ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.537.38
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193

Поступила в редакцию 12.12.2019
Received 12.12.2019

Э. И. Зверович, В. А. Павловский

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОТ *h*-КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Аннотация. Взяв степенные ряды от вещественного переменного, сходящиеся на некотором интервале к известным суммам, авторы рассматривают степенные ряды с теми же коэффициентами от *h*-комплексного переменного. Для таких рядов найдены внутренности областей сходимости, а их суммы явно выражены через суммы исходных рядов. Попутно решен вопрос об условиях изолированности нулей сумм таких рядов.

Ключевые слова: степенной ряд, сумма ряда, область сходимости, кольцо *h*-комплексных чисел, изолированность нулей функции

Для цитирования. Зверович, Э. И. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от *h*-комплексного переменного / Э. И. Зверович, В. А. Павловский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 189–193. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193

Edmund I. Zverovich, Vladislav A. Pavlovsky

Belarusian State University, Minsk, Belarus

FINDING THE AREAS OF CONVERGENCE AND CALCULATING THE SUMS OF POWER SERIES FROM AN *h*-COMPLEX VARIABLE

Abstract. Herein, taking power series from a real variable that converge on a certain interval to known sums, the authors consider the power series with the same coefficients from an *h*-complex variable. For such series, the interiors of the regions of convergence are found, and their sums are explicitly expressed in terms of the sums of the original series. Along the way, the problem of isolation conditions for the zeros of the sums of such series is solved.

Keywords: power series, sum of series, area of convergence, ring of *h*-complex numbers, isolation of zeros of a function

For citation. Zverovich E. I., Pavlovsky V. A. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series of an *h*-complex variable. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 189–193 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193

Пусть $\mathbb{D}$ − кольцо всех *h*-комплексных (двойных) чисел [1–3], т. е. чисел вида $a + bj$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$. В кольце $\mathbb{D}$ имеются делители нуля, каковыми являются числа вида $a + aj$. Делители нуля [3, 4] при $a = \frac{1}{2}$ представляют особый интерес для дальнейшего, и мы перечислим их свойства в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) $\frac{1+j}{2} \cdot \frac{1-j}{2} = 0$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^n = \frac{1 \pm j}{2}$;

(c) *числа* $\frac{1 \pm j}{2}$ *образуют базис в* $\mathbb{D}$, *т. е. любое h-комплексное число* $a + bj$ *можно однозначно представить в виде*

$$a + bj = (a+b)\frac{1+j}{2} + (a-b)\frac{1-j}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, свойство (a) очевидно и выражает основное свойство делителей нуля. Свойство (b) легко установить методом полной индукции. При $n = 1$ оно очевидно. Предположив, что оно имеет место при некотором $n > 1$, и умножив его на $\frac{1 \pm j}{2}$, получим

$$\left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm 2j + 1}{4} = \frac{1 \pm j}{2},$$

что и требовалось. Равенство (c) очевидно.

Теорема 1 может быть эффективно использована для нахождения областей сходимости степенных рядов от h-комплексного переменного. Пусть задан степенной ряд

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами от вещественного переменного u, имеющий радиус сходимости $r > 0$. Производя в ряде (1) подстановку $u = x + jy \in \mathbb{D}$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + jy)^n, \tag{2}$$

и надо найти область его сходимости и сумму. С этой целью преобразуем сначала h-комплексную переменную

$$x + jy = (x + y)\frac{1+j}{2} + (x - y)\frac{1-j}{2}.$$

Для преобразования ее степеней используем теорему 1:

$$(x + jy)^n = \left[(x + y)\frac{1+j}{2} + (x - y)\frac{1-j}{2}\right]^n = (x + y)^n \frac{1+j}{2} + (x - y)^n \frac{1-j}{2}. \tag{3}$$

Подставив это в ряд (2), преобразуем его к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + jy)^n = \frac{1+j}{2} f(x + y) + \frac{1-j}{2} f(x - y) = \frac{1+j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + y)^n + \frac{1-j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - y)^n. \tag{4}$$

Естественно считать, что ряд (2) сходится, если и только если сходятся оба ряда в правой части равенства (4). Значит, внутренностью области сходимости ряда (2) является пересечение полос сходимости рядов, стоящих в правой части равенства (4), т. е. квадрат

$$\begin{cases} -r < x + y < r, \\ -r < x - y < r. \end{cases}$$

Например, при $f(u) = e^u$ имеем равенство

$$e^{x+jy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + jy)^n}{n!} = \frac{1+j}{2} e^{x+y} + \frac{1-j}{2} e^{x-y},$$

справедливое во всей плоскости $\mathbb{D}$. Если же $f(u) = \ln(1 + u)$, то получим

$$\ln(1 + x + jy) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x + jy)^n}{n} = \frac{1+j}{2} \ln(1 + x + y) + \frac{1-j}{2} \ln(1 + x - y).$$

Положив $f(u) = \ln(1 + u)^{\mu}$, найдем

$$(1+x+jy)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\mu}{n}(x+jy)^{n}=\frac{1+j}{2}(1+x+y)^{\mu}+\frac{1-j}{2}(1+x-y)^{\mu}.$$

Последние два равенства выполняются в квадрате

$$\begin{cases}-1<x+y<1,\\ -1<x-y<1.\end{cases}$$

Пусть теперь даны два степенных ряда

$$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}u^{n}\ ,\quad g(u)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}u^{n} \tag{5}$$

от вещественного переменного u с вещественными коэффициентами a_n, b_n и радиусами сходимости $r > 0$ и $p > 0$ соответственно. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^{n}. \tag{6}$$

Требуется найти его область абсолютной сходимости и выразить его сумму через суммы рядов (5). С этой целью преобразуем общий член ряда (6):

$$\left(a_{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^{n}=\left(a_{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}\frac{1-j}{2}\right)\left[(x+y)\frac{1+j}{2}+(x-y)\frac{1-j}{2}\right]^{n}=$$
$$=\left(a_{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}\frac{1-j}{2}\right)\left[(x+y)^{n}\frac{1+j}{2}+(x-y)^{n}\frac{1-j}{2}\right]=a_{n}(x+y)^{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}(x-y)^{n}\frac{1-j}{2}.$$

Подставляя это в (6), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n}\frac{1+j}{2}+b_{n}\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^{n}=\frac{1+j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x+y)^{n}+\frac{1-j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}(x-y)^{n}=$$
$$=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}g(x-y). \tag{7}$$

Тем самым мы выразили сумму ряда (6) через суммы рядов (5). Отсюда заключаем, что ряд (6) сходится абсолютно в прямоугольнике

$$\begin{cases}-r<x+y<r,\\ -p<x-y<p\end{cases} \tag{8}$$

к сумме, указанной в правой части последнего равенства.

Теперь легко может быть решен вопрос об условиях изолированности нулей суммы ряда (6).

Т е о р е м а 2. *Если суммы обоих рядов* (5) *отличны от тождественного нуля, то все нули суммы ряда* (6) *– изолированные. В противном случае все они – не изолированные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что нули сумм степенных рядов от вещественного переменного – изолированные. Значит, нули функций $f(x+y)$ и $g(x-y)$ представляют собой изолированные прямые $x + y = \text{const}$ и $x - y = \text{const}$. Так как эти прямые ортогональны одна другой, то их пересечение есть изолированная точка.

Предположим теперь, что обе функции $f(u)$ и $g(u)$ из (5) тождественно равны нулю. Тогда, как видно из (7), и сумма ряда (6) тождественно равна нулю, т. е. нули функции (6) заполняют всю плоскость $\mathbb{D}$. Пусть теперь только одна из функций $f(u)$ и $g(u)$ тождественно равна нулю. Для определенности предположим, что $g(u) \equiv 0$. Тогда (8) сводится к неравенству $-r < x + y < r$, т. е.

областью сходимости ряда (6) является полоса. Если $f(u_0)=0,$ то все точки прямой $x+y=u_0$ будут нулями суммы ряда (6). Значит, они – не изолированные. Теорема доказана.

Вместо рядов (5) возьмем теперь ряды от вещественного переменного u, бесконечные в обе стороны

$$f(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n u^n,\ \ g(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n u^n, \tag{9}$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}.$ Предположим, что первый ряд сходится при $r<|u|<R,$ а второй – при $p<|u|<P.$ Вместо ряда (6) рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{1+j}{2}+b_n\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^n, \tag{10}$$

и найдем область его сходимости и сумму.

С этой целью сначала сделаем такое преобразование:

$$(x+jy)^{-1}=\frac{1}{x+jy}=\frac{x-jy}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)\frac{1+j}{2}+(x+y)\frac{1-j}{2}}{(x+y)(x-y)}=(x+y)^{-1}\frac{1+j}{2}+(x-y)^{-1}\frac{1-j}{2}.$$

Возведя это в степень $n\in\mathbb{N},$ получим

$$(x+jy)^{-n}=(x+y)^{-n}\frac{1+j}{2}+(x-y)^{-n}\frac{1-j}{2},$$

т. е. равенство (3) оказывается верным не только для всех $n\in\mathbb{N},$ но и для всех $n\in\mathbb{Z}.$ Поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{1+j}{2}+b_n\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^n=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{1+j}{2}+b_n\frac{1-j}{2}\right)\left((x+y)\frac{1+j}{2}+(x-y)\frac{1-j}{2}\right)^n=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{1+j}{2}+b_n\frac{1-j}{2}\right)\left((x+y)^n\frac{1+j}{2}+(x-y)^n\frac{1-j}{2}\right)=$$
$$=\frac{1+j}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x+y)^n+\frac{1-j}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(x-y)^n=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}g(x-y).$$

Таким образом, ряд (8) сходится абсолютно на множестве

$$\begin{cases} r<|x+y|<R,\\ p<|x-y|<P,\end{cases}$$

а его сумма равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{1+j}{2}+b_n\frac{1-j}{2}\right)(x+jy)^n=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}g(x-y).$$

Список использованных источников

1. Antonuccio, F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics [Electronic Resource] / F. Antonussio. – 2008. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf

2. Field, M. Several Complex Variables and Complex Manifolds II / M. Field. – Cambridge University Press, 1982. https://doi.org/10.1017/CBO9780511629327

3. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 548 с.

4. Ивлев, Д. Д. О двойных числах и их функциях / Д. Д. Ивлев // Мат. просвещение. – 1961. – Вып. 6. – С. 197–203.

References

1. Antonuccio F. *Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics*. 2008. Available at: https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf

2. Field M. *Several Complex Variables and Complex Manifolds II*. Cambridge University Press, 1982. https://doi.org/10.1017/CBO9780511629327

3. Rosenfeld B. A. *Non-Euclidean geometries*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 548 p. (in Russian).

4. Ivlev D. D. On double numbers and their functions. *Matematicheskoe prosveshchenie* [Math Education], 1961, iss. 6, pp. 197–203 (in Russian).

Информация об авторах

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zverovich@bsu.by

Павловский Владислав Андреевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: pavl_vl@mail.ru

Information about the authors

Edmund I. Zverovich – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zverovich@bsu.by

Vladislav A. Pavlovsky – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pavl_vl@mail.ru