

Metode Konjugat Gradien Hibrid Baru: Metode Hs-Cd untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi Tak Berkendala

T. Murdani Saputra

Universitas Syiah Kuala, tmurdanisaputra@unsyiah.ac.id

Bib Paruhum Silalahi

Institut Pertanian Bogor

Sugi Guritman

Institut Pertanian Bogor

ABSTRAK, Metode konjugat gradien adalah salah satu metode yang efektif dalam menyelesaikan permasalahan optimasi tak-berkendala dan metode ini juga termasuk salah satu metode iteratif. Pada tulisan ini, peneliti mengusulkan metode konjugat gradien hibrid baru yaitu metode new hybrid 4 yang merupakan gabungan antara metode Hestenes dan Stiefel – *ConjugateDescent*, dimana metode tersebut diusulkan berdasarkan ide dari metode yang telah diusulkan sebelumnya yaitu metode Polak, Ribière dan Polyak - Fletcher dan Reeves atau metode NH1, metode Hestenes dan Stiefel – Dai dan Yuan atau metode NH2 dan metode Liu dan Storey – *ConjugateDescent* (NH3). Peneliti mengusulkan metode tersebut dengan menggabungkan antara metode HS dan CD, dimana metode tersebut memiliki kekurangan masing-masing. Dalam penelitian ini, peneliti membandingkan hasil numerik antara metode baru yaitu Metode HS-CD (NH4) dengan metode-metode sebelumnya serta membuktikan bahwa memenuhi sifat konvergen global dan memenuhi kondisi *descent* setiap iterasinya. Hasil numerik menunjukkan bahwa metode baru adalah sangat efisien dalam menyelesaikan fungsi nonlinear tak-berkendala. Metode tersebut juga terbukti memenuhi sifat konvergen global menggunakan kondisi Wolfe serta memenuhi kondisi *descent* di setiap iterasinya..

Kata Kunci: metode konjugat gradien, arah descent, konvergen global

1. PENDAHULUAN

Metode konjugat gradien pertama kali diperkenalkan oleh Hestenes dan Stiefel pada tahun 1952 untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, berikut masalah optimasi tanpa kendala:

$$\min f(x), x \in R^n \quad (1.1)$$

dengan $f: R^n \rightarrow R$ merupakan fungsi turunan kontinu dan gradien dinotasikan g .

Persamaan (1.1) secara iteratif pada metode konjugat gradien dapat diselesaikan dengan menggunakan bentuk:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Dengan x_k adalah proses iteratif, α_k adalah ukuran langkah yang ditentukan dengan menggunakan *line search* dan d_k adalah pencarian arah. Untuk ukuran langkah α_k diperoleh dengan menggunakan *exact* atau *inexact line search* dimensi satu. Jika yang digunakan *exact line search* maka nilai α_k diperoleh dengan bentuk berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha d_k) \quad (1.3)$$

dan untuk kasus *inexact line search* yang digunakan mencari ukuran langkah α_k adalah kondisi armijo dan kondisi *curvature*, adapun kondisi sebagai berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \quad (1.4)$$

$$\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma \nabla f(x_k)^T d_k$$

dengan $0 < \delta < \sigma < 1$ [1]. Kondisi armijo dan kondisi *curvature* juga dikenal dengan kondisi Wolfe. Selain kondisi Wolfe, ada juga kondisi *strong Wolfe* yang digunakan untuk memperoleh ukuran langkah α_k dan bentuk kondisinya sebagai berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \quad (1.5)$$

$$\|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k\| \leq -\sigma \nabla f(x_k)^T d_k$$

dengan $0 < \delta < \sigma < 1$ [1]. Dalam penelitian ini yang digunakan untuk mencari ukuran langkah α_k adalah kondisi *strong Wolfe*. Pencarian arah d_k dalam metode konjugat gradien ini menggunakan aturan sebagai berikut:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & \text{untuk } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & \text{untuk } k > 0 \end{cases} \quad (1.6),$$

dengan g_k adalah gradien dari f di x_k , dan β_k merupakan skalar. Terdapat beberapa bentuk

skalar yang dikenal diantaranya adalah metode HS [2], metode FR [3], metode PRP [4, 5], metode CD[6], metode LS [7], Metode DY [8]. Adapun metode-metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{HS} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{d_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}, \beta_k^{FR} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{\|\mathbf{g}_{k-2}\|^2}, \beta_k^{PRP} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2}$$

$$\beta_k^{CD} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{d_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \beta_k^{LS} = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{d_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \beta_k^{DY} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{d_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}$$

dengan $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$ dan $\|\cdot\|$ merupakan norm vektor Euclid.

Metode–metode diatas memiliki kelebihan dan kekurangan pada proses kinerja komputasi dan kekonvergenan global. Metode PRP, metode HS dan metode LS merupakan metode yang kinerja komputasinya lebih baik, namun pada sifat konvergensi global tidak terpenuhi untuk algoritmanya. Disisi lain, metode Fletcher-Reeves (FR), metode Conjugate Descent (CD) dan metode Dai-Yuan (DY) mempunyai sifat konvergensi yang tercapai pada algoritmanya, tetapi kinerja komputasinya kurang efisien. Beberapa metode digabungkan untuk memperoleh hasil optimasi lebih baik dan memenuhi sifat konvergensi global.

Zhang dan Zhou mengusulkan dua metode konjugat gradien hibrid baru, yang dikenal dengan metode NH1 dan metode NH2 [9]. Metode NH1 diusulkan dari pergantian bentuk FR pada metode MFR [10] digantikan dengan bentuk metode hibrid PRP-FR atau metode H1 [11]. Adapun metode NH1 sebagai berikut:

$$\beta_k^{H1} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{PRP}, \beta_k^{FR} \} \} \quad (1.7)$$

MFR:

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{FR} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left(1 + \beta_k^{FR} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{FR} d_{k-1}, \quad (1.8)$$

dengan menggantikan β_k^{FR} (1.8) dengan β_k^{H1} (1.7) sehingga diperoleh:

NH1:

$$d_k = -\left(1 + \beta_k^{H1} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H1} d_{k-1} \quad (1.9)$$

Hal yang sama juga dilakukan untuk metode NH2. Metode NH2 diusulkan dari pergantian bentuk DY dalam metode MDY [12] digantikan dengan bentuk metode hibrid HS-DY atau metode H2 [13]. Adapun metode NH2 sebagai berikut:

$$\beta_k^{H2} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{DY} \} \} \quad (1.10)$$

MDY:

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left(1 + \beta_k^{DY} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} \quad (1.11)$$

dengan menggantikan β_k^{DY} (1.11) dengan β_k^{H2} (1.10) sehingga diperoleh:

NH2:

$$d_k = -\left(1 + \beta_k^{H2} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H2} d_{k-1} \quad (1.12)$$

Hal yang sama juga dilakukan oleh [14] dengan mengusulkan metode baru metode konjugat gradien yaitu metode hibrid LS-CD, MCD dan NH3 [14]. Adapun metode NH3 diperoleh sebagai berikut:

$$\beta_k^{H3} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{LS}, \beta_k^{CD} \} \} \quad (1.13)$$

MCD :

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{CD} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left(1 + \beta_k^{CD} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{CD} d_{k-1} \quad (1.14)$$

dengan menggantikan β_k^{CD} (1.14) dengan β_k^{H3} (1.13) sehingga diperoleh:

NH3:

$$d_k = -\left(1 + \beta_k^{H3} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H3} d_{k-1} \quad (1.15)$$

Metode – metode (MFR, MDY, NH1 dan NH2) memenuhi $\mathbf{g}_k^T d_k = -\|\mathbf{g}_k\|^2$, maka metode tersebut merupakan metode *descent* dan metode tersebut bebas menggunakan *line search*. Menunjukkan proses yang efisien dalam komputasi sangat efisiensi kedua metode

tersebut dibuktikan serta memenuhi sifat kekonvergenan global.

Sedangkan untuk metode MCD dan metode NH3 juga memenuhi $g_k^T d_k = -\|g_k\|^2$, dimana metode-metode tersebut memenuhi kondisi descent. Metode menunjukkan bahwa ketiga metode tersebut efisien dalam proses komputasi dan membuktikan metode-metode tersebut memenuhi sifat kekonvergenan global.

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan cara mendapatkan metode konjugat gradien yang dilakukan oleh [10] serta [14]. [10] menggunakan metode H2 [8] dan metode MDY [10] untuk mengusulkan metode NH2 dan [14] juga melakukan hal yang sama yaitu mengusulkan 3 metode baru metode H3, metode MCD dan metode NH3. Berdasarkan metode yang diusulkan oleh [10] serta [14], maka dalam penelitian ini diusulkan metode konjugat gradien hibrid baru yaitu metode H4, metode NH4. Adapun modifikasi metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{H4} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{CD} \} \} \quad (1.16)$$

dimana metode H4 merupakan metode hibrid HS-CD.

Berdasarkan bentuk metode MCD, maka metode baru yang diusulkan sebagai berikut:

$$NH4: d_k = - \left(1 + \beta_k^{H4} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H4} d_{k-1} \quad (1.17)$$

dan bentuk (1.18) memenuhi persamaan

$$g_k^T d_k = -\|g_k\|^2, \quad (1.18)$$

dimana metode NH4 memenuhi kondisi descent.

2. ALGORITMA DAN KONVERGEN GLOBAL

Algoritma Metode NH4

Langkah 0: Diberikan titik awal $x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon \leq 1, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ dan $\delta < \sigma < 1$.
Tetapkan $d_0 = -g_0, k := 0$.

Langkah 1: Jika $\|g_k\| < \varepsilon$, berhenti; lanjut ke langkah berikutnya.

Langkah 2: Hitung ukuran langkah α_k menggunakan kondisi Wolfe (1.4).

Langkah 3: Misalkan $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. Jika $\|g_{k+1}\| < \varepsilon$, maka stop.

Langkah 4: Hitung pencarian arah d_k (1.17).

Langkah 5: Beri nilai $k = k + 1$, dan kembali ke langkah 2.

Analisis kekonvergenan global metode hibrid baru

Asumsi A

Untuk menganalisis kekonvergenan metode NH4 diperlukan beberapa asumsi dasar, berikut asumsinya:

1. Fungsi f terbatas di bawah level set $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\}$ terbatas; x_1 adalah titik awal.
2. Gradien dari fungsi objektif memenuhi kontinu Lipschitz, yaitu terdapat $L > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in \Omega$ berlaku $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$.

Berdasarkan asumsi 1 dan 2 pada fungsi f , maka asumsi di atas diperlukan untuk pembuktian lemma berikut ini:

Lemma 2.1 Andaikan asumsi A berlaku. Berdasarkan bentuk $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ dan persamaan (1.6), dimana d_k memenuhi kondisi descent dan α_k merupakan ukuran langkah yang ditentukan dengan menggunakan kondisi Wolfe(1.4), maka:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty \quad (2.1)$$

Dari lemma 2.1 dan (1.18) untuk metode NH4 menggunakan kondisi Wolfe(1.4), maka secara mudah diperoleh;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|g_k\|^4}{\|d_k\|^2} < +\infty.$$

Lemma 2.2 Misalkan $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ dihasilkan oleh algoritma 1, maka pencarian arah d_k (1.17) memenuhi kondisi descent

$$d_k^T g_k = -\|g_k\|^2, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.2)$$

Bukti:

misalkan $\beta_k^{H4} = \beta_k^*$, $\theta_k = (1 + \beta_k^* \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2})$ untuk

$$d_0 = -g_0$$

$$\begin{aligned} g_0^T d_0 &= -g_0^T g_0 \\ &= -\|g_0\|^2 \end{aligned}$$

jadi, diperoleh untuk $k = 0$

untuk $k \geq 1$, sehingga

$$d_k = -\theta_k g_k + \beta_k^* d_{k-1},$$

untuk $\beta_k^{H4} = \beta_k^*$

$$\begin{aligned} d_k &= -(1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k + \beta_k^* d_{k-1} \\ &= \beta_k^* d_{k-1} - (1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k \end{aligned}$$

kalikan kedua ruas dengan g_k^T , sehingga

$$\begin{aligned} g_k^T d_k &= \beta_k^* g_k^T d_{k-1} - (1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k^T g_k \\ &= \beta_k^* g_k^T d_{k-1} - \|g_k\|^2 - \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2} \|g_k\|^2 \\ g_k^T d_k &= -\|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk semua $k \geq 1$ arah pencarian d_k menurun (*descent*).

Konvergen global metode NH4

Teorema 1 Misalkan asumsi A berlaku dan $\{x_k\}$, d_k dihasilkan dari metode NH4. Jika ukuran langkah α_k ditentukan dengan kondisi Wolfe(1.4) maka:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \tag{2.3}$$

Bukti:

Menggunakan pembuktian kontradiksi. Andaikan (2.3) tidak terpenuhi, maka ada konstanta $\varepsilon > 0$ yang mana:

$$\|g_k\| \geq \varepsilon \forall k. \tag{2.4}$$

$$\beta_k^{H4} g_k^T d_{k-1} = h_k \|g_k\|^2 - \|g_k\|^2, \tag{2.5}$$

dimana $h_k = 1 + \beta_k^{H4} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}$

dari bentuk (1.17) dan mengkuadratkan kedua ruas, sehingga:

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 &= \|\beta_k^{H4} d_{k-1} - h_k g_k\|^2 \\ &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2h_k \beta_k^{H4} d_{k-1}^T g_k + h_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan mensubstitusi bentuk (2.5) ke persamaan (2.6), sehingga didapat:

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2h_k (h_k \|g_k\|^2 - \|g_k\|^2) \\ &\quad + h_k^2 \|g_k\|^2 \\ \|d_k\|^2 &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 + 2h_k \|g_k\|^2 - h_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

bagi kedua ruas persamaan (2.7) dengan $(g_k^T d_k)^2$

dan substitusi $g_k^T d_k = -\|g_k\|^2$ sehingga:

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} = (\beta_k^{H4})^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \tag{2.8}$$

karena $0 < \beta_k^{H4} < \beta_k^{CD}$ dan definisi $\beta_k^{CD} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}$

sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} &\leq (\beta_k^{CD})^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &= \left(\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2} \right)^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &\quad - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} - \frac{1}{\|g_k\|^2} (h_k^2 + 2h_k + 1 - 1) \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} - \frac{(h_k + 1)^2}{\|g_k\|^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \\ &\leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

dari lemma 2.2 dimana $g_0^T d_0 = -\|g_0\|^2$ untuk $k = 0$

$$\frac{\|d_1\|^2}{(g_1^T d_1)^2} \leq \frac{\|d_0\|^2}{(g_0^T d_0)^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} = \sum_{i=0}^1 \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.10}$$

$$\frac{\|d_2\|^2}{(g_2^T d_2)^2} \leq \frac{\|d_1\|^2}{(g_1^T d_1)^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2}$$

$$\leq \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2}$$

$$= \sum_{i=0}^2 \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.11}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2}$$

$$\leq \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2} + \dots + \frac{1}{\|g_k\|^2}$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.12}$$

jadi

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.13}$$

diketahui $\|g_k\| \geq \varepsilon$ maka

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \leq \frac{k+1}{\varepsilon^2} \tag{2.14}$$

dari persamaan terakhir berimplikasi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} \geq \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \pm\infty \tag{2.15}$$

kontradiksi dengan (2.1) sehingga $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$ terbukti.

3. PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan dilakukan perbandingan hasil numerik antara metode konjugat gradien hibrid yaitu metode NH1, metode NH2, metode NH3, metode NH4. Ada beberapa parameter yang digunakan untuk mencari hasil numerik, diantaranya yaitu: batas toleransi perhentian ε , konstanta pada kondisi

Wolfe yaitu konstanta μ, δ dan ukuran langkah α_k . Untuk batas toleransi dipakai $\varepsilon = 10^{-6}$, konstanta $\mu = 0.3, \delta = 0.8$ dan untuk ukuran langkah α_k diperoleh dengan menggunakan kondisi Wolfe. Semua parameter digunakan pada algoritma metode NH4.

Hasil numerik yang telah diperoleh pada proses komputasi digabungkan menggunakan hasil profil yang dijelaskan oleh Dolan dan Moré [15], dan untuk fungsi yang diujikan menggunakan fungsi non linear tak berkendala dalam artikel [16]. Hasil profil disajikan dalam diilustrasikan pada gambar 1 dan 2,. Gambar 1 dan 2 masing-masing merupakan hasil profil iterasi dan *runningtime*.

Adapun hasil pada gambar 1 dan 2 diperoleh dengan cara berikut sebagai berikut:

$$r_{p,m} = \frac{a_{p,m}}{\min\{a_{p,m} : m \in M\}},$$

dengan $r_{p,m}$ merupakan hasil ratio, $P = \{p1, p2, \dots, p30\}$, $M = \{m1, m2, m3, m4\}$, $a_{p,m}$ adalah hasil iterasi dan *running time*. Apabila metode m tidak menyelesaikan fungsi p maka $r_{p,m} = r_M$, dimana diasumsikan parameter $r_M \geq r_{p,m}$ untuk semua p, m . Secara keseluruhan hasil profil dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$P_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{p \in P : \log_2\{r_{p,m}\} \leq \tau\},$$

dengan $P_s(\tau)$ adalah peluang untuk metode $m \in M$ dimana hasil ratio $r_{p,m}$ kurang dari faktor $\tau \in R$ dari kemungkinan ratio terbaik dan n_p adalah banyaknya fungsi. Fungsi $P_s(\tau)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif untuk hasil ratio. Nilai $P_s(1)$ merupakan peluang dimana metode yang diujikan akan lebih baik apabila mencapai angka 1. Hasil dari komputasi tersebut menggunakan bantuan software matematika. Berikut ini merupakan hasil numerik disajikan dalam tabel 1 dan 2 beserta hasil profil yang disajikan dalam gambar 1 dan 2.

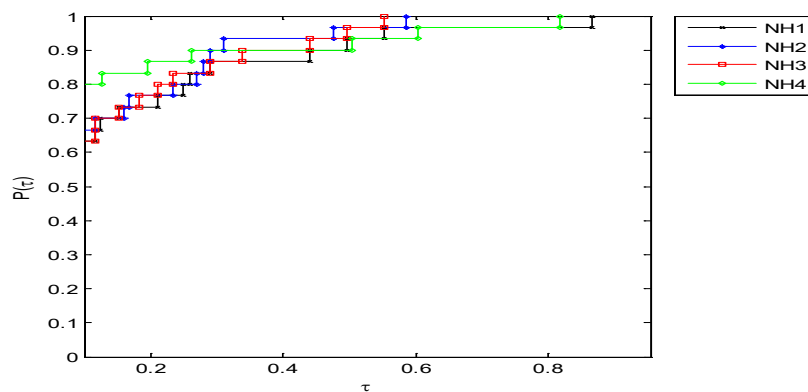
Tabel 1 Hasil iterasi dari beberapa metode konjugat gradien hibrid

Fungsi	Dimensi	NH1	NH2	NH3	NH4
Rosenbrock	10	195	249	179	254
	100	1006	1016	1043	962
	1000	8526	8695	8548	8282
White & Holst	10	228	279	259	261
	50	1021	1000	968	962
Quadratic Penalty (QP1)	100	15	16	15	15
	1000	8	12	8	8
SINCOS	50	17	20	17	18
	100	24	19	24	17
	1000	22	15	22	18
Beale	2	25	31	25	38
	5	239	159	131	231
Tridiagonal 1	50	10	9	10	9
	100	9	9	9	9
	1000	7	7	7	7
Hager	50	13	12	13	12
	100	16	15	16	15
Freudenstein & Roth	50	19	14	19	14
	100	14	14	14	14
Powell	4	22	18	22	18
	100	22	22	22	24
Wood	4	22	19	22	20
Tridiagonal 2	50	7	7	7	7
	100	6	6	6	6
	1000	4	4	4	4
Himmelblau	50	14	15	14	15
	100	14	14	14	14
	1000	12	13	12	12
Maratos	50	190	193	188	160
	1000	194	182	205	162

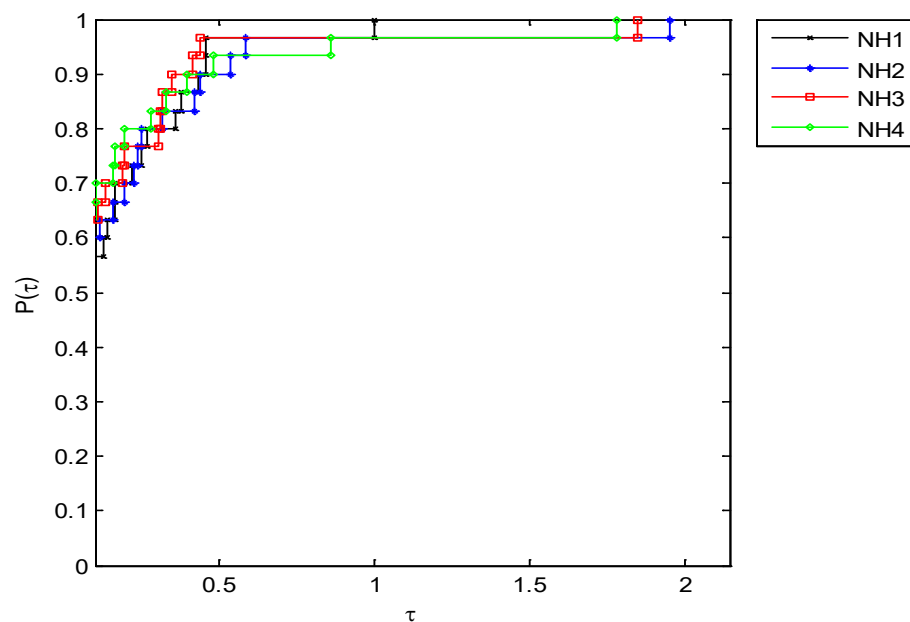
Tabel 2 Hasil *running time* dari beberapa metode konjugat gradien hibrid

Fungsi	Dimensi	NH1	NH2	NH3	NH4
Rosenbrock	10	0.5059	0.4928	0.3677	0.4846
	100	2.2064	2.3523	2.3039	2.2378
	1000	61.8401	49.9178	48.3147	48.1698

Fungsi	Dimensi	NH1	NH2	NH3	NH4
White & Host	10	0.4784	0.5697	0.5479	0.6003
	50	2.6718	2.3866	2.4005	2.4171
Quadratic Penalty QP1	100	0.2020	0.2313	0.2173	0.1980
	1000	1.2456	1.7764	1.2274	1.2235
SINCOS	50	0.1627	0.1843	0.1477	0.1691
	100	0.3731	0.3576	0.3968	0.3202
	1000	6.4374	4.7629	6.4625	5.7778
Beale	2	0.1256	0.1881	0.1599	0.1751
	5	0.7751	0.5236	0.3867	0.7020
Tridiagonal 1	50	0.1064	0.0948	0.1173	0.1017
	100	0.1684	0.1680	0.1621	0.1655
	1000	1.8216	1.8522	1.8415	1.8486
Hager	50	0.1382	0.1266	0.1276	0.1287
	100	0.2583	0.2479	0.2656	0.2501
Freudenstein & Roth	50	0.2915	0.2244	0.2994	0.2363
	100	0.5288	0.5172	0.4994	0.5070
Powell	4	0.0836	0.3233	0.3012	0.2878
	100	0.7215	0.7505	0.7590	0.8080
Wood	4	0.1110	0.0812	0.0860	0.0808
Tridiagonal 2	50	0.0692	0.0713	0.0669	0.0747
	100	0.0967	0.1025	0.1011	0.0998
	1000	0.7242	0.7448	0.7199	0.7288
Himmelblau	50	0.1290	0.1254	0.1352	0.1345
	100	0.1969	0.2048	0.2099	0.2043
	1000	2.1447	2.3184	2.1463	2.1457
Maratos	50	1.3843	1.3585	1.3100	1.1502
	1000	30.0175	28.9140	31.4673	25.2619



Gambar 1 Hasil profil iterasi metode NH1, NH2, NH3 dan NH4



Gambar 2 Hasil profil *running time* metode NH1, NH2, NH3 dan NH4.

Hasil numerik pada gambar 1 dan 2 metode NH4 menunjukkan hasil yang efisien dalam menyelesaikan semua fungsi. Metode NH4 termasuk metode yang dapat bersaing dengan metode yang lain, dikarenakan metode NH4 diusulkan berasal dari ide metode sebelumnya. Dan juga menggunakan pencarian arah yang sama yaitu *inexact line search*.

4. KESIMPULAN

Peneliti mengusulkan satu metode hibrid baru yaitu metode NH4, dimana metode tersebut dapat dibuktikan memenuhi sifat-sifat kekonvergenan global dengan menggunakan kondisi Wolfe dan termasuk metode *descent*. Pada hasil numerik menunjukkan bahwa metode NH4 bisa bersaing dengan beberapa metode terdahulu yang hasilnya disajikan pada gambar 1 dan 2. Metode NH4 juga menunjukkan bahwa efisien dalam menyelesaikan semua fungsi nonlinear yang diujikan.

5. 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nocedal J, Wright SJ. 1999. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag.
- [2] Hestenes MR, Stiefel EL. Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear System. *Journal of Research of the National Bureau of Standart*. 1952; 49(6): 409-432.
- [3] Fletcher R. Reeves C. 1964. Function Minimazation by Conjugate Gradient. *The Computer Journal*, 7:149 – 154.
- [4] Polak B, Ribière G. 1969. Note Surla Convergence des Méthodes de Directions Conjuguées. *Francaise Informat Recherche Opertionelle*, 16:35-43.
- [5] Polyak BT. 1969. The Conjugate Gradient Method in Extreme Problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4): 94-112.
- [6] Fletcher R, 1987. *Practical Methods of Optimization, Unconstrained Optimization*. New York: Wiley.
- [7] Liu YL, Storey CS. 1991. Efficient Generalized Conjugate Gradient Algorithms, Part 1: Theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(1):129-137.

- [8] Dai YH, Yuan Y. 1999. A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property. *SIAM Journal on Optimization*, 10: 177-182.
- [9] Zhang L, Zhou W. 2007. Two Descent Hybrid Conjugate Method for Optimazation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216:251-264.doi: 10.1016/j.cam.2007. 04.028.
- [10]Zhang L, Zhou W, Li D. 2006. Global convergence of a modified Fletcher-Reeves conjugate method with Armijo-type line search, *Numerische Mathematik*, 104: 561–572.doi: 10.1007/s00211-006-0028-z.
- [11]Touati-Ahmed D, Storey C. 1990. Efficient Hybrid Conjugate Gradient Techniques: *Journal of Optimization Theory and Applications*, 64(2): 379–397.
- [12]Zhang L. 2006. Nonlinear Conjugate Gradient Methods for Optimization Problems. Ph. D *Thesis*. Hunan University.
- [13]Dai YH, Yuan Y. 2001. An Efficient Hybrid Conjugate Gradient Method for Unconstrained Optimization. *Annal of Operation Research*, 103:33 – 47.
- [14]Zhou A, Zhu Z, Fan H, Qing Q. 2011. Three New Hybrid Conjugate Gradient Method for Optimazation. *Applied Mathematics*, 2:303-308.doi: 10.4236/am.2011.23035.
- [15]Dolan JED, Morè JJ. 2002. Benchmarking Optimization Software with Performance Profil. *Mathematical Programming*. 912(2): 201-213.doi: 10.1007/s101070100263.
- [16]Andrei N. 2008. An Unconstrained Optimization Test Function Collection. *Advanced Modelling and Optimization*, 10(1): 147-161