

Axiális erővel terhelt hajlított-nyírt rudak deformációjának számítása

The determination of the deformation of beams with axial and transverse loads

Dr. ECSEDI István *professor emeritus*¹, Dr. BAKSA Attila *egyetemi docens*²,
Dr. LENGYEL Ákos *József adjunktus*³

¹Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechecs@uni-miskolc.hu

²Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechab@uni-miskolc.hu

³Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechlen@uni-miskolc.hu

Kivonat

A tanulmány tárgyát axiális erővel is terhelt állandó keresztmetszetű hajlított-nyírt rudak statikai feladatainak analitikus megoldására alkalmas módszer alkotja. A kidolgozott analitikus eljárás az Euler-Bernoulli rúdelmélet kinematikáján, valamint a rúd deformációjának figyelembevételével felírt egyensúlyi egyenleteken alapul. A tanulmány a probléma megoldását alkalmasan megválasztott alapmegoldások lineáris kombinációjával állítja elő. A kidolgozott módszer alkalmazását több példa szemlélteti.

Kulcsszavak: Euler-Bernoulli rúd, axiális erő, kritikus nyomóerő, lehajlás

Abstract

The object of this paper is the determination of the deformation of beams under the simultaneous actions of axial and transverse loads. The derivation of the governing equations uses the Euler-Bernoulli beam theory and the second order forms of equilibrium equations. The determination of the analytical solutions of the considered problems is based on so called fundamental solutions. Linear combination of the fundamental solutions which are filling to the given loading and boundary conditions gives the total solution. Two examples illustrate the applications of the presented analytical method.

1. BEVEZETÉS

A tanulmány egy analitikus megoldást ismertet az állandó keresztmetszetű axiális erővel is terhelt hajlított-nyírt rudak néhány statikai feladatára. A mechanikai modell az Euler-Bernoulli rúdelmélet kinematikai egyenleteit használja, továbbá az alkalmazott nyomatéki egyensúlyi egyenlet tartalmazza a nyomott rúd deformációját is (másodrendű elmélet). A kitűzött statikai feladatok megoldásához úgynevezett alapmegoldások alkalmas lineáris kombinációjával jutunk el. Az alapmegoldások kielégítik az axiális erővel is terhelt hajlított-nyírt rudakra vonatkozó rugalmasságtani egyenleteket, nevezetesen a geometriai, egyensúlyi és anyag egyenleteket, továbbá speciális kezdeti feltételeknek tesznek elég. Az általunk megoldott feladatok megoldása öt alapmegoldást igényel. Ezeket a következő kezdeti feltételek és terhelési előírások határozzák meg:

$$1. \quad v_1(0) = 1, \psi_1(0) = 0, M_1(0) = 0, T_1(0) = 0, f = 0, \quad (1)$$

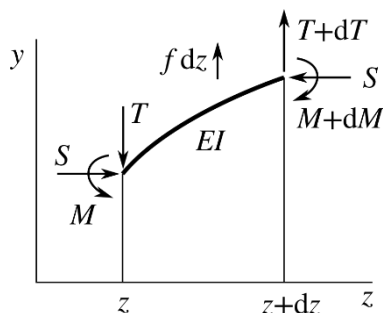
$$2. \quad v_2(0) = 0, \psi_2(0) = 1, M_2(0) = 0, T_2(0) = 0, f = 0, \quad (2)$$

$$3. \quad v_3(0) = 0, \psi_3(0) = 0, M_3(0) = 1, T_3(0) = 0, f = 0, \quad (3)$$

$$4. \quad v_4(0) = 0, \psi_4(0) = 0, M_4(0) = 0, T_4(0) = 1, f = 0, \quad (4)$$

$$5. \quad v_5(0) = 0, \psi_5(0) = 0, M_5(0) = 0, T_5(0) = 0, f = 1, \quad (5)$$

A fenti egyenletekben (1. ábra) $v = v(z)$ lehajlás függvény, $\psi = \psi(z)$ keresztmetszet szögelfordulása, $M = M(z)$ hajlító nyomaték, $T = T(z)$ függőleges komponense a keresztmetszetet terhelő belső erőrendszernek, f az y irányban alkalmazott megoszló terhelés.



1. ábra Az S axiális erővel terhelt rúdelem egyensúlya

Feltételezve, hogy a rúd hossza mentén $S = \text{áll.}$, a $v_i = v_i(z)$, $\psi_i = \psi_i(z)$, $M_i = M_i(z)$, $T_i = T_i(z)$, ($i = 1, \dots, 5$) alpmegoldások számítása az alábbi egyenletek felhasználásával történik [1,2]:

$$\frac{dT}{dz} + f = 0, \quad \frac{dM}{dz} - S \frac{dv}{dz} - T = 0, \quad (6)$$

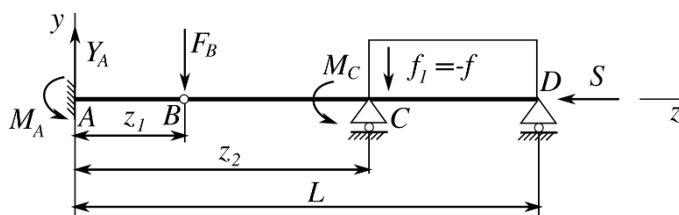
$$\psi = -\frac{dv}{dz}, \quad M = EI \frac{d\psi}{dz}. \quad (7)$$

Itt E a rúd anyagának rugalmassági modulusa, I a keresztmetszetnek az x súlyponti főtengelyére számolt másodrendű nyomatéka, továbbá az yz sík a rúd szimmetria síkja, amely tartalmazza az alkalmazott megtámasztási kényszereket és egyben az alkalmazott síkbeli terhelés síkja is.

2. PÉLDÁK

2.1 Példa adott terhelésű hajlított-nyírt tartó deformációjának és igénybevételeinek számítására

A 2. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező rugalmas anyagú rudat.



2. ábra Állandó nyomóerővel és függőleges irányú erőrendszerrel terhelt rúd.

A feladat numerikus megoldása az alábbi adatokkal történt:

$$E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \quad I = 8,5333 \times 10^5 \text{ mm}^4, \quad z_1 = 700 \text{ mm}, \quad z_2 = 1300 \text{ mm},$$

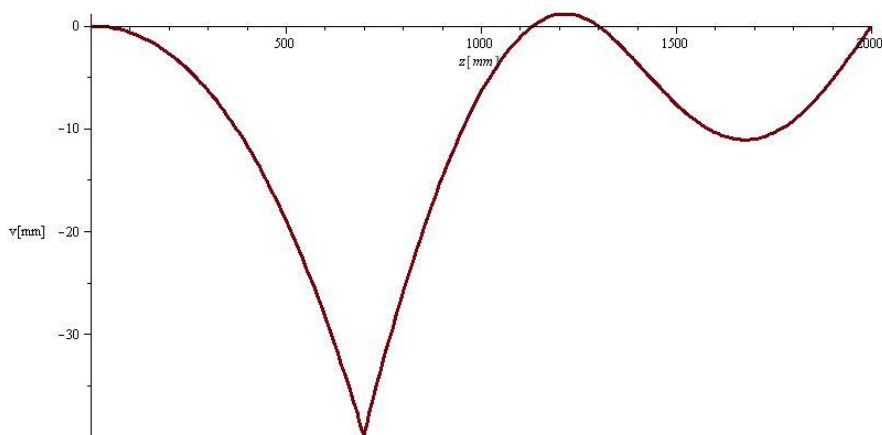
$$L = 2000 \text{ mm}, \quad F_B = 1000 \text{ N}, \quad f = 1000 \text{ N/m}, \quad M_C = 2000 \text{ Nmm}, \quad S = 2 \times 10^5 \text{ N}.$$

A 3. ábra a lehajlás függvényt, a 4. ábra pedig a hajlító nyomaték függvényt szemlélteti a z axiális koordináta függvényeként. A lehajlás függvény az alpmegoldások ismeretében a

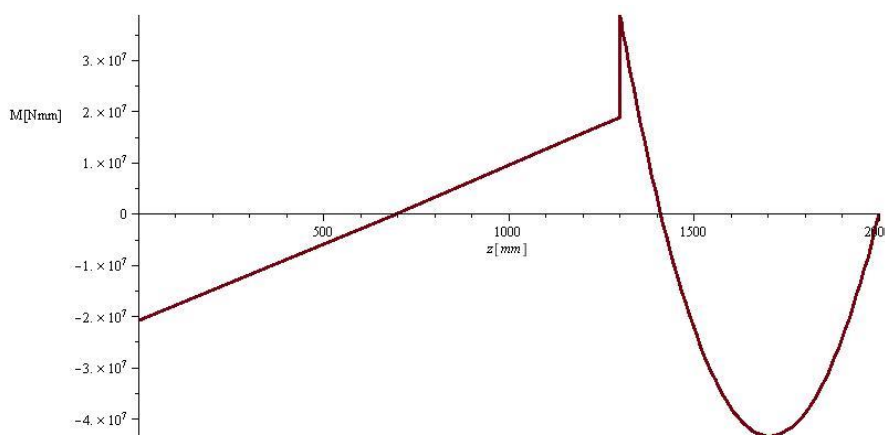
$$v(z) = M_A v_3(z) + Y_A v_4(z) + F_B H(z - z_1) v_4(z - z_1) + M_C H(z - z_2) v_4(z - z_2) + Y_C H(z - z_2) v_4(z - z_2) + f_1 H(z - z_2) v_5(z - z_2) + \mathcal{G}_B H(z - z_1) v_2(z - z_1) \quad (8)$$

egyenletből számítható ahol $H = H(z)$ a Heaviside függvény. Az ismeretlen M_A , Y_A , \mathcal{G}_B , Y_C állandók az alábbi egyenletekből számíthatók.

$$M(z_1) = 0, \quad v(z_2) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(L) = 0. \quad (9)$$



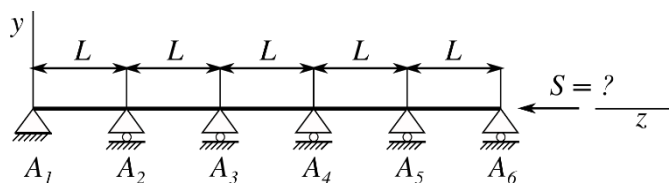
3. ábra Lehajlás függvény



4. ábra Hajlító nyomatéki függvény

2.2 Kritikus teher számítása

Az 5. ábra egy hat támaszú állandó keresztmetszetű hosszú nyomott rudat szemléltet. Feladat az S erő kritikus értékének meghatározása, amely a nyomott rúd stabilitás vesztesét okozza. A következő adatokhoz tartozó kritikus terhelés számítását végeztük el.



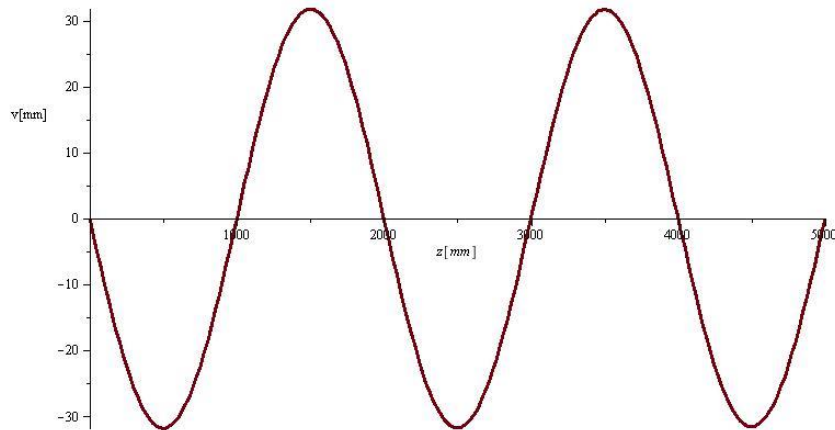
5. ábra Példa kritikus nyomóerő számítására

$$E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \quad I = 8,5333 \times 10^5 \text{ mm}^4, \quad L = 1000 \text{ mm}.$$

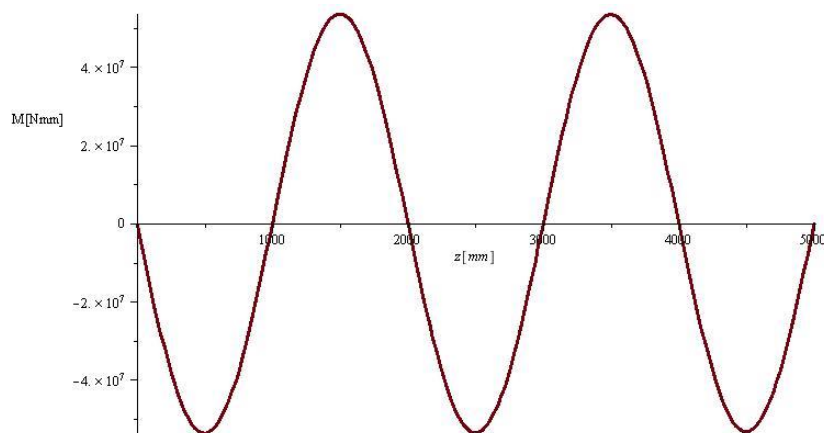
A részletes számítás az alábbi eredményre vezetett.

$$S = 1,685 \times 10^5 \text{ N}. \quad (10)$$

Az S_{krit} -hoz tartozó kihajlási alakot a 6. ábra, a 7. ábra pedig a hajlító nyomaték amplitudóját szemlélteti, feltéve, hogy az A_1 keresztmetszet szögelfordulása $\psi(0) = 0,1$ rad.



6. ábra Kihajlási alak függvény

7. ábra Az S_{krit} -hoz tartozó hajlító nyomatéki alak függvény

3. KÖVETKEZTETÉSEK

A dolgozat állandó axiális erővel terhelt hajlított-nyírt rudak statikai feladatainak megoldására egy analitikus módszer ismertet, amely úgynevezett alapmegoldások használatán alapul. Az alapmegoldások előállításához minimális matematikai ismereteket igényel. Két példa szemlélteti a kidolgozott analitikus módszer alkalmazását.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Giandomenico Toniolo: Introduction to the frame analyses. First and second order analyses. Springer, Berlin, 2019.
- [2] Stephan P. Timoshenko, James M. Gere: Theory of elastic stability. Dover Publications, INC, New York, 2009.
- [3] John D. Renton: Elastic beam and frames. Camford Books, Oxford, 1999.
- [4] Nicholas John Hoff: The analysis of structures. John Wiley & Sons, New York, 1956.