REFERENCIA: García, A., Arnau, D. & Arevalillo-Herráez, M. (2015). Sobre el efecto de usar el nombre de las cantidades en lugar de sus valores cuando se resuelven problemas de fracciones con un sistema tutorial inteligente. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1). Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

SOBRE EL EFECTO DE USAR EL NOMBRE DE LAS CANTIDADES EN LUGAR DE SUS VALORES CUANDO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE FRACCIONES CON UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE

ON THE EFFECT OF USING QUANTITY NAMES INSTEAD OF VALUES WHEN SOLVING FRACTION PROBLEMS IN AN INTELLIGENT TUTORING SYSTEM

Antonia García Sánchez
David Arnau
Miguel Arevalillo-Herráez
Facultat de Magisteri. Universitat de València

Recibido: 15/04/2015
Aceptado: 23/06/2015

Resumen:

Dentro del campo de la resolución aritmética de problemas verbales se ha constatado la existencia de una discontinuidad cuando se pasa de operar con números naturales a operar con fracciones. Presentamos resultados de un estudio exploratorio en el que se pretendía analizar si el hecho de que los estudiantes recibiesen realimentación sobre las acciones que realizaban, centrada en el nombre de las cantidades en lugar de en su valor, podía servir de puente ante esta discontinuidad. Con este fin realizamos un estudio en dos grupos de segundo de secundaria. El grupo experimental resolvió problemas verbales de fracciones en un entorno de aprendizaje interactivo que proporcionaba mensajes en los que aparecían los nombres de las cantidades, mientras que el grupo de control los resolvió en lápiz y papel con la única ayuda de una calculadora. La comparación de los resultados de las pruebas previa y posterior a la intervención pone de manifiesto una mejor evolución del grupo experimental.
Palabras clave: didáctica de las matemáticas, resolución de problemas, fracciones, nombres de las cantidades, entorno de aprendizaje interactivo.

Abstract:
In arithmetical solving of word problems, a conceptual gap related to shifting from natural numbers to fractions has been reported. In this paper, we present results of an exploratory study that aims to analyse whether the use of quantities names instead of values can contribute to fill this gap. The study has involved two groups of second level students in secondary education. The experimental group solved a set of fraction word problems in an interactive learning environment that issued meaningful feedback messages using quantity names. The control group solved the same set of problems with pencil and paper, and were allowed to use a calculator. The comparison between the pre- and post-tests results reveals a better evolution in the experimental group.
Keywords: didactics of mathematics, problem solving, fractions, quantities names, interactive learning environment

Introducción

Este artículo se centra en la enseñanza-aprendizaje de la resolución aritmética de problemas verbales. Concretamente en aquellos problemas en los que algunas de las cantidades que aparecen en el enunciado se expresan mediante fracciones. Se pretende analizar el papel que tiene la presencia del nombre de las cantidades a la hora de sugerir el uso de determinados esquemas conceptuales necesarios para resolver un problema. Con el fin de hacer explícitos los nombres de las cantidades, los estudiantes debían resolver los problemas usando un sistema tutorial inteligente (STI). Este STI es capaz de supervisar la resolución que realiza el estudiante adaptándose a la línea (o líneas) de resolución que elige. También puede ofrecer ayudas a demanda y las expresa en lenguaje natural refiriéndose a las cantidades que sugiere usar tanto por su valor como un posible nombre en lenguaje vernáculo.

En el estudio, nos planteamos analizar las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas usando el STI y valorar la influencia de su uso cuando se regresa a la resolución habitual con lápiz y papel.

Antecedentes y marco de referencia.

La necesidad de investigar en la resolución de problemas de fracciones se justifica por las dificultades y limitaciones que los alumnos presentan al resolverlos, según se concluye en investigaciones anteriores. Las dificultades ligadas al tipo de los números en la resolución de problemas verbales ha sido tratada abundantemente por los investigadores del área (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Bell, Swan y Taylor, 1981; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Gómez, 2011).

En la investigación en educación matemática se ha planteado como problema de estudio el fenómeno de la discontinuidad o corte didáctico que se produce al pasar de operar con números naturales a operar con fracciones (Gómez, 2011). Se observa que los estudiantes encuentran grandes dificultades para identificar la operación correcta al resolver problemas verbales aritmético-algebraicos en los que aparecen fracciones, dificultades que se dan en menor medida cuando en el enunciado aparecen números naturales.

Así, como señalan Fischbein, Deri, Nello, Marino (1985), incluso problemas que son textualmente idénticos pueden diferir en su nivel de dificultad según los tipos de número usados. El papel de los datos numéricos del enunciado es decisivo para la resolución del problema, por ello, señalan la necesidad de mostrar todos los contextos y modelos de situación en los que pueden aparecer las operaciones, observando las modificaciones en el significado cuando se cambia el campo numérico de los números naturales a los racionales.

De hecho, la causa de estos errores, según estos estudios, parece encontrarse en los modelos didácticos usados inicialmente cuando se introducen los problemas multiplicativos con números naturales.

Como apuntan Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985, p. 16) “el paso siguiente […] sería intentar proporcionar a los estudiantes de estrategias mentales eficientes […] para controlar el impacto de estos modelos primitivos”. Desde el punto de vista de la enseñanza, estas dificultades se propone abordarlas identificando los elementos invariantes: “la necesidad de enseñar las operaciones en diferentes contextos y modelos de situación, prestando atención a su invariabilidad al cambiar el tipo y tamaño de los números” (Gómez, 2011, pp. 42-43).

Partimos de la idea de diccionario de cantidades propuesta por Cerdán (2008): “a un problema viene asociado un diccionario de cantidades, diccionario que contendría todas las cantidades mencionadas en el enunciado del problema […] y las consideradas por el resolutor, y todos los modos en los cuales dichas cantidades se refieren” (p. 32). Este autor considera que toda cantidad que se emplea en la resolución de un problema verbal puede ser representada mediante triadas (x, u, n), donde x puede ser un número, una letra, una expresión aritmética o una expresión algebraica; u es una unidad de una magnitud; y n “es la manera en la cual en el lenguaje vernáculo proporcionamos un sentido, que tiene por referente la cantidad (x, u), en el mundo de los sentidos que para ella sería posible imaginar en el contexto del problema” (p. 33). A este componente n es al que llamaremos nombre o etiqueta de la cantidad.

Así, por ejemplo, en los problemas siguientes encontramos que la cantidad que toma el valor 2 en el primer problema y 3/4 en el segundo problema tienen en común que se les puede dar en ambos casos el nombre *capacidad de las botellas*.

¿Cuántas botellas de **2** litros se pueden llenar con el contenido de un depósito de **3000** litros de zumo?

¿Cuántas botellas de **3/4** de litro se pueden llenar con el contenido de un depósito de **3000** litros de zumo?

Objetivos.

En concreto nos marcamos dar respuesta a los siguientes objetivos de investigación: (a) ¿Cómo influía el uso de un sistema tutorial inteligente que proporcionaba mensajes en los que aparecían los nombres de las cantidades en la competencia para la resolución aritmética de problemas verbales con fracciones?; (b) ¿Qué características del STI ayudaban a los estudiantes durante la resolución y cuáles no? Y, en concreto, ¿qué ayuda proporcionaba a los estudiantes el hecho de que el STI se refiera a las cantidades tanto por su valor como por un posible nombre?

Material y métodos.

4.1. *Características del STI.*

La versión del STI utilizado en esta investigación había sido empleada previamente en situaciones de enseñanza-aprendizaje de resolución aritmética de problemas verbales en los que las cantidades tenían valores enteros (Arnau, Arevalillo-Herráez y

González-Calero, 2014). En lo que sigue realizaremos una descripción de sus características.

En la Figura 1, se observa que el enunciado del problema que se debe resolver se sitúa en la parte superior de la pantalla, mientras que en la parte inferior se encuentra el panel con el que el estudiante debe interactuar.

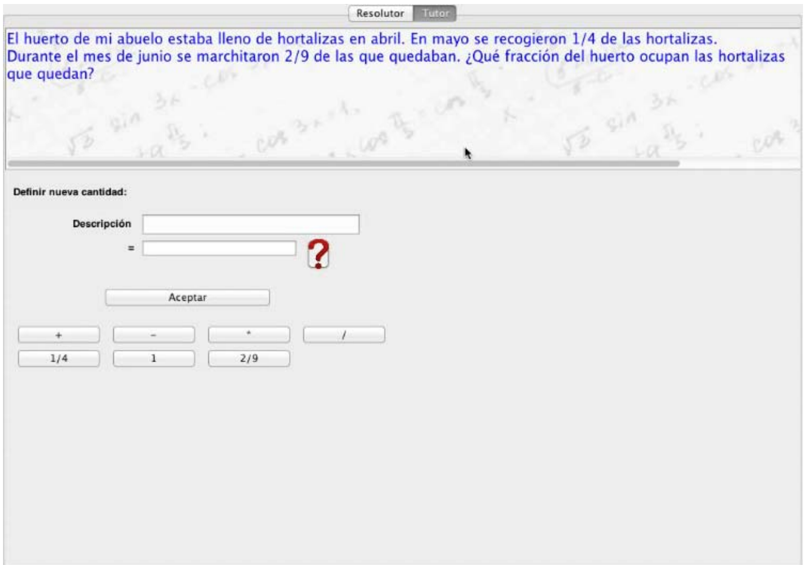

Figura 1

Inicialmente en este panel se presenta una botonera, similar a la de una calculadora, que permitirá al estudiante plantear posibles cálculos que el STI deberá comprobar. Además de los signos correspondientes a cada operación, se incluyen los botones que representan a las cantidades conocidas de las que los estudiantes deben partir para resolverlo. Para facilitar la relación entre la etiqueta de una cantidad y su valor, al situar el cursor sobre dichos botones, aparece el nombre de cada una de ellas (Figura 2).

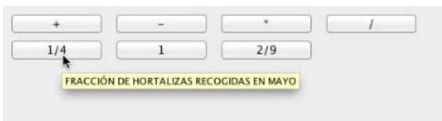

Figura 2

Existe la opción de pedir ayuda pulsando el icono . La versión del STI empleada es capaz de proporcionar ayudas en las que se facilita al resolutor qué cantidades se deben utilizar para calcular una cantidad desconocida. La referencia a las cantidades se hace por su nombre y valor (Figura 3). Como ya se ha señalado los nombres se proporcionan con la idea de que el estudiante encuentre la semejanza que tienen las situaciones con otras que haya podido encontrar en problemas con números naturales.

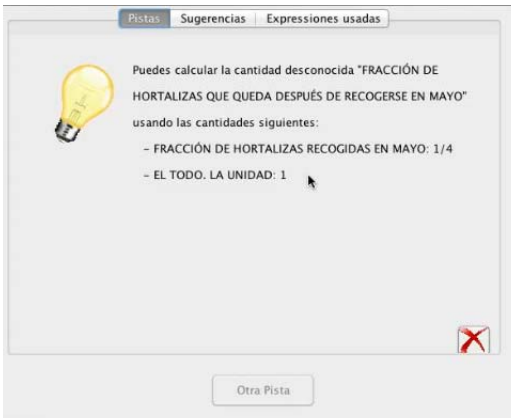

Figura 3

Cuando los resolutores introducen una operación incorrecta, el sistema genera un mensaje de error (Figura 4) que les indica en lenguaje verbal que la relación que han usado es incorrecta.

Una vez que los resolutores calculan una cantidad desconocida, ésta aparece a la derecha de la pantalla y, al mismo tiempo, se crea un nuevo botón junto a los de las cantidades que ya proporcionaba el problema (Figura 5).

Figura 4

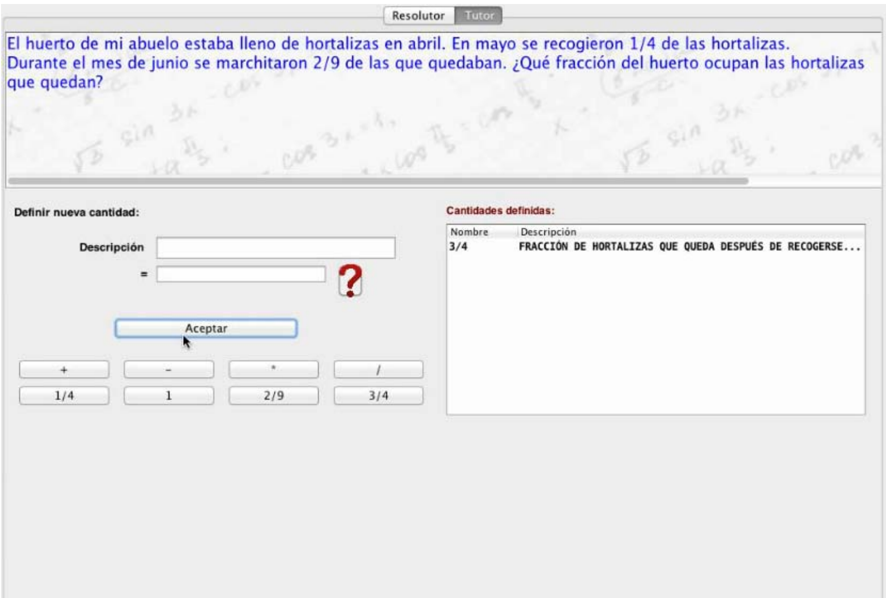

Figura 5

Al finalizar cada problema, aparece información con todas las cantidades desconocidas que se han ido calculando, donde se incluye la solución del problema. Además, en la parte derecha se puede consultar el número de cálculos incorrectos, las pistas utilizadas y una serie de puntuaciones que no se han tenido en cuenta en nuestra investigación (Figura 6).

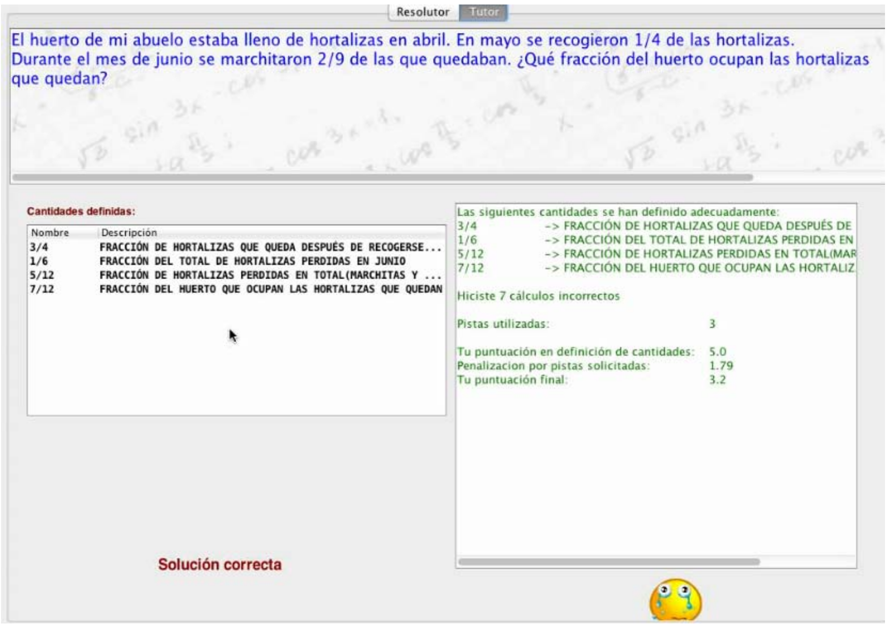

Figura 6

4.2. *Participantes.*

La población del estudio estaba formada por estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se trataba de una muestra de 42 estudiantes de un colegio privado localizado en la provincia de Valencia. Los alumnos formaban parte de dos grupos naturales con 20 y 22 sujetos, respectivamente. Todos los estudiantes habían sido instruidos a lo largo del curso en la resolución de problemas que contenían cantidades con valores en formato fraccionario. De manera aleatoria, los grupos naturales se identificaron como grupo experimental y grupo de control.

4.*3. Cuestionarios y secuencia de enseñanza.*

Para dar respuesta a los objetivos de la investigación se han realizado dos estudios: uno de carácter cuantitativo que pretendía analizar los efectos de la investigación; y otro de carácter cualitativo que pretendía describir las tendencias cognitivas y las decisiones que tomaban los estudiantes cuando resolvían problemas usando el STI.

Dentro del estudio cuantitativo, se diseñaron expresamente un pre-test y un post-test formados por diez problemas verbales que típicamente se resolvían de manera aritmética y que contenían datos en formato fraccionario (se ofrecen a continuación los problemas *El azúcar* y *El pantano* extraídos del pre-test). Los problemas se reelaboraron a partir de los que aparecían en los libros de texto del nivel educativo, modificando las cantidades y la situación de cada problema. También recurrimos a problemas empleados en la investigación de Morell (2012). En el estudio, no se llevó a cabo ninguna validación de los cuestionarios.

El azúcar. 3/4 de kilo de azúcar costaron 60 céntimos. ¿Cuánto cuesta el kilo?

El pantano. Un pantano estaba lleno en enero. En mayo se habían consumido 2/7 de su capacidad. Durante el mes de junio se consume 1/5 de lo que quedaba. ¿Qué fracción del pantano ocupa el agua que queda?

El pre-test se administró antes de la instrucción y el post-test al acabarla. En ambos casos los estudiantes utilizaron calculadoras científicas para realizar los cálculos si lo consideraban conveniente y fueron instruidos en los días anteriores en su uso para operar con fracciones. La instrucción consistió en la resolución de 16 problemas verbales, realizados en dos sesiones, con un estilo similar a los problemas realizados en el pre-test y resolviéndose de diferente manera en cada grupo. El grupo experimental los resolvió utilizando el STI mientras el grupo de control lo hizo en papel con ayuda de una calculadora científica.

El estudio de casos se realizó tras administrar el post-test y consistió en enfrentar a parejas de estudiantes a la resolución de problemas, usando el STI, que no habían sabido resolver en el post-test.

Esta configuración respondía a nuestra intención de analizar dificultades que encontraban durante la resolución con el STI.

Se decidió seleccionar cuatro parejas: dos formadas por estudiantes del grupo experimental y dos, por estudiantes del grupo de control. Las actuaciones fueron grabadas en vídeo y transcritas a diálogos escritos para su análisis posterior.

Resultados.

5.1. *El efecto de la intervención.*

Para observar cómo influye el uso de un STI en la competencia para la resolución de problemas verbales con fracciones, se han comparado los resultados obtenidos en el pre-test y el post-test por el grupo de control (los que no usaron el STI en la secuencia de enseñanza) y el grupo experimental (los que sí que usaron el STI en la secuencia de enseñanza).

Se codificó con un 0 los problemas resueltos de manera incorrecta y con un 1 los resueltos de manera correcta. Se tomó la decisión de considerar correctos los problemas con algún error aritmético, pero con una secuencia de operaciones adecuada.

Tabla 1. Resultados en el pre test y post test para los grupos de control y experimental.

Grupo	*N*	Pre [*M* (*SD*)]	Post [*M* (*SD*)]
Control	22	4.68 (2.30)	5.55 (2.09)
Experimental	20	4.10 (1.74)	5.35 (1.79)

En la Tabla 1 se observa que el grupo de control obtiene resultados ligeramente superiores a los del grupo experimental tanto en la prueba previa a la intervención como en la posterior. Sin embargo, vemos que el grupo experimental tiene un aumento del

30.49% respecto al resultado en el pre-test, mientras que el grupo de control sólo aumenta un 18.59%.

Para determinar el efecto de la secuencia de enseñanza en la competencia a la hora de resolver problemas llevamos a cabo cuatro pruebas t-Student para lo que previamente se comprobó la normalidad de las variables mediante pruebas de Kolmogorov- Smirnov. Mediante dos pruebas para datos pareados se comprobó que existían diferencias significativas entre los resultados del pre-test y el post-test tanto en el grupo de control ($t(21)=-2.780$; $p=0.011$) como en el grupo experimental ($t(19)=-3.206$; $p=0.005$). Esto implicaría que en ambos grupos la intervención había supuesto una evolución hacia puntuaciones mayores. Sin embargo dos prueba t para muestras independientes indicaron que no existían diferencias significativas entre las puntuaciones del grupo experimental y de control ni al principio ($t(40)=0.917$; $p=0.364$) ni tras la intervención ($t(40)=0.325$; $p=0.747$). Esto supondría que no se podía señalar que la intervención realizada en el grupo experimental supusiera una variación respecto a la aplicada en el grupo de control.

Por otro lado, el grupo de control mejoró en seis de los diez problemas planteados, obteniendo peores resultados en tres de ellos, mientras que el grupo experimental obtuvo mejores resultados en ocho de los diez problemas que componían el test, bajando su puntuación solamente en un problema.

5.2. *El efecto del uso de los nombres de las cantidades.*

Para analizar cómo influía en la resolución el hecho de que los estudiantes se refieran a las cantidades mediante sus valores o sus nombres se realizó un estudio de casos en el que participaron cuatro parejas. En la Tabla 2 se recoge el número de ocasiones en las que los estudiantes se refieren a las cantidades. En la columna “Nombres”, aparecen las veces que cada pareja se refiere a los nombres de las cantidades durante la verbalización de una relación en los tres problemas (por ejemplo, “el todo menos la fracción de hortalizas recogidas en mayo”); en la columna “Valores”, las veces que se refieren al valor numérico de las cantidades (por ejemplo, “un cuarto entre dos novenos”); y por último en la columna “Mixto” se recoge el número de ocasiones en las que los estudiantes combinan las anteriores, es decir, nombran o describen las cantidades u operaciones haciendo referencia a su nombre y a su valor (“el todo menos un sexto”). Además, en función del número de errores y de aciertos al intentar realizar un paso tras una verbalización, se ha medido la dificultad que cada pareja ha tenido al realizarlos (Tabla 2) como el porcentaje de errores sobre el de operaciones que se han introducido.

El análisis de los resultados nos lleva a concluir que no se observa relación entre la mayor o menor referencia a los nombres de las cantidades y la dificultad a la hora abordar los pasos de los problemas.

Tabla 2. Número de veces que cada pareja hace referencia a los nombres y/o valores de las cantidades y grado de dificultad.

	Nombres	Valores	Mixto	% Referencia a los nombres o mixto	Nº errores	Nº aciertos	Dificultad
Pareja 1	10	17	4	45,2%	17	8	68,0%
Pareja 2	6	12	6	50,0%	17	6	73,9%
Pareja 3	7	30	6	30,2%	15	8	65,2%
Pareja 4	4	15	1	25,0%	10	4	71,4%

Conclusiones.

Según los datos obtenidos en el pre test y post test se constata que la instrucción implicó una mejora significativa en los resultados tanto del grupo de control como del grupo experimental. En este caso, se pone de manifiesto que hacer trabajar a los estudiantes en la resolución de problemas, produce un cierto aprendizaje o recuerdo. Al comparar la evolución del grupo experimental respecto a la de control no se observan diferencias significativas. Sin embargo, los estudiantes que utilizaron el STI aumentaron su puntuación respecto a la del pre-test en mayor medida. Es decir, el porcentaje de aumento en la puntuación del post-test con respecto a la del pre-test es mayor en el grupo experimental que en el grupo de control.

El hecho de que el STI ofrezca realimentación con los nombres de las cantidades no parece que sea causa suficiente para apoyar la mejor evolución del grupo experimental entre pre y post. De hecho, no se observa ninguna relación entre la forma de verbalizar y el éxito a la hora de afrontar el paso que se está abordando.

Por otro lado se constata que en la mayoría de las ocasiones, los estudiantes se refieren a los valores numéricos de las cantidades durante la resolución de los problemas en lugar de hacer referencia a su nombre.

Referencias Bibliográficas.

Arnau, D., Arevalillo-Herraez, M., y Gonzalez-Calero, J.A. (2014). Emulating Human Supervision in an Intelligent Tutoring System for Arithmetical Problem Solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on*, *7*(2), 155-164.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational studies in Mathematics*, *15*(2), 129-147.

Bell, A., Swan, M., y Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 399-420.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3-21.

Gómez, B. (2011). Discontinuidad de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 41-65.

Morell, M. (2012). *Sobre problemas multiplicativos con números racionales en el aula de secundaria* (Trabajo de investigación no publicado). Universitat de València, Valencia, España.