ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174

Поступила в редакцию 22.11.2019
Received 22.11.2019

В. Б. Малютин[1], Б. О. Нуржанов[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. Рассматривается квазиклассическая аппроксимация для вычисления функциональных интегралов специального вида по условной мере Винера. В этой аппроксимации используется разложение действия относительно классической траектории. При этом учитываются три первых члена разложения. Квазиклассическая аппроксимация может интерпретироваться как разложение по степеням постоянной Планка. Новизна данной работы заключается в численном анализе точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа используется сравнение результатов. Одни результаты получаются с помощью квазиклассической аппроксимации, другие – с помощью метода вычисления функциональных интегралов, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл.

Ключевые слова: функциональные интегралы, квазиклассическая аппроксимация, действие, классическая траектория, собственные функции гамильтониана

Для цитирования. Малютин, В. Б. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов / В. Б. Малютин, Б. О. Нуржанов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 166–174. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174

Victor B. Malyutin[1], Berdakh O. Nurjanov[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan

SEMICLASSICAL APPROXIMATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS

Abstract. In this paper, we consider a semiclassical approximation of special functional integrals with respect to the conditional Wiener measure. In this apptoximation we use the expansion of the action with respect to the classical trajectory. In so doing, the first three terms of expansion are taken into account. Semiclassical approximation may be interpreted as an expansion in powers of the Planck constant. The novelty of this work is the numerical analysis of the accuracy of the semiclassical approximation of functional integrals. A comparison of the results is used for numerical analysis. Some results are obtained by means of semiclassical approximation, while the other by means of the functional integrals calculation method based on the expansion in eigenfunctions of the Hamiltonian generating a functional integral.

Keywords: functional integrals, semiclassical approximation, action, classical trajectory, eigenfunctions of Hamiltonian

For citation. Malyutin V. B., Nurjanov B. O. Semiclassical approximation of functional integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 166–174 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174

Введение. В настоящее время математическая теория функциональных интегралов является одним из важных разделов бесконечномерного анализа и применяется при построении математических моделей, которые используются в квантовой теории поля, статистической механике и стохастическом анализе. Существуют различные типы функциональных интегралов в зависимости от способа определения и области, на которой определяется функциональный интеграл. В данной работе рассматривается функциональный интеграл по условной мере Винера на пространстве функций, заданных на отрезке $[s,t]$ и удовлетворяющих условиям $x(s)=x_s$, $x(t)=x_t$. Интеграл по условной мере Винера μ_{x_s,x_t} определяется равенством

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_s^t V\big(x(\tau)\big)d\tau\right\}d\mu_{x_s,x_t}(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_R (n-1)\int_R \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})V(x_j)\right\}\prod_{j=1}^n K^0_{t_j-t_{j-1}}(x_{j-1},x_j)dx_1...dx_{n-1},$$

где

$$s = t_0 < t_1 < ... < t_n = t,\;\; x_j = x(t_j),\;\; K^0_{t_j-t_{j-1}}(x_{j-1},x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_j - t_{j-1})}}\exp\left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2\hbar(t_j - t_{j-1})}\right)$$

– ядро оператора $\exp\left(\frac{t}{\hbar}H_0\right)$, $H_0 = \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\hbar$ – параметр, принимающий положительные вещественные значения.

Через данный функциональный интеграл с помощью формулы Фейнмана – Каца [1] представляется ядро $K_{t-s}(x_s,x_t)$ оператора эволюции $\exp\left\{\frac{tH}{\hbar}\right\}$, $H = \frac{1}{2}\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)$, а именно:

$$K_{t-s}(x_s,x_t) = \int \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_s^t V\big(x(\tau)\big)d\tau\right\}d\mu_{x_s,x_t}(x). \tag{1}$$

Зная ядро $K_{t-s}(x_s,x_t)$, мы можем вычислять средние значения физических наблюдаемых квантово-механической системы, описываемой гамильтонианом H.

Существуют различные методы для вычисления функциональных интегралов вида (1). Среди них отметим метод Монте-Карло для приближенного вычисления функциональных интегралов [2–4] и метод приближенного вычисления функциональных интегралов, основанный на использовании формул заданной степени точности [2, 5–7]. В данной работе рассматривается квазиклассическая аппроксимация для вычисления функциональных интегралов [8]. В квазиклассической аппроксимации используется разложение действия [9] относительно классической траектории, которое может интерпретироваться как разложение по степеням постоянной Планка. Новизна данной работы заключается в численном анализе точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа используется сравнение результатов, полученных с помощью квазиклассической аппроксимации, а также метода вычисления функциональных интегралов, базирующегося на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. При аппроксимации функциональных интегралов, основанной на разложении по собственным функциям гамильтониана, можно оценить точность получаемых приближенных значений. Квазиклассическая аппроксимация может быть использована для достаточно широкого круга задач. Например, квазиклассическая аппроксимация применяется при вычислении функциональных интегралов, используемых в теории поля, в частности в теории гравитации. Но для оценки точности квазиклассической аппроксимации необходимо сравнение с результатами, полученными другими методами.

В разделе 1 приводится описание метода квазиклассической аппроксимации; в разделе 2 – описание метода, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана; в разделе 3 – результаты численного эксперимента для случая ангармонического осциллятора.

1. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов. Для вычисления функционального интеграла (1) его можно переписать в виде

$$K_{t-s}(x_s,x_t) = \int D[x]\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_s^t\left[\frac{1}{2}\big(\dot{x}(\tau)\big)^2 + V\big(x(\tau)\big)\right]d\tau\right\}, \tag{2}$$

где

$$D[x]=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i-t_{i-1})}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n-t_{n-1})}}.$$

Величину

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2+V\left(x(\tau)\right)$$

можно рассматривать как лагранжиан системы $L(\dot{x},x,\tau),$ а величину

$$S=\int_s^t L(\dot{x},x,\tau)d\tau$$

– как действие. Применяя принцип наименьшего действия [9], можно из всех возможных траекторий выделить классическую траекторию $x_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0.$$

Далее для вычисления интеграла можно использовать разложение действия S относительно классической траектории $x_{\text{кл}}$:

$$S[x(\tau)]\approx S[x_{\text{кл}}(\tau)]+\frac{1}{2}\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)].$$

Вариацию второго порядка $\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]=\int_{t_0}^t \delta x\Lambda\delta x d\tau,$$

где $x=x_{\text{кл}}+\delta x,$

$$\Lambda=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{кл}}}+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\dot{x}}\right)_{x_{\text{кл}}}\frac{d}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial x}\right)_{x_{\text{кл}}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^2}\right)_{x_{\text{кл}}}\frac{d}{dt}.$$

Таким образом, интеграл (2) запишется в виде

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[x_{\text{кл}}(\tau)]\right\}\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_s^t y\Lambda y d\tau\right\}, \tag{3}$$

где интегрирование выполняется по траекториям $y = \delta x$, удовлетворяющим условиям $y(s)=0,\quad y(t)=0,$

$$D[y]=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i-t_{i-1})}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n-t_{n-1})}}.$$

Для вычисления интеграла в (3) используем разложение

$$y=\sum_{j=1}^{\infty}a_j u_j,$$

где функции u_j являются собственными функциями оператора Λ с собственными значениями λ_j.

Тогда интеграл в (3) запишется в виде

$$K = \int D[y] \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_s^t y\Lambda y d\tau\right\} = J\int D[a]\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_j^2\right\}, \tag{4}$$

где J – якобиан перехода от переменной y к переменной a,

$$D[a] = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1} da_i .$$

Так как якобиан J инвариантен относительно операторов Λ [9], то

$$K\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\frac{1}{2}} = K_{\text{free}}\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_{\text{free}} = J\int D[a]\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\text{free},j}a_j^2\right\},$$

$\lambda_{\text{free},j}$ – собственные значения оператора $\Lambda_{\text{free}} = -\dfrac{d^2}{dt^2}$.

Аналогично формуле (4)

$$K_{\text{free}} = \int D[x]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_s^t x\Lambda_{\text{free}} x d\tau\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\cdots\int\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}}\exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\hbar(t_i - t_{i-1})}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}.$$

Следовательно,

$$K = K_{\text{free}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

Таким образом, из (4), (5) следует, что интеграл (3) записывается в виде

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[x_{\text{кл}}(\tau)]\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \tag{6}$$

В нашем случае $L(\dot{x}, x, \tau) = \dfrac{1}{2}\big(\dot{x}(\tau)\big)^2 + V\big(x(\tau)\big)$. Значит, траектория $x_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau) - V'\big(x_{\text{кл}}(\tau)\big) = 0. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\int_s^t \dot{x}_{\text{кл}}^2(\tau)d\tau = \dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s) - \int_s^t V'\big(x_{\text{кл}}(\tau)\big)x_{\text{кл}}(\tau)d\tau,$$

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_s^t \left(V\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) - \frac{1}{2} V'\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) x_{\text{кл}}(\tau) \right) d\tau + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{\text{кл}}(t) x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s) x_{\text{кл}}(s) \right). \tag{8}$$

Приближенные значения функции $x_{\text{кл}}(\tau)$, $s \le \tau \le t$, находим, решая уравнение (7) с помощью метода сеток для решения нелинейных граничных задач [10].

Оператор Λ в нашем случае имеет вид

$$\Lambda = V''\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) - \frac{d^2}{dt^2}. \tag{9}$$

Оператор $\Lambda = -\frac{d^2}{dt^2} + V''$ аппроксимируем конечно-разностным оператором с матрицей $\overline{\Lambda}$ размерности $(N-1)\times(N-1)$, получающейся в результате аппроксимации второй производной в узле t_j выражением $\Delta t^{-2}(t_{j+1} - 2t_j + t_{j-1})$,

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2+\Delta t^2 V_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+\Delta t^2 V_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+\Delta t^2 V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+\Delta t^2 V_{N-1} \end{pmatrix},$$

где

$$V_j = V''\left(x_{\text{кл}}(j\Delta t)\right), \quad 1 \le j \le N-1, \quad \Delta t = \frac{t-s}{N}.$$

Оператор $\Lambda_{\text{free}} = -\frac{d^2}{dt^2}$ заменим матрицей размерности $(N-1)\times(N-1)$:

$$\overline{\Lambda}_{\text{free}} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{N-1} \lambda_j = \det \overline{\Lambda}, \quad \prod_{j=1}^{N-1} \lambda_{\text{free},j} = \det \overline{\Lambda}_{\text{free}}.$$

Таким образом, подставляя приближенные значения для $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ и $\prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$ в (6), получаем квазиклассическую аппроксимацию функционального интеграла (1).

2. Вычисление функционального интеграла с помощью разложения по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. Чтобы оценить погрешность квазиклассической аппроксимации интеграла (1), вычислим этот интеграл с помощью другого приближенного метода.

Для вычисления интеграла используем приближенное равенство [11]

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\int\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_s^t V\big(x(\tau)\big)d\tau\right\}d\mu_{x_s,x_t}(x)\approx\sum_{n=0}^{m}\psi_n(x_s)\psi_n(x_t)\exp\{\lambda_n(t-s)\},\tag{10}$$

где λ_n, $\psi_n(x)$ – собственные значения и собственные функции оператора $\frac{1}{\hbar}H=\frac{1}{2}\hbar\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\hbar}V$, m – число слагаемых, которое мы выбираем в зависимости от желаемой точности вычислений.

Для вычисления λ_n, $\psi_n(x)$ рассматриваем функции $\psi_n(x)$ на интервале $-A\le x\le A$, A – некоторое положительное число, и оператор $\frac{1}{\hbar}H=\frac{1}{2}\hbar\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\hbar}V$ аппроксимируем конечно-разностным оператором с матрицей $\overline{H}$ размерности $(N-1)\times(N-1)$, получающейся в результате аппроксимации второй производной в узле x_j выражением $h^{-2}(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1})$:

$$\overline{H}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-2} & c_{N-2}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -\hbar\ -\frac{1}{\hbar}h^2V_1 & \frac{\hbar}{2} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{\hbar}{2} & -\hbar\ -\frac{1}{\hbar}h^2V_2 & \frac{\hbar}{2} & \cdots & 0\\ 0 & \frac{\hbar}{2} & -\hbar\ -\frac{1}{\hbar}h^2V_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hbar\ -\frac{1}{\hbar}h^2V_{N-1}\end{pmatrix},\tag{11}$$

где

$$V_j=V(x_j)=V(-A+jh),\ \ 1\le j\le N-1,\ \ h=\frac{2A}{N}.$$

Далее методом последовательностей Штурма [12] вычисляются собственные значения $\overline{\lambda}_j$ матрицы $\overline{H}$ и методом обратной итерации [12] – собственные векторы $\overline{\psi}_j$ матрицы $\overline{H}$.

3. Численные результаты. В данном разделе рассматривается численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов на примере ангармонического осциллятора, т. е. для гамильтониана $H=\frac{1}{2}\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V(x)$ и потенциала $V(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4$. Функциональный интеграл имеет вид

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\int\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int\limits_s^t\Big(x^2(\tau)+x^4(\tau)\Big)d\tau\right\}d\mu_{x_s,x_t}(x).\tag{12}$$

В данном случае $K_{t-s}(x_s,x_t)$ вычисляется по формуле (6), где траектория $x_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau)-x_{\text{кл}}(\tau)-2{x_{\text{кл}}}^3(\tau)=0,$$

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = -\frac{1}{2}\int_s^t x_{\text{кл}}{}^4(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\Big(\dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s)\Big).$$

Выражение

$$\prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$$

вычисляется при $V_j = 1 + 6x_{\text{кл}}(j\Delta t)^2,\ \ 1 \le j \le N-1,\ \ \Delta t = \dfrac{t-s}{N}.$

В методе, основанном на разложении по собственным функциям гамильтониана, $K_{t-s}(x_s, x_t)$ вычисляется по формуле (10), где $\overline{\lambda}_j$ и $\overline{\Psi}_j$ – собственные значения и собственные векторы матрицы (11), $V_j = \dfrac{1}{2}(-A + jh)^2 + \dfrac{1}{2}(-A + jh)^4,\ \ 1 \le j \le N-1.$

На рис. 1 для сравнения приведены значения интеграла (12) при $s = 0$, $t = 1$, $\hbar = 1$, $x_s = 0$, $-3 \le x_t \le 3$, полученные с помощью квазиклассической аппроксимации и разложения по собственным функциям гамильтониана.

На рис. 2 для сравнения приведены значения интеграла (12) при $s = 0$, $t = 1$, $\hbar = 0{,}1$, $x_s = 0$, $-1{,}5 \le x_t \le 1{,}5$, полученные с помощью квазиклассической аппроксимации и разложения по собственным функциям гамильтониана.

Из рис. 1, 2 видно, что квазиклассическая аппроксимация хорошо приближает функциональный интеграл, и не только при малых значениях $\hbar$.

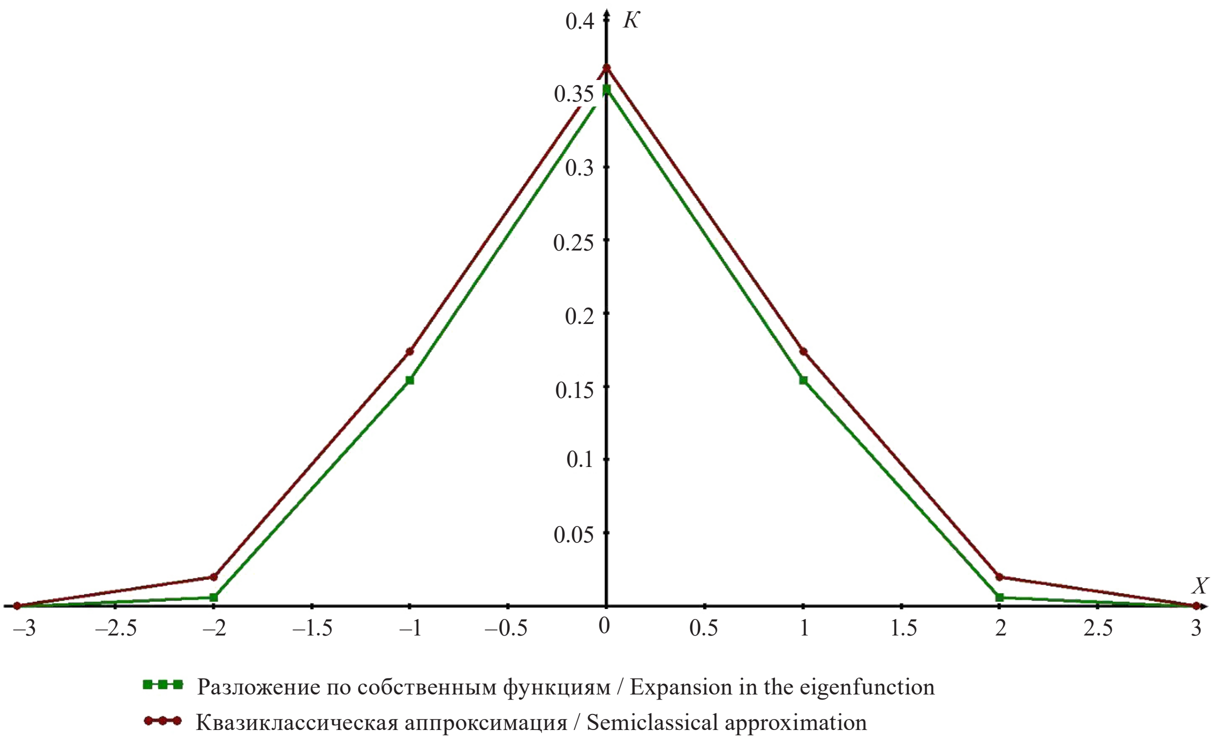

Рис. 1. Квазиклассическая аппроксимация интеграла $K_{t-s}(x_s, x_t)$ и значения интеграла, полученные разложением по собственным функциям гамильтониана: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 1$; $x_s = 0$

Fig. 1. Semiclassical approximation of the integral $K_{t-s}(x_s, x_t)$ and the values of the integral, obtained by expansion in the eigenfunctions of the Hamiltonian: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 1$; $x_s = 0$

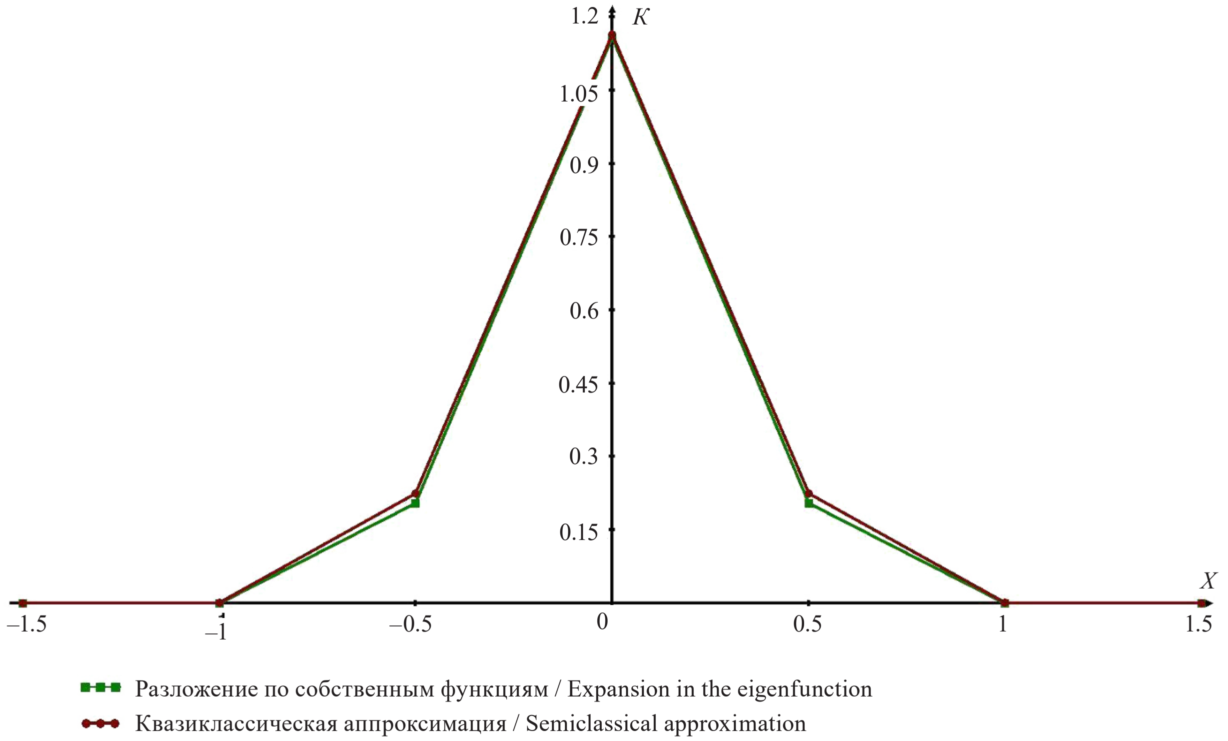

Рис. 2. Квазиклассическая аппроксимация интеграла $K_{t-s}(x_s, x_t)$ и значения интеграла, полученные разложением по собственным функциям гамильтониана: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 0{,}1$; $x_s = 0$

Fig. 2. Semiclassical approximation of the integral $K_{t-s}(x_s; x_t)$ and the values of the integral, obtained by expansion in the eigenfunctions of the Hamiltonian: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 0.1$; $x_s = 0$

Таким образом, в работе проведен численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа использовано сравнение результатов, полученных с помощью квазиклассической аппроксимации и метода вычисления функциональных интегралов, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл.

Список использованных источников

1. Glimm, J. Quantum Physics. A functional integral point of view / J. Glimm, A. Jaffe. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1981. – 417 p.

2. Янович, Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1976. – 382 с.

3. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б. С. Елепов [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1980.

4. Сабельфельд, К. К. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов методом Монте-Карло / К. К. Сабельфельд // ЖВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 29–43.

5. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985. – 309 с.

6. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Pablishers, 1993. – 400 p.

7. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.

8. Kleinert, H. Path integrals in quantum mechanics, statistics polymer physics, and financial markets / H. Kleinert. – Singapore: World Scientific Publishing, 2004. – 1504 p. https://doi.org/10.1142/5057

9. Feynman, R. P. Quantum mechanics and path integrals / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.

10. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 671 с.

11. Risken, H. The Fokker-Plank equation: methods of solution and applications / H. Risken. – Springer-Verlag, 1984. – 454 p.

12. Wilkinson, J. H. The algebraic eigenvalue problem / J. H. Wilkinson. – Oxford, 1965. – 662 p.

References

1. Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981. 417 p.

2. Yanovich L. A. *Approximate Evaluation of Continual Integrals with respect to Gaussian Measures*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1976. (in Russian).

3. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A., Sabelfeld K. K. *Solution of Boundary Value Problems by Monte-Carlo Method*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 174 p. (in Russian).

4. Sabelfeld K. K. *Approximate evaluation of Wiener continual integrals by Monte-Carlo method. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 29–43. https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90064-8

5. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Approximate Methods of Evaluation of Continual Integrals*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985. 309 p. (in Russian).

6. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional integrals: Approximate evaluation and Applications*. Kluwer Academic Pablishers, Dordrecht. 1993. 400 p.

7. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to theory and applications of functional integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).

8. Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics Polymer Physics, and Financial Markets*. Singapore, World Scientific Publishing, 2004. 1504 p. https://doi.org/10.1142/5057

9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 365 p.

10. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Computational methods of higher mathematics*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1975, vol. 2. 671 p. (in Russian).

11. Risken H. *The Fokker-Plank Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer-Verlag, 1984. 454 p.

12. Wilkinson J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, 1965. 662 p.

Информация об авторах

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Нуржанов Бердах Орынбаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Каракалпакский государственный университет им. Бердаха (ул. Ч. Абдирова, 1, 230112, г. Нукус, Республика Узбекистан). E-mail: nurjanov@list.ru

Information about the authors

Victor B. Malyutin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Berdakh O. Nurjanov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Karakalpak State University named after Berdakh (1, Ch. Abdirov Str., 230112, Nukus, Republic of Uzbekistan). E-mail: nurjanov@list.ru