REFERENCIA: Martínez, S., González-Calero, J.A. & Sotos, M.A. (2015). Resultados preliminares de una investigación para el estudio de las dificultades en problemas de M.C.D. y M.C.M. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1). Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

RESULTADOS PRELIMINARES DE UNA INVESTIGACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LAS DIFICULTADES EN PROBLEMAS DE M.C.D. Y M.C.M.

PRELIMINARY RESULTS FROM A STUDY OF THE DIFFICULTIES INVOLVED IN G.C.D. AND L.C.M. PROBLEMS

Silvia Martínez Sanahuja
José Antonio González-Calero
María Antonia Sotos Serrano
Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha

Recibido: 20/04/2015
Aceptado: 22/06/2015

Resumen:
En este artículo se presenta los resultados preliminares de una investigación con estudiantes para maestro sobre la resolución de problemas verbales ligados a los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m). La investigación pretende evaluar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y analizar la influencia en el proceso de resolución de la presencia en el enunciado de palabras clave a la hora de decidir entre el m.c.d. y el m.c.m. Es decir, se desea comprobar si los estudiantes involucran las ideas de múltiplo y divisor en la resolución o si por el contrario se guían por las palabras clave del enunciado para realizar su elección entre m.c.d. y m.c.m. El artículo presenta resultados preliminares cuantitativos de una fase de la investigación en la que participaron estudiantes para maestro.
Palabras clave: mínimo común múltiplo, máximo común divisor, formación inicial de profesores, problemas verbales, educación primaria

Abstract:
This article presents preliminary results from a research on solving word problems linked to the concepts of greatest common divisor (g.c.d.) and least common multiple (l.c.m.). The research aims to assess the competence of students in the resolution of such problems and to analyse the influence in the process of resolution of the presence of key words in the statement when deciding between the g.c.d. and the l.c.m. I.e., we want to check if students include notions of multiple and divider in the problem resolution or if, on the contrary, they are guided by the key words of the statement to make their choice between g.c.d. or the l.c.m. We present preliminary quantitative results from a stage og the study in which preservice elementary teachers took part.
Keywords: least common multiple, great common multiple, initial educational practice, word problems, primary school education

Introducción y antecedentes

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor (m.c.d) y mínimo común múltiplo (m.c.m).

En relación a la comprensión de la divisibilidad, Zazkis & Campbell (1996) realizaron un estudio en estudiantes para maestros, centrado en el concepto de divisibilidad y su relación con la división, multiplicación, números primos y compuestos, factorización y reglas de la divisibilidad. Sus resultados señalaban que la instrucción recibida por los participantes no había facilitado la compresión de estos conceptos. Además, el estudio atestiguó una tendencia entre los participantes a aplicar un razonamiento procedimental, incluso en situaciones donde los estudiantes evidenciaban comprensión conceptual. Por otro lado, estos mismos autores plantearon una descomposición genética del concepto de divisibilidad a partir de cómo los alumnos podrían realizar su proceso de construcción. En esta línea, Bodi, Valls & Llinares (2007) realizaron un análisis implicativo de los conceptos y las relaciones que intervienen en el proceso de construcción de la divisibilidad.

Otras investigaciones subrayan que las representaciones decimal y factorial de los números influyen directamente en la comprensión de la divisibilidad (Zazkis & Liljedahl, 2004). Brown (2002) destacó la importancia de la representación factorial y el Teorema Fundamental de la Aritmética en la comprensión de los conceptos del esquema de divisibilidad.

Así, algunos de los factores importantes a tener en cuenta a la hora de analizar la comprensión de la divisibilidad son las relaciones entre conceptos (Bodi, Valls, & Llinares, 2007) y los modos de representación de los números decimal y factorial (Zazkis & Campbell, 1996; Brown, 2002).

Dentro del estudio de la divisibilidad, existen dos conceptos particularmente difíciles de comprender y utilizar por parte de los alumnos: máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Relacionado con esto, Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (en prensa) realizaron una caracterización del conocimiento matemático sobre números y operaciones de futuros maestros de primaria españoles a partir de los resultados del estudio internacional TEDS-M, encontrando que estos maestros tenían un conocimiento matemático insuficiente de las propiedades de m.c.d. y m.c.m. Además, Bodi, Valls, & Llinares (2005) comprobaron que son más difíciles aquellos ítems relacionados con la inversión de la noción de múltiplo o el uso de m.c.d. y m.c.m. entre otros, gracias al análisis psicométrico de la dificultades en la comprensión de la divisibilidad. Dicho análisis se realizó a partir del uso de un instrumento de evaluación del desarrollo de la comprensión de la divisibilidad desde la perspectiva de la teoría APOS.

La comprensión de la divisibilidad y en particular la idea de múltiplo común también fue estudiada por Brown, Thomas y Tolias (2002) en un grupo de estudiantes para maestros y comprobaron que muchos de ellos no eran capaces de reconocer la implicación de m.c.m en problemas verbales si no se mencionaba explícitamente la expresión "mínimo común múltiplo" en el enunciado. En este mismo estudio, Brown y sus colaboradores también comprobaron que los estudiantes tienden a aplicar directamente el algoritmo de obtención del m.c.m y sin embargo, no eran capaces de entender la utilidad del mismo. A diferencia del mencionado trabajo, el presente estudio pretende por un lado, analizar la presencia de palabras claves en el enunciado, en lugar de aludir explícitamente al m.c.m. y, por otro lado, extender el estudio a problemas de m.c.d.

Similares resultados a Brown et al. (2002) fueron obtenidos por Bodí (2006) en estudiantes de Educación Secundaria. Bodí comprobó que algunos estudiantes cuando resolvían problemas relacionados con el uso del m.c.m y m.c.d actúan de forma mecánica en la aplicación del algoritmo de cálculo del m.c.m. y m.c.d. y que aunque son capaces de usar el algoritmo adecuadamente mostraban desconocimiento del significado del número obtenido por este método.

Por otro lado, Noblet (2013) estudio la comprensión de los futuros maestros desde el punto de vista didáctico y comprobó que su conocimiento sobre el concepto y uso del m.c.d. es limitado, y por tanto, tienen problemas graves a la hora de plantear y resolver problemas de m.c.d.

Así, todas estas investigaciones han constatado que el conocimiento de la divisibilidad es limitado para los estudiantes en general. En particular, los conocimientos sobre los conceptos m.c.d y m.c.m. suelen estar basados en reglas que carecen de explicaciones intuitivas para los alumnos (Dias, 2005). Muchas veces los alumnos relacionan los conceptos de m.c.d. y m.c.m. con el procedimiento de resolución (se realiza la descomposición factorial, se toman los factores comunes…) en lugar de con su significado. En este sentido, Zazkis & Gadowsky (2001) consideran que este hecho es debido a que las prácticas docentes actuales se centran en el aprendizaje de los cálculos en lugar de la estructura y propiedades de los números.

Así, algunos autores consideran que el procedimiento de cálculo de ambos elementos entorpece la comprensión sobre estos conceptos. En relación a ello, Dias (2005) propone el uso de un método alternativo para la enseñanza de m.c.d y m.c.m. El método consiste en emplear una herramienta que proporciona una representación visual del m.c.d. y m.c.m. a través de matrices de factores. El método propuesto por Días (2005) utiliza retículas donde se representan los distintos factores (primos y compuestos) de un número, tal y como muestra la Figura 1. Así, para obtener el m.c.d y el m.c.m de dos números, en primer lugar, se dibujan las retículas relativas a ambos números. Entonces, para calcular el m.c.d., se comparan los números comunes en ambas retículas y el mayor de ellos es el que corresponde al m.c.d. Finalmente, para obtener el m.c.m., se superponen ambas retículas y se complementa el diagrama resultante hasta obtener la menor retícula que contenga a la superposición de ambas. La retícula así construida corresponde al m.c.m.

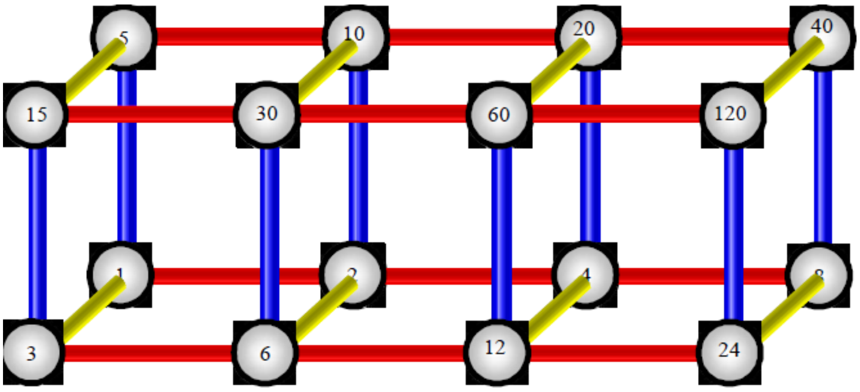

Figura 1. Retícula correspondiente al número 120 (Días, 2005, p. 5)

Aunque es cierto que este método gráfico involucra explícitamente las ideas de múltiplo y divisor, no existen estudios que aporten evidencias empíricas de la efectividad de dicho método. Igualmente debería ser objeto de estudio si este método gráfico no podría derivar también en un proceder algorítmico sin reflexión en las ideas de múltiplo y divisor. Por otro lado, en este método cuando un número posee más de tres factores primos, la representación de la retícula es excesivamente compleja y hace todavía más complicada la superposición con otra.

Objetivos

El estudio, del que aquí presentamos los primeros resultados, pretende: 1) analizar el nivel de competencia de estudiantes en la resolución de problemas verbales en situaciones de divisibilidad que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. y, 2) evaluar la influencia de palabras clave del enunciado de un problema verbal que involucra los conceptos m.c.d. y m.c.m. en las resoluciones de estudiantes para maestros.

Instrumento y Metodología

La herramienta consiste en una prueba escrita compuesta por cuatro problemas verbales. Estos problemas podrían catalogarse como problemas típicos de m.c.d. y m.c.m. pues, de hecho, están inspirados en versiones similares de problemas presentes en unidades de libros de texto de educación secundaria donde se explican los conceptos de m.c.d. y m.c.m. Si bien es cierto que los enunciado aluden a situaciones que podrían catalogarse como poco realistas, son problemas clásicos en las unidades de los libros de texto que se ocupan de la enseñanza del m.c.m. y m.c.d. y usados con frecuencia en contextos escolares.

Los cuatro problemas usados se caracterizan por ser problemas verbales en los que hay dos cantidades conocidas y la solución es el m.c.d. o el m.c.m. de los dos únicos datos dados en el enunciado. En concreto, dos problemas tenían como solución el m.c.d. y otros dos como solución el m.cm. A su vez, cada pareja de problemas (de m.c.d. o de m.c.m.) presentaba entre sí la diferencia de contener en su enunciado diferentes palabras clave: *máximo* o *mínimo*. Así, el instrumento diseñado combina dos factores: 1) problemas cuya solución es el m.c.d. o el m.c.m. y 2) problemas en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo* o la palabra clave *mínimo*. De la combinación de estos dos factores se obtienen los cuatro problemas empleados en la prueba escrita. Por una cuestión de economía usaremos la siguiente notación a la hora de referirnos a los problemas: 1) Problema *divmax* (problema con solución el m.c.d. de los datos del problema y en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo*); 2) Problema *divmin* (solución el m.c.d. y presencia en el enunciado de la palabra *mínimo*); 3) Problema *mulmax* (solución el m.c.m. y presencia en el enunciado de la palabra *máximo*); y 4) Problema *mulmin* (solución el m.c.m. y presencia en el enunciado de la palabra *mínimo*). A continuación se presentan los enunciados de los problemas:

Problema Las cuerdas (divmax)

Dos cuerdas, de 18 cm y 24 cm respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. Calcula el tamaño máximo de estos trozos.

Problema Los cables (divmin)

Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿Cuál será la longitud de los trozos?

Problema Felipe y Alberto (mulmax)

Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?

Problema El faro (mulmin)

Un faro se enciende cada 12 segundos y otro cada 18 segundos. Si se acaban de encender a la vez en este momento, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir

El uso experimental de este instrumento contemplaba una recogida de datos en dos etapas. En concreto, en la primera parte se presentaron los problemas verbales para que mediante un test de selección múltiple los estudiantes marcaran qué elemento de divisibilidad utilizarían para su resolución. En esta etapa no se solicitaba al estudiante que resolviera el problema. De hecho, los estudiantes sólo disponían de cinco minutos para completar esta etapa con el fin de que sus respuestas se basaran en el método que aplicarían inicialmente para resolver los problemas y no dispusieran de tiempo para modificar sus respuestas eventualmente tras afrontar el proceso de resolución. Una vez recogida la primera parte, se abordaba la segunda en la cual se pedía a los estudiantes la resolución completa de los problemas.

Como decíamos anteriormente, la primera parte se basó en un test de selección múltiple para cada problema. El alumno debía seleccionar qué elemento utilizaría para la resolución de los problemas entre las siguientes opciones:

a) Máximo común divisor
b) Máximo común múltiplo

c) Mínimo común múltiplo

d) Mínimo común divisor

e) Ninguna de las anteriores

En la segunda parte se planteaban los problemas para su resolución por parte de los alumnos. Previamente a esta etapa, se recordó en la pizarra del aula los algoritmos de cálculo del m.c.d. y del m.c.m. Esta explicación se realizaba de forma totalmente descontextualizada, no ligada a problema verbal alguno, en la que se presentaban tres números naturales y se calculaba su m.c.d. y su m.c.m. a partir de la descomposición de los números en factores primos. Esta explicación pretendía que, durante la resolución de la prueba escrita, las actuaciones de los estudiantes no estuvieran influenciadas por la dificultad de calcular el m.c.d. o el m.c.m., si el estudiante deseaba usar el algoritmo, o que cálculos erróneos del m.c.d. o del m.c.m. pudieran hacer que el estudiante modificase sus planteamientos al no dar sentido a la solución en el contexto del problema.

Tras esta explicación, se entregaba la prueba escrita a los estudiantes y se les concedía un tiempo de 40 minutos para su resolución. Para evitar que los problemas fueran resueltos en un orden fijo por todos los participantes, tanto en la primera como en la segunda parte se empleaban diferentes versiones de la misma prueba escrita, cuya única diferencia era el orden de aparición de los enunciados.

Estas dos etapas conformaban un estudio cuantitativo cuyo objeto era, además de dar respuesta parcialmente a los objetivos de la investigación, la selección de participantes para la siguiente etapa de la investigación: un estudio cualitativo. A partir del estudio cuantitativo, se pretendía identificar patrones o tendencias de actuación a la hora de resolver los problemas y conformar parejas con líneas de actuación similares para realizar el posterior estudio cualitativo. Con la realización del estudio cualitativo se pretende obtener una mayor información sobre el origen de las dificultades o tendencias mostradas por los estudiantes al afrontar este tipo de problemas. Sin embargo, este artículo se centrará exclusivamente en la primera parte de la fase cuantitativa. En concreto, presentamos y analizamos los resultados obtenidos en una investigación en la que participaron 127 estudiantes para maestros de Educación Primaria. Todos los participantes habían cursado ya la asignatura relacionada con números y su didáctica en años anteriores. La población fue seleccionada de este modo pues ya habían trabajado el curso anterior los conceptos de m.c.m. y m.c.d., así como la resolución de problemas que impliquen el uso de ambos conceptos. Además, dentro del plan formativo de los estudios que estos alumnos cursan no se contempla que fueran a trabajar nuevamente sobre esta materia, por lo es muy probable que las actuaciones reflejadas en esta investigación sean muy similares al conocimiento profesional que podrían presentar al inicio de carrera docente.

Resultados

Resultados previos del estudio cuantitativo

La Tabla 1 presenta los resultados tras la codificación de las respuestas de los estudiantes en la primera prueba, el test de selección múltiple. Se muestran los resultados desglosados para cada uno de los cuatro problemas, según la selección que han realizado los estudiantes.

Tabla 1. Resultados test por tipo de selección

		Selección				
	N	*m.c.d*	*m.c.m.*	*Max común múltiplo*	*Min común divisor*	*Ninguna de las anteriores*
Problema divmax	127	66 (51,97%)	39 (30,71%)	5 (3,94%)	9 (7,09%)	8 (6,30%)
Problema divmin	127	61 (48,03%)	37 (29,13%)	4 (3,15%)	21 (16,54%)	4 (3,15%)
Problema mulmax	127	36 (28,35%)	75 (59,06%)	10 (7,87%)	3 (2,36%)	3 (2,36%)
Problema mulmin	127	44 (34,65%)	69 (54,33%)	7 (5,52%)	6 (4,72%)	1 (0,79%)

Recuérdese, que la respuesta correcta en los problemas *divmax* y *divmin* es la columna *m.c.d.* e incorrectas el resto de columnas, mientras que en los problemas *mulmax* y *mulmin* la respuesta correcta se corresponde con la columna *m.c.m.*

Los resultados muestran de manera evidente las dificultades de los estudiantes para reconocer el elemento que han de involucrar en la resolución de los problemas. Así, para los problemas *divmax*, *divmin*, *mulmax* y *mulmin* se obtuvo sólo un porcentaje de respuestas correctas del 51,97%, 48,03%, 59,06% y 54,33%, respectivamente. El error más frecuente fue seleccionar el m.c.d. en vez del m.c.m. (o viceversa). De hecho, uno de los objetivos del instrumento era evaluar cómo afectaba la presencia de la palabra *máximo* y la palabra *mínimo* a la hora de determinar cómo afrontar la resolución. Bajo este prisma sería de esperar un índice mayor de respuestas erróneas en los problemas *divmin* y *mulmax* pues sus enunciados inducirías a usar el m.c.m. y el m.c.d., respectivamente. Sin embargo, los datos recabados en la primera fase de la investigación no muestran diferencias significativas en el porcentaje de respuestas erróneas del tipo m.c.d. por m.c.m. (o viceversa) al comparar las parejas *divmax- divmin* y *mulmax-mulmin.* En todo caso, se observa un mayor índice de errores para las preguntas donde aparecen los términos *máximo* y *mínimo* y las soluciones m.c.d. y m.c.m., respectivamente. En cualquier caso, los resultados subrayan importantes dificultades por parte de los estudiantes para maestro para plantear correctamente problemas que involucran los conceptos de m.c.d. y m.c.m. Además del alto porcentaje de respuestas erróneas en todos los problemas que revelan dificultades en la compresión de los conceptos de múltiplo y divisor, sirva como muestra de estas dificultades el hecho concreto de que en el problema *divmin* el 16,54% de los estudiantes optará por la respuesta *mínimo común divisor*.

Conclusiones

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. En este artículo se presenta los resultados preliminares de una investigación sobre los conceptos de m.c.d. y m.c.m. en la resolución de problemas verbales por parte de estudiantes para maestros

Los resultados aportados revelan importantes dificultades entre los estudiantes para maestro a la hora de determinar qué elemento, el m.c.d. o m.c.m., deben emplear en la resolución de problemas verbales. Los primeros resultados del uso de esta herramienta con estudiantes para maestro no apuntan a que los estudiantes interpreten las palabras *máximo* y *mínimo* como indicadores de que han de calcular el m.c.d. o el m.c.m., respectivamente. El resto de etapas de la investigación puede proveer mayor información acerca de si la presencia de estas palabras en el enunciado condiciona erróneamente de algún modo las estrategias empleadas por los estudiantes. Más allá de estas consideraciones, los resultados parecen señalar claramente que un elevado número de estudiantes no realizan razonamientos sobre las ideas de múltiplo y divisor, o al menos no de forma correcta, ante problemas de m.c.d. y m.c.m.

Partiendo de este hecho, y de evidencias sólidas que deberán aportar tanto la segunda fase del estudio cuantitativo como el estudio cualitativo, se plantea la conveniencia de estudiar en qué momento del proceso educativo se produce la ruptura del aprendizaje de estos conceptos y formular o diseñar un plan de enseñanza que mejore la asimilación y el empleo de estos dos conceptos que son fundamentales en la didáctica de las matemáticas de los alumnos de primaria/secundaria. Así, como objetivo último de esta línea de investigación se contempla el diseño de una instrucción alternativa, que podría basarse sobre las ideas de enseñar un algoritmo alternativo que no utilice únicamente la descomposición en factores primos por considerarla confusa a estos niveles o algún método gráfico que permita asociar mejor el concepto con su significado, pudiendo tener ciertas similitudes con las ideas planteadas por Días (2005).

Referencias bibliográficas

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Bodi, S., Valls, J., & Llinares, S. (2005). El analisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento. *Números, 60*, 3-24.

Bodi, S., Valls, J., & Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implictive et* *applications: 4èmes Rencontres internationales d'analyse statistique implicative* (págs. 99-100). Gras Régis.

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En Campbell, S. & Zazkis, R. (eds.), *Learning and Teaching Number Theory* (págs. 131-137). Wesport: Ablex Publishing.

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell, & R. Zazkis, *Learning and teaching number theory* (págs. 41-82). Westport: Ablex Publishing.

Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 730-738.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., & Rico, L. (en prensa). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XXI.* doi: 10.5944/educxx1.14222

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (págs. 219-225). Denver: Sigmaa.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41–52). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186.