{1}{r}\left[\frac{c_1}{\eta_s \eta_s} + \frac{c_2}{\xi_t \xi_t}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{2c_1}{r + y_9} + \frac{2c_2}{r - y_9}\right] \equiv \frac{4}{u+v}\left[\frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{v}\right].$$

Оператор Лапласа – Бельтрами Δ в гиперпараболических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{4}{u+v}\left\{\frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^4 \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^4 \frac{\partial}{\partial v}\right)\right\} - \frac{L^2}{uv}.$$

Чтобы разделить переменные, волновая функция теперь выбирается следующим образом:

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \Phi(u, v, \phi_0, \ldots, \phi_6, \phi_0{}', \ldots, \phi_6{}') = U(u)V(v)\Omega(\phi, \phi').$$

Таким образом, уравнение Шредингера нашей уже обобщенной MICZ-кеплеровской системы в гиперпараболических координатах можно переписать в терминах разделенных уравнений переменных u, v и угловых переменных (ϕ, ϕ'):

$$\left[\frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^4 \frac{\partial}{\partial u}\right) - \frac{J(J+6) + 4c_1}{u} + \frac{Z + Eu}{2} - T\right]U(u) = 0; \tag{28}$$

$$\left[\frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^4 \frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{L(L+6) + 4c_2}{v} + \frac{Z + Ev}{2} + T\right]V(v) = 0; \tag{29}$$

$$\left[\hat{J}^2 - J(J+6)\right]\Omega(\phi, \phi') = 0; \tag{30}$$

$$\left[\hat{L}^2 - L(L+6)\right]\Omega(\phi, \phi') = 0, \tag{31}$$

где T – постоянная разделения; c_β, $\beta = 1, 2$ – константы в наших аддитивных добавках $V^c_{N_1}(x_i x_i)$ и $V^c_{N_2}(x_j x_j)$, т. е. параметры потенциала сингулярного осциллятора (22).

Решения (28) и (29) задаются гипергеометрическими полиномами:

$$U_{n_1J}(u) = C_{n_1J} u^{J'/2} e^{-\frac{\sqrt{-2E}u}{2}} {}_1F_1\left(-n_1; 4+J'; \sqrt{-2E}u\right);$$

$$V_{n_2L}(v) = C_{n_2L} v^{L'/2} e^{-\frac{\sqrt{-2E}v}{2}} {}_1F_1\left(-n_1; 4+L'; \sqrt{-2E}v\right),$$

где $J'(J'+6) = J(J+6)+4c_1$; $L'(L'+6) = L(L+6)+4c_2$.

Другими словами, мы имеем аналогичную ситуацию по скрытой симметрии как при рассмотрении модели сингулярного осциллятора в предыдущем разделе: при фиксации квантовых чисел J, L угловой части (уравнения (30)–(31)), задача становится одномерной. Исходный гамильтониан можно представить в виде суммы двух почти идентичных с точностью до переобозначений гамильтонианов в параболических координатах u, v соответственно (уравнения (28)–(29)) и им будет определяться скрытая симметрия задачи.

Для данного обоснования представим следующую реализацию операторов $SU(1,1)$:

$$J_0 = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1}{z_\beta^3}\frac{\partial}{\partial z_\beta}\left(z_\beta^4 \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) - \frac{g_\alpha}{z_\beta} + \frac{E}{2} z_\beta\right]; \quad J_1 = \gamma z_\beta - J_0;$$

$$J_2 = i\left[z_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} + 2\right]; \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2, \tag{32}$$

где $g_1 = J(J+6)+4c_1$; $g_2 = L(L+6)+4c_2$; $E = -2\gamma^2$; $z_1 = u$; $z_2 = v$; $\beta = 1,2$.

Таким образом, вышеприведенные формулы (32) позволяют представить исходный гамильтониан 9-мерной обобщенной MICZ-кеплеровой системы в виде суммы двух гамильтонианов в параболических координатах u, v, каждый из которых выражается через оператор J_0 и соответственно имеет искомую алгебру симметрии $SU(1,1)$. Угловая часть фиксируется своими хорошо известными квантовыми числами.

Заключение. Представлена квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ как алгебра скрытой симметрии для определенного класса точно решаемых потенциалов, обобщающих соответственно 16D осциллятор и его 9D кулоновский аналог по отношению к преобразованию Гурвица на основе $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. Обсуждается разрешимость уравнения Шредингера для этих задач методом разделения переменных в сферических и параболических (цилиндрических) координатах. Показано, что коэффициенты перекрытия между волновыми функциями в этих координатах совпадают с коэффициентами Клебша – Гордана для $SU(1,1)$ алгебры.

Список использованных источников

1. Kustaanheimo, P. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization / P. Kustaanheimo, E. Stiefel // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1965. – Vol. 218. – P. 204 –219. https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.204

2. Polubarinov, I. V. On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory / I. V. Polubarinov. – Dubna: JINR, 1984. – 24 p. – (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; E2-84-607).

3. Le, V.-H. A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator / V.-H. Le, T.-S. Nguyen, N.-H. Phan // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42, № 17. – P. 175204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/17/175204

4. Le, V.-H. A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac-Yang monopoles for a 9-dimensional space / V.-H. Le, T.-S. Nguyen // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 3. – P 032105. https://doi.org/10.1063/1.3567422

5. Le, V.-H. On the SO (10, 2) dynamical symmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine-dimensional space / V.-H. Le, C.-T. Truong, T.-T. Phan // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 7. – P. 072101. https://doi.org/10.1063/1.3606515

6. Phan, N.-H. Generalized Runge-Lenz vector and a hidden symmetry of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / N.-H. Phan, V.-H. Le // J. Math. Phys. – 2012. – Vol. 53, № 8, P. 082103. https://doi.org/10.1063/1.4740514

7. Exact analytical solutions of the Schrödinger equation for the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / T.-S. Nguyen [et al.] // J. Math. Phys. – 2015. – Vol. 56, № 5. – P. 052103. https://doi.org/10.1063/1.4921171

8. Variables separation and superintegrability of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / N.-H. Phan [et al.] // J. Math. Phys. – 2018. – Vol. 59, № 3. – P. 032102. https://doi.org/10.1063/1.4997693

9. Eisenhart, L. P. Separable systems of Stackel / L. P. Eisenhart // Ann. Math. – 1934. – Vol. 35, № 2. – P. 284–305. https://doi.org/10.2307/1968433

10. Eisenhart, L. P. Enumeration of potentials for which one-particle Schrodinger equations are separable / L. P. Eisenhart // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74, № 1. – P. 87–89. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.87

11. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries / A. A. Makarov [et al.] // Nuovo Cimento A. – 1967. – Vol. 52, № 4. – P. 1061–1084. https://doi.org/10.1007/BF02755212

12. Evans, N. W. Superintegrability in classical mechanics / N. W. Evans // Phys. Rev. A. – 1990. – Vol. 41, № 10. – P. 5666–5676. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.5666

13. Superintegrability in three-dimensional Euclidean space / E. G. Kalnins [et al.] // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40, № 2. – P. 708–725. https://doi.org/10.1063/1.532699

14. Kalnins, E. G. Fine structure for 3D second-order superintegrable systems: three-parameter potentials / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40, № 22. – P. 5875–5892. https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/22/008

15. Kalnins, E. G. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. Three-dimensional classical structure theory / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Math. Phys. – 2005 – Vol. 46, № 10. – P. 103507. https://doi.org/10.1063/1.2037567

16. Kalnins, E. G. Nondegenerate three-dimensional complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Math. Phys. – 2007. – Vol. 48, № 11. – P. 113518. https://doi.org/10.1063/1.2817821

17. Verrier, P. E. A new superintegrable Hamiltonian / P. E. Verrier, N. W. Evans // J. Math. Phys. – 2008. – Vol. 49, № 2. – P. 022902. https://doi.org/10.1063/1.2840465

18. McSween, E. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields / E. McSween, P. Winternitz // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41, № 5. – P. 2957–2967. https://doi.org/10.1063/1.533283

19. Boschi-Filhot, H. General potentials described by SO(2,1) dynamical algebra in parabolic coordinate systems / H. Boschi-Filhot, M. de Souza, A. N. Vaidya // J. Phys. A. – 1991. – Vol. 24, № 21. – P. 4981–4988. https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/21/012

20. Gritsev, V. V. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33, № 22. – P. 4073–4080. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310

21. Gritsev, V. V. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin, V. S. Otchik // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33, № 27. – P. 4903–4910. https://doi.org/ .10.1088/0305-4470/33/27/307

22. Zhedanov, A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials / A. S. Zhedanov // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26, № 18. – P. 4633–4642. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027

23. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective / L. Frappat [et al.] // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383, № 14. – P. 15-31–15-35. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

24. The generalized Racah algebra as a commutant / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys.: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1194. – P. 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034

25. The Racah algebra as a commutant and Howe duality / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys. A: Math. Theor. – 2018. – Vol. 51, № 50. – P. 50LT01. https://doi.org/ 10.1088/1751-8121/aaee1a

26. Howe, R. Remarks on Classical Invariant Theory / R. Howe // Transactions of the American Mathematical Society. – 1989. – Vol. 313, № 2. – P. 539–570. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0986027-X

27. Rowe, D. J. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics / D. J. Rowe, M. J. Carvalho, J. Repka // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84, № 2. – P. 711–757. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.711

28. Mardoyan, L. G. 4D singular oscillator and generalized MIC-Kepler system / L. G. Mardoyan, M. G. Petrosyan // Phys. Atomic Nuclei. – 2007. – Vol. 70, № 3. – P. 572–575. https://doi.org/ 10.1134/S1063778807030180

29. Прись, И. Е. Атом диогена как четырехмерный изотропный сингулярный осциллятор со связью / И. Е. Прись, Е. А. Толкачев // Ядер. физика. – 1991. – Т. 54, № 1. – С. 962–966.

30. Pletyukhov, M. V. SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkachev // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32, № 23. – P. L249–L253. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101.

31. Pletyukhov, M. V. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkachev // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40, № 1. – P. 93–100. https://doi.org/10.1063/1.532761

32. Pletyukhov, M. V. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D "isospin" particle / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkachev // Rep. Math. Phys. – 1999. – Vol. 43, № 1/2. – P. 303–311. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(99)80039-1

References

1. Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1965, vol. 218, pp. 204–219. https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.204

2. Polubarinov I. V. *On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory.* Dubna, JINR, 1984. 24 p. (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; E2-84-607).

3. Le V.-H., Nguyen T.-S., Phan N.-H. A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator. *Journal of Physics A*, 2009, vol. 42, no. 17, pp. 175204. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/17/175204

4. Le V.-H., Nguyen T.-S. A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac-Yang monopoles for a 9-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics,* 2011, vol. 52, no. 3, pp. 032105. https://doi.org/10.1063/1.3567422

5. Le V.-H., Truong C.-T., Phan T.-T. On the SO (10, 2) dynamical symmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics,* 2011, vol. 52, no. 7, pp. 072101. https://doi.org/10.1063/1.3606515

6. Phan N.-H., Le V.-H. Generalized Runge-Lenz vector and a hidden symmetry of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics,* 2012, vol. 53, no. 8, pp. 082103. https://doi.org/10.1063/1.4740514

7. Nguyen T.-S., Le D.-N., Thoi T.-Q. N., Le V.-H. Exact analytical solutions of the Schrödinger equation for the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics,* 2015, vol. 56, no. 5, pp. 052103. https://doi.org/10.1063/1.4921171

8. Phan N.-H., Le D.-N., Thoi T.-Q. N., Le V.-H. Variables separation and superintegrability of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics,* 2018, vol. 59, no. 3, pp. 032102. https://doi.org/10.1063/1.4997693

9. Eisenhart L. P. Separable systems of Stackel. *Annals of Mathematics*, 1934, vol. 35, no. 2, pp. 284–305. https://doi.org/10.2307/1968433

10. Eisenhart L. P. Enumeration of potentials for which one-particle Schrodinger equations are separable. *Physical Review*, 1948, vol. 74, no. 1, pp. 87–89. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.87

11. Makarov A. A., Smorodinsky J. A., Valiev K., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. *Nuovo Cimento A*, 1967, vol. 52, no. 4, pp. 1061–1084. https://doi.org/10.1007/BF02755212

12. Evans N. W. Superintegrability in classical mechanics. *Physical Review A*, 1990, vol. 41, no. 10, pp. 5666–5676. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.5666

13. Kalnins E. G., Williams G. C., Miller W. Jr., Pogosyan G. S. Superintegrability in three-dimensional Euclidean space. *Journal of Mathematical Physics,* 1999, vol. 40, no. 2, pp. 708–725. https://doi.org/10.1063/1.532699

14. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Fine structure for 3D second-order superintegrable systems: three-parameter potentials. *Journal of Physics A*, 2007, vol. 40, no. 22, pp. 5875–5892. https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/22/008

15. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. Three-dimensional classical structure theory. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, vol. 46, no. 10, pp. 103507. https://doi.org/10.1063/1.2037567

16. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Nondegenerate three-dimensional complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties. *Journal of Mathematical Physics*, 2007, vol. 48, no. 11, pp. 113518. https://doi.org/10.1063/1.281782

17. Verrier P. E., Evans N. W. A new superintegrable Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 022902. https://doi.org/10.1063/1.2840465

18. McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 2957–2967. https://doi.org/10.1063/1.533283

19. Boschi-Filhot H., M de Souza, Vaidya A. N. General potentials described by SO(2,1) dynamical algebra in parabolic coordinate systems. *Journal of Physics A,* 1991, vol. 24, no. 21, pp. 4981–4988. https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/21/012

20. Gritsev V. V., Kurochkin Y. A. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3. *Journal of Physics A,* 2000, vol. 33, no. 22, pp. 4073–4080. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310

21. Gritsev V. V., Kurochkin Y. A., Otchik V. S. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3. *Journal of Physics A,* 2000, vol. 33, no. 27, pp. 4903–4910. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/27/307

22. Zhedanov A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials. *Journal of Physics A*, 1993, vol. 26, no. 18, pp. 4633–4642. https://doi.org/ 10.1088/0305-4470/26/18/027

23. Frappat L., Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, no. 14, pp. 15-31–15-35. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

24. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The generalized Racah algebra as a commutant. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1194, pp. 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034

25. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Racah algebra as a commutant and Howe duality. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* 2018, vol. 51, no. 50, pp. 50LT01. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaee1a

26. Howe R. Remarks on Classical Invariant Theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, vol. 313, no. 2, pp. 539–570. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0986027-X

27. Rowe D. J., Carvalho M. J., Repka J. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics. *Reviews of Modern Physics*, 2012, vol. 84, no. 2, pp. 711–757. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.711

28. Mardoyan L. G., Petrosyan M. G. 4D singular oscillator and generalized MIC-Kepler system. *Physics of Atomic Nuclei*, 2007, vol. 70, no. 3, pp. 572–575. https://doi.org/10.1134/S1063778807030180

29. Pris I. E., Tolkachev E. A. Diogen atom as a four-dimensional isotropic singular oscillator with a bond. *Yadernaya fizika = Physics of Atomic Nuclei*, 1991, vol. 54, no. 1, pp. 962–966 (in Russian).

30. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem. *Journal of Physics A,* 1999, vol. 32, no. 23, pp. L249–L253. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101

31. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints. *Journal of Mathematical Physics,* 1999, vol. 40, no. 1, pp. 93–100. https://doi.org/10.1063/1.532761

32. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D “isospin” particle. *Reports on Mathematical Physics*, 1999, vol. 43, no. 1–2, pp. 303–311. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(99)80039-1

Информация об авторах

Лаврёнов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий в образовании, Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка (ул. Советская, 18, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000- 0001-7384-3621

Лаврёнов Иван Александрович – ведущий специалист, ООО «Октонион технолоджи» (ул. Я. Купалы, 25, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin99@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987

Information about the authors

Alexandre N. Lavrenov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of the Chair of Information Technologies in Education, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya Str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/ 0000-0001-7384-3621

Ivan A. Lavrenov – Leading Specialist, Octonion Technology, Ltd. (25, Ya. Kupala Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin099@mail.ru. https://orcid. org/0000-0002-3650-8987