

Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов

УДК 621.391, 519.67

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2020-23-2-26-37>

Построение минимаксных ансамблей аperiodических кодов Голда

В. Ю. Зубарев¹, Б. В. Пономаренко^{1✉}, Е. Г. Шанин¹, А. Г. Вострецов^{2,3}

¹АО "Навигатор", Санкт-Петербург, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

³Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия

✉ irk@navigat.ru

Аннотация

Введение. В системах цифровой связи широко применяются сигналы, построенные на основе ансамблей кодовых последовательностей. При разработке этих систем наибольшее внимание уделяется анализу, синтезу и реализации ансамблей периодических сигналов. Разработаны и используются теоретические методики синтеза ансамблей периодических сигналов. Значительно меньше результатов получено в области построения ансамблей аperiodических сигналов с заданными корреляционными свойствами. Теоретические методики синтеза таких ансамблей сигналов практически отсутствуют.

Цель работы. Построение минимаксных ансамблей аperiodических кодов Голда, которые обладают одним из лучших среди известных бинарных кодов соотношением длины кодов и объема ансамбля.

Материалы и методы. Для построения минимаксного ансамбля используется направленный перебор и метод дискретного выбора лучшего ансамбля на основе безусловного критерия предпочтения.

Результаты. В статье описан алгоритм формирования полных и неполных минимаксных ансамблей аperiodических кодов Голда с заданными длиной и объемом ансамбля. Приведены параметры и вид авто- и взаимно корреляционных функций для ряда полученных ансамблей. Выполнено сравнение результатов статьи с известными результатами для ансамблей периодических кодов Голда в части роста минимаксных значений корреляционных функций в зависимости от длины кодов и объема ансамблей.

Заключение. Разработанные алгоритмы, в отличие от известных, позволяют конструировать как полные ансамбли, так и ансамбли, учитывающие ограничение их объема. Кроме того, данные алгоритмы могут быть распространены на задачи построения ансамблей из других семейств, например собранных из кодовых последовательностей, принадлежащих различным семействам.

Ключевые слова: аperiodические последовательности Голда, минимаксные ансамбли

Для цитирования: Зубарев В. Ю., Пономаренко Б. В., Шанин Е. Г., Вострецов А. Г. Построение минимаксных ансамблей аperiodических кодов Голда // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2020. Т. 23, № 2. С. 26–37. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-2-26-37

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 01.11.2019; принята к публикации после рецензирования 13.03.2020; опубликована онлайн 29.04.2020



Formation of Minimax Ensembles of Aperiodic Gold Codes

Vladimir Yu. Zubarev¹, Boris V. Ponomarenko^{1✉}, Evgeniy G. Shanin¹, Aleksey G. Vostretsov^{2,3}

¹Navigator Company, St Petersburg, Russia

²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

³Chinakal Institute of Mining of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

✉irk@navigat.ru

Abstract

Introduction. Signals constructed on the basis of ensembles of code sequences are widely used in digital communication systems. During development of such systems, the most attention is paid to analysis, synthesis and implementation of periodic signal ensembles. Theoretic methods for synthesis of periodic signal ensembles are developed and are in use. Considerably fewer results are received regarding construction of aperiodic signal ensembles with given properties. Theoretical methods for synthesis of such ensembles are practically nonexistent.

Aim. To construct aperiodic Gold code ensembles with the best ratios of code length to ensemble volume among the most known binary codes.

Materials and methods. Methods of directed search and discrete choice of the best ensemble based on unconditional preference criteria are used.

Results. Full and truncated aperiodic Gold code ensembles with given length and ensemble volume were constructed. Parameters and shape of auto- and mutual correlation functions were shown for a number of constructed ensembles. Comparison of the paper results with known results for periodic Gold code ensembles has been conducted regarding growth of minimax correlation function values depending on code length and ensemble volume.

Conclusion. The developed algorithms, unlike the known ones, make it possible to form both complete ensembles and ensembles taking into account the limitation of their volume. In addition, the algorithms can be extended to the tasks of forming ensembles from other families, for example, assembled from code sequences belonging to different families.

Keywords aperiodic Gold code sequences, minimax ensembles

For citation: Zubarev V. Yu., Ponomarenko B. V., Shanin E. G., Vostretsov A. G. Formation of Minimax Ensembles of Aperiodic Gold Codes. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2020, vol. 23, no. 2, pp. 26–37. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-2-26-37

Conflict of interest. Authors declare no conflict of interest.

Submitted 01.11.2019; accepted 13.03.2020; published online 29.04.2020

Введение. В радиосистемах передачи дискретных сообщений, радиолокационных и радионавигационных системах широко используются сигналы, построенные на основе ансамблей кодовых последовательностей (КП). Выбор таких ансамблей с хорошими корреляционными свойствами является растущей областью исследований для этих систем [1].

Наибольшее внимание исследователей сосредоточено на построении ансамблей полифазных и комплементарных КП, последовательностей с нулевой зоной корреляции [1]. При этом используются аналитические методы синтеза [2–4], а также генетические алгоритмы [5], эволюцион-

ные алгоритмы [6] и различные модификации этих вычислительных процедур [7]. В то же время у комплементарных КП есть ряд ограничений, в том числе на количество последовательностей в наборе, доступные длины КП, а также требование линейности усилителей мощности при реализации. Последнее справедливо и для полифазных КП. Поэтому не снижается интерес к бинарным КП. Однако отмечается [1], что "проектирование семейств последовательностей желаемого размера, длины последовательности и аperiodических свойств – все еще открытая проблема", решение которой является важным для различных цифровых систем.

В современных радиосистемах используются как периодические, так и аperiodические дискретные сигналы. При их одновременной передаче в общей полосе частот стремятся к минимизации взаимных помех, что сводится, например, к использованию минимаксных ансамблей КП, т. е. ансамблей КП, оптимальных по минимаксному критерию [8].

Для периодических дискретных сигналов известны методы синтеза минимаксных ансамблей КП [8], а также оценки значений периодических автокорреляционных функций (ПАКФ) и периодических взаимно корреляционных функций (ПВКФ), достижимых минимаксными ансамблями. Для ансамблей аperiodических КП "в настоящее время не только нет регулярного метода синтеза бинарных фазоманипулированных сигналов, оптимальных по минимаксному критерию, но даже нельзя ответить на вопрос, насколько известные сигналы с большим числом позиций N близки к оптимальным" [9].

Более того, как указывается в [9], и для односторонних аperiodических КП, несмотря на интенсивные исследования, все известные методы синтеза содержат в качестве одного из этапов перебор. К этим методам относят, в частности [9, 10]:

1. Метод направленного перебора. Этим методом были найдены все бинарные последовательности Баркера, троичные аperiodические квазиортогональные КП, в том числе троичные последовательности Баркера с $N < 31$. Значение минимума пикового уровня боковых лепестков аperiodической автокорреляционной функции (ААКФ) определено до $N = 105$ [11].

Метод направленного перебора предусматривает два этапа. Первый этап ориентирован на сужение области перебора и состоит в формулировке необходимых условий существования и допустимых комбинаторных соотношений параметров. Второй заключается в разработке эффективных переборных алгоритмов.

2. Метод синтеза аperiodических КП на основе периодических. Идея метода основана на взаимосвязи ААКФ $\rho_a(m)$ с ее периодическим аналогом ПАКФ $\rho_p(m)$. Если

$$\rho_{p_{\max}} = \max \{ |\rho_p(m)| \}; m = 1, 2, \dots, N-1,$$

то легко получить оценку $\rho_{a_{\max}}(m) \geq (1/2)\rho_{p_{\max}}$. Таким образом, последовательности с "хороши-

ми" ААКФ могут быть найдены только среди последовательностей с "хорошими" ПАКФ [12].

Метод также состоит из двух этапов. Первый заключается в поиске КП с "хорошей" ПАКФ, второй – в поиске оптимальных по минимаксному критерию начальных условий. С помощью этого метода найдены оптимальные по минимаксному критерию бинарные и троичные последовательности.

3. Синтез сигналов КП по заданной ААКФ. В зависимости от используемого критерия и способа вычисления отклонений выделяют [9]:

- метод равномерного приближения;
- метод минимума среднеквадратического отклонения;
- метод покоординатного спуска;
- метод минимума среднестепенного отклонения;
- асимптотический метод синтеза.

Все эти методы относятся к числу итерационных и включают в себя трудоемкий переборный процесс. Лучшие результаты синтеза бинарных последовательностей с $N < 901$ существенно уступают по уровню минимаксных боковых лепестков ААКФ последовательностям, синтезированным одним из ранее упомянутых методов.

В [9] отмечено, что проблемы усовершенствования этих методов состоят в синтезе КП с "хорошей" ПАКФ и сокращении времени на этапе перебора.

Постановка задачи. Метод построения аperiodических КП на основе периодических может быть использован и для построения минимаксных ансамблей аperiodических КП.

Для минимаксных ансамблей бинарных периодических КП известны оценки $\rho_{p_{\max}}$ в зависимости от длин кодов N и объемов ансамблей K . Для ряда популярных ансамблей такие оценки приведены в [12] (табл. 1). Из табл. 1 следует, что для больших K , близких к N , целесообразно, в частности, использование кодов Голда. Например, требуемому объему ансамбля $K_c = 100$ удовлетворяют только коды Голда с длиной $N = 127$ и выше и ансамбли Касами с длиной $N = 1023$ и выше. Этим обусловлен выбор в данной статье ансамбля кодов Голда для последующего построения минимаксного ансамбля аperiodических КП, несмотря на то что для периодических кодов Голда оценка $\rho_{p_{\max}}$ несколько хуже, чем для других ансамблей из табл. 1.

Таблица 1. Характеристики ансамблей псевдослучайных последовательностей

Table 1. Characteristics of pseudo-random sequence ensembles

Ансамбль	Длина (N)	Объем (K)	Квадрат максимума бокового лепестка АКФ ($\rho_{p_{\max}}^2$)
Голд	$2^n - 1, n \neq 0 \pmod{4};$ 7, 31, 63, 127, 511, 1023	$N + 2 = 2^n + 1$	$\frac{[\sqrt{2(N+1)+1}]^2}{N^2} \rightarrow \frac{2}{N},$ $n - \text{нечетное};$ $\frac{[\sqrt{2(N+1)+1}]^2}{N^2} \rightarrow \frac{4}{N},$ $n - \text{четное}$
Касами	$2^n - 1, n - \text{четное};$ 15, 63, 255, 1023	$\sqrt{N+1}$	$\frac{(\sqrt{N+1}+1)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{N}$
Объединение Касами и бент-последовательностей	$2^n - 1, n = 0 \pmod{4};$ 15, 255	$2\sqrt{N+1} - 1$	$\frac{(\sqrt{N+1}+1)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{N}$
Камалетдинов 1	$p(p-1), p - \text{простое};$ 42, 110, 343, 506, 930	$p+1 = \frac{\sqrt{4N+1}+3}{2} \rightarrow \sqrt{N}$	$\frac{(p+3)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{N}$
Камалетдинов 2	$p(p+1), p - \text{простое};$ 12, 56, 132, 380, 552, 930	$p-1 = \frac{\sqrt{4N+1}-3}{2} \rightarrow \sqrt{N}$	$\frac{(p+1)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{N}$

Настоящая статья посвящена построению минимаксных ансамблей аperiodических кодовых последовательностей Голда с объемом, близким к длине кода. Отметим, что ансамбли Голда пользуются большой популярностью в современных системах множественного доступа с кодовым разделением (CDMA), к которым, в частности, относятся системы GPS, UMTS и др. [13]. Они используются для разделения данных, передаваемых по линии связи между различными абонентами, как расширяющие последовательности, преобразующие информационный сигнал в широкополосный, для синхронизации приема информационных посылок.

Пусть $\mathbf{a}_{ki} = \{a_{ki,0}, a_{ki,1}, \dots, a_{ki,N-1}\}$ – k -я бинарная аperiodическая КП длиной N , принадлежащая i -му ансамблю Голда $\{\mathbf{a}_k\}_i$, $k = 1, \dots, K$; $i = 1, \dots, N_{\text{Gold}}$. Нормированная ААКФ последовательности \mathbf{a}_{ki} определяется как [12]:

$$\rho_{a, kki}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{a}_{ki}\|^2} \sum_{j=m}^{N-1} a_{ki,j} a_{ki,j-m}, & m \geq 0; \\ \frac{1}{\|\mathbf{a}_{ki}\|^2} \sum_{j=0}^{N-1+m} a_{ki,j} a_{ki,j-m}, & m < 0, \end{cases}$$

где $\|\mathbf{a}_{ki}\|$ – евклидова норма, одинаковая для всех кодовых векторов \mathbf{a}_{ki} ; $\|\mathbf{a}_{ki}\|^2 = E$ – энергия каждой из кодовых последовательностей \mathbf{a}_{ki} .

Нормированная АВКФ двух последовательностей одинаковой длины \mathbf{a}_{ki} и \mathbf{a}_{li} равна

$$\rho_{a, kli}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{a}_{ki}\| \|\mathbf{a}_{li}\|} \sum_{j=m}^{N-1} a_{ki,j} a_{li,j-m}, & m \geq 0; \\ \frac{1}{\|\mathbf{a}_{ki}\| \|\mathbf{a}_{li}\|} \sum_{j=0}^{N-1+m} a_{ki,j} a_{li,j-m}, & m < 0. \end{cases}$$

Пусть

$$R_{kk,i} = \max_m |\rho_{a, kki}(m)|, \quad m \neq 0$$

– пиковый уровень боковых лепестков k -й ААКФ i -го ансамбля аperiodических КП Голда;

$$Q_{kl,i} = \max_m |\rho_{a, kli}(m)|, \quad k \neq l$$

– максимальное значение модуля АВКФ последовательностей \mathbf{a}_{ki} и \mathbf{a}_{li} . Для i -го ансамбля найдем пару значений: $\max_k R_{kk,i}$, которое достигается при некоторой КП с номером $k = j_1$, и $\max_{k,l} Q_{kl,i}$,

которое достигается при некоторой паре КП с номерами $k = j_2$, $l = j_3$. Минимаксным ансамблем $\{a_{kM}\}$, $k = 1, \dots, K$; $M = 0, \dots, N - 1$ при заданных значениях K и N будем называть ансамбль, выбранный следующим образом:

1) для каждого i -го ансамбля определяется пара значений $\max_k R_{kk, i}$ и $\max_{k, l} Q_{kl, i}$;

2) на основе алгоритма двухкритериального выбора [17] находится ансамбль $i = M$, имеющий наилучшую по указанному алгоритму пару значений $\max_k R_{kk, i}$ и $\max_{k, l} Q_{kl, M}$.

Как следует из табл. 1, полный объем ансамбля Голда $K = N + 2$. В настоящей статье рассмотрены как полные, так и неполные минимаксные ансамбли объемом $K_c < K$, необходимые в ряде практических приложений. Включенные в рассмотрение неполные минимаксные ансамбли образованы из полного минимаксного ансамбля Голда с номером $i = M$ отбрасыванием $K - K_c$ последовательностей с наибольшими значениями $R_{kk, M}$.

Алгоритм построения минимаксного ансамбля аperiodических кодов Голда. Исходя из приведенного определения, далее рассмотрена процедура построения минимаксного ансамбля, состоящая из следующих операций:

- формирование ансамблей кодов Голда;
- выбор из множества ансамблей Голда лучшего на основе алгоритма двухкритериального выбора [17].

Для построения ансамбля кодов Голда в соответствии с методом Голда [14] выбирают пары образующих m -последовательностей на основе свойств полиномов. Каждой m -последовательности длины $N = 2n - 1$ (n – целое) соответствует свой примитивный полином степени n . Примитивные полиномы приводятся в таблицах [15], их количество равно $P = \Phi(2^n - 1)/n$, где $\Phi(x)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел, меньших x и взаимно простых с x). Количество несовпадающих пар m -последовательностей, построенных по примитивным полиномам, равно $N_a = (P^2 - P)/2$.

Ансамбли Голда можно получить не для всех комбинаций m -последовательностей определенной длины. Для генерации кодов Голда выбирают предпочтительные пары m -последовательностей. Алгоритм их поиска заключается в следующем:

– находят все примитивные полиномы степени n , которые образуют m -последовательности;

– каждую из полученных m -последовательностей децимируют представленными далее коэффициентами децимации q ;

– из полученных после децимации m -последовательностей с помощью алгоритма Берлекэмп–Мэсси [16] находят порождающие их полиномы;

– отбрасывают зеркальные копии полученных пар полиномов.

Оставшиеся пары и являются предпочтительными парами.

Для получения коэффициента децимации используется существующая между корнями некоторых примитивных полиномов связь: корни одного полинома $f_r(x)$ являются q -ми степенями корней другого полинома $f_l(x)$, причем число q – взаимно простое с N . Тогда m -последовательность M_l , порождаемая полиномом $f_l(x)$, может быть образована выборкой каждого q -го элемента из m -последовательности M_r .

Значения коэффициентов децимации q приводят к образованию предпочтительных пар, если удовлетворяют одному из следующих условий: $q = 2^k + 1$ или $q = 2^{2k} - 2^k + 1$, где $k \leq (n - 1)/2$, а наибольший общий делитель чисел k и n $\text{НОД}(k, n) = 1$.

При определении пар m -последовательностей для построения ансамбля Голда не рассматривались ансамбли на основе циклических сдвигов исходных m -последовательностей. Перебор сдвинутых КП может служить дополнительным резервом для оптимизации.

Рассмотрим задачу составления предпочтительных пар m -последовательностей на примере последовательности длиной $N = 127$, порождаемой примитивным полиномом степени $n = 7$. Для $n = 7$ имеется 18 примитивных полиномов, девять из которых приведены в [15]. Другие девять являются их зеркальными полиномами. Всем 18 полиномам соответствуют взаимно-обратные m -последовательности – пары m -последовательностей, связанные коэффициентом децимации

$$q = [2^j (N - 1)/2] \bmod N.$$

Таким образом, по степени примитивного полинома n определяются все возможные ансамбли кодов Голда. В настоящей статье авторы ограни-

Таблица 2. Количество ансамблей Голда
 Table 2. Number of Gold ensembles

Степень порождающего полинома (n)	Длина последовательности (N)	Число примитивных полиномов (P)	Число пар m -последовательностей (N_a)	Число ансамблей Голда (N_{Gold})
5	31	6	15	12
6	63	6	15	6
7	127	18	153	90
9	511	48	1128	288
10	1023	60	1770	300

чиваются $n=5, 6, 7, 9$ и 10 . Расчетные параметры для этих значений n приведены в табл. 2.

Далее для полученных ансамблей кодов Голда определяются путем перебора значения $\max_k R_{kk,i}$ и $\max_{k,l} Q_{kl,i}$.

Выбор лучшего по минимаксному критерию ансамбля Голда является задачей двухкритериального дискретного выбора. Для ее решения полученное множество $\left\{ \max_k R_{kk,i}; \max_{k,l} Q_{kl,i} \right\}$ разбивается на множества худших и нехудших вариантов с применением безусловного критерия предпочтения. Далее используется метод прямоугольников [17], проиллюстрированный рис. 1 для $N=127$ и 511 . Метод прямоугольников заключается в следующем:

1. Показатели $\max_k R_{kk,i}$ и $\max_{k,l} Q_{kl,i}$ откладывают по осям координатной плоскости в возрастающем порядке.
2. На эту плоскость наносят точки множества $\left\{ \max_k R_{kk,i}; \max_{k,l} Q_{kl,i} \right\}$.
3. На вертикальной прямой l , проходящей через самую левую точку множества, выбирают самую нижнюю либо единственную точку A_1 .

4. Проводят горизонтальную прямую 2 через самую нижнюю точку множества. Если на этой прямой оказалось несколько точек, выбирают самую левую (A_2). Найденные таким образом точки A_1, A_2 являются крайними точками левой нижней границы. Точку пересечения проведенных прямых назовем B .

5. Через точку A_1 проводят горизонтальную линию 3 , а через точку A_2 – вертикальную линию 4 до их пересечения в точке C . Все точки, лежащие вне получившегося прямоугольника, исключаются из дальнейшего отбора.

6. Внутри прямоугольника A_1CA_2B проводят вертикальную прямую через самую левую точку (или точки) и горизонтальную прямую через самую нижнюю точку (или точки). Тогда самая левая точка на горизонтальной прямой A_3 и самая нижняя точка на вертикальной прямой A_4 будут следующими точками нижней левой границы.

7. Пп. 3–6 повторяют, пока есть возможность построения новых линий. Таким образом, находят точку множества с минимальными по i значениями $\max_k R_{kk,i}$ и $\max_{k,l} Q_{kl,i}$. Если получается несколько ансамблей с одинаковыми значениями

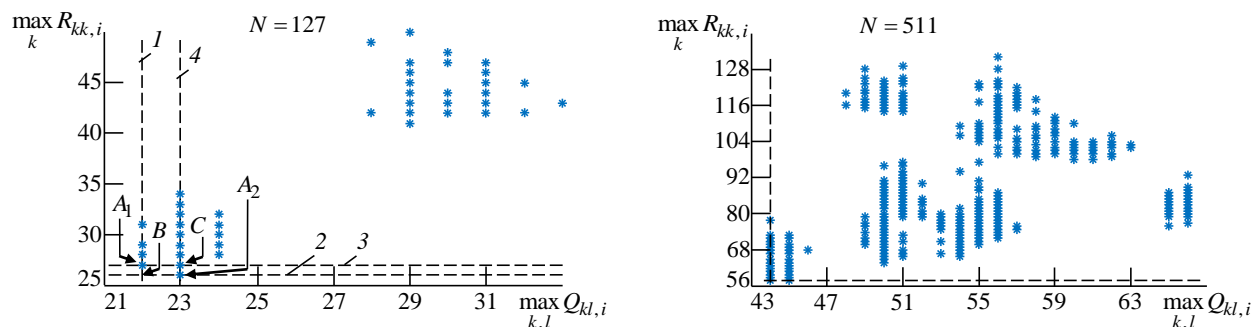


Рис. 1. Распределение максимальных значений корреляционных функций ансамблей для двух значений длины
 Fig. 1. Distribution of maximum values of ensemble correlation functions for two length values

Таблица 3. Номера предпочтительных пар примитивных полиномов, дающих минимаксные ансамбли

Table 3. Numbers of preferred pairs of primitive polynomials that yield minimax ensembles

Степень порождающего полинома (n)	Длина последовательности (N)	Объем ансамбля	Номера первых примитивных полиномов пары	Номера вторых примитивных полиномов пары	Минимаксное значение бокового лепестка ААКФ $\left(\min_i \max_k R_{kk,i}\right)$	Минимаксное значение бокового лепестка АВКФ $\left(\min_i \max_{k,l} Q_{kl,i}\right)$
5	31	$N + 2$	2	6	11	13
			2	3	12	12
			2	5	12	12
			3	4	12	12
			4	6	12	12
6	63	$N + 2$	2	5	19	19
7	127	100	5	6	22	27
			14	18	23	26
		$N + 2$	3	15	25	28
			14	18	26	26
9	511	100	3	17	44	58
		$N + 2$	3	17	57	58
10	1023	100	45	49	65	91
			33	53	64	89

показателей, то считается, что ансамбли идентичны по своим характеристикам и можно выбрать любой из них.

Результаты. В соответствии с описанными алгоритмами построены полные и неполные ансамбли Голда для параметров, указанных в табл. 2, и выбраны минимаксные ансамбли. В табл. 3 приведены условные номера предпочтительных пар примитивных полиномов, дающих в итоге минимаксные: полные ансамбли ($K_c = K = N + 2$), неполные ансамбли ($K_c = 100$) и минимаксные значения боковых лепестков ААКФ и АВКФ.

Из рис. 1 видно, что для $N = 127$ определяются два лучших результата оптимизации для распределения $\max_k R_{kk,i}$ и $\max_{k,l} Q_{kl,i}$, а для $N = 511$ – один такой результат. Этот факт отражен в табл. 3, где для $n = 7$ приведены два набора минимаксных значений.

На рис. 2 приведены наложенные друг на друга ААКФ минимаксных полных и неполных ($K_c = 100$) ансамблей из табл. 3 для $N = 127$, а на рис. 3 – аналогичные ААКФ для $N = 511$.

На рис. 4 приведены наложенные друг на друга АВКФ кодов ансамбля Голда, выбранного по алгоритму [17]. На рис. 5 приведены зависимости минимаксного уровня ААКФ $\min_i \max_k R_{kk,i}$ от объема ансамбля K_c для кодов различной длины N .

Обсуждение результатов. Сочетание известного метода построения ансамблей Голда и дискретного выбора лучшего из них на основе безусловного критерия предпочтения [17] позволяет построить минимаксные ансамбли аperiodических кодов Голда. Разработанные алгоритмы позволяют конструировать как полные ансамбли, так и ансамбли, учитывающие ограничение их объема. Кроме того, данные алгоритмы можно распространить на задачи построения ансамблей из других семейств, например собранных из КП, принадлежащих различным семействам.

Сравним полученные значения параметров, характеризующие минимаксные ансамбли аperiodических КП Голда, с некоторыми известными из литературы результатами.

1. Существуют фундаментальные ограничения на боковые лепестки ААКФ. Для произвольных одиночных бинарных КП модуль максимального бокового лепестка

$$SL_{\max} = \max_m |\rho_{a, kki}(m)|, m \neq 0$$

нормированной ААКФ ограничен снизу величиной $1/N$. Нижняя граница достигается кодами Баркера. Возможные значения для небаркеровских кодов $SL_{\max} \geq 2/N$.

В течение длительного времени разными авторами в результате глобального поиска найдены минимальные значения пиков боковых лепестков

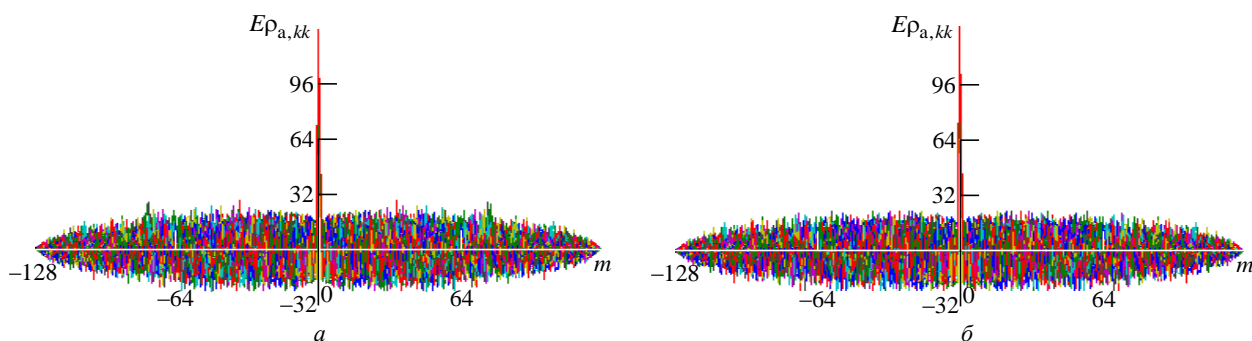


Рис. 2. Аперiodические автокорреляционные функции кодов Голда длины $N = 127$:
 a – полный ансамбль; b – неполный ансамбль ($K_c = 100$)

Fig. 2. Gold codes length 127 aperiodic autocorrelation functions: a – full ensemble; b – truncated ensemble $K_c = 100$

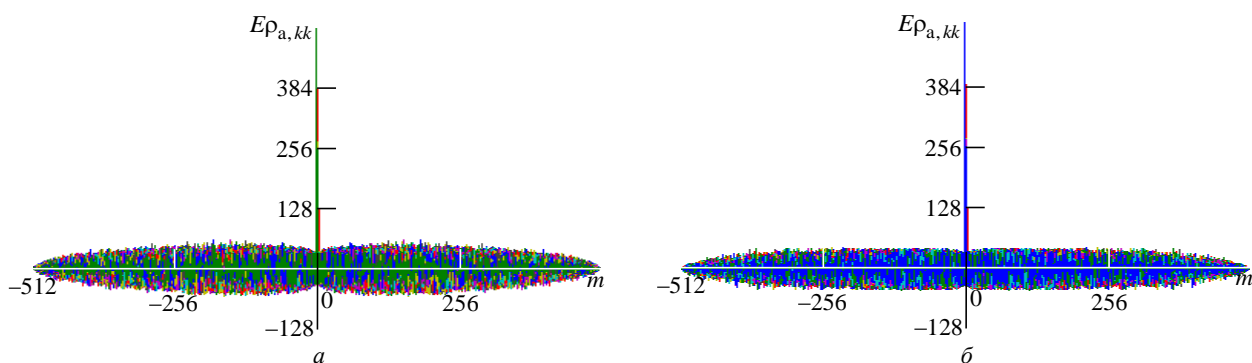


Рис. 3. Аперiodические автокорреляционные функции кодов Голда длины $N = 511$:
 a – полный ансамбль; b – неполный ансамбль ($K_c = 100$)

Fig. 3. Gold codes length 511 aperiodic autocorrelation functions: a – full ensemble; b – truncated ensemble $K_c = 100$

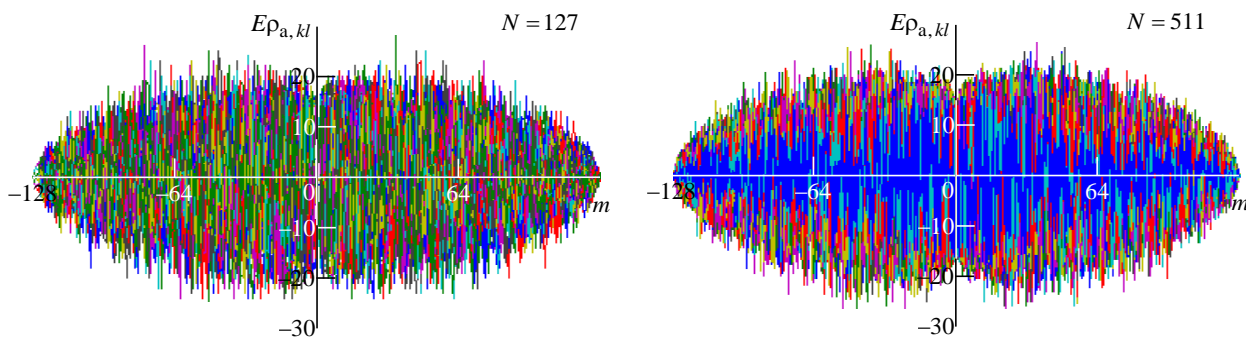


Рис. 4. Аперiodические взаимно корреляционные функции отобранных кодов Голда
 Fig. 4. Aperiodic cross-correlation functions of selected Gold codes

$$SL_{\min} = \min SL_{\max}$$

ААКФ среди всех бинарных КП и соответствующие им диапазоны N (табл. 4 [11]).

Из рис. 5 следует, что при небольших длинах кодов ($N = 31, 63, 127$) полученные в настоящей статье минимаксные значения лепестков ААКФ полных ансамблей Голда существенно превосходят значения, приведенные в табл. 4. Однако уменьшение объема ансамблей до значений K_c

по сравнению с K приводит к резкому уменьшению минимаксных лепестков.

Сравнить полученные минимаксные значения боковых лепестков полных ансамблей с абсолютно минимальными нормированными значениями SL_{\min}/N для $N = 511$ и 1023 не удалось, поскольку необходимых данных в литературе нет. Однако можно заметить, что для этих длин значения минимаксных лепестков существенно уменьшаются при ограничении длины ансамбля по

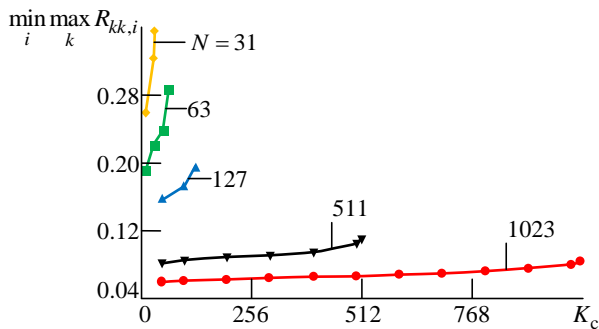


Рис. 5. Зависимость максимального уровня бокового лепестка аperiodической автокорреляционной функции от объема ансамбля

Fig. 5. The maximum level of the side lobe of the aperiodic autocorrelation function versus the volume of the ensemble

сравнению с $N = 31, 63, 127$. Кроме того, для незначительных длин уменьшение объема ансамбля по сравнению с полным не приводит к существенному уменьшению минимаксных лепестков. В то же время если при решении задачи ограничиться поиском, например, ансамбля $K_c = 100$, то для $N = 511, 1023$ получаются значения минимаксных лепестков, близкие к указанным в табл. 4 для $N = 100$.

2. В [8] рассмотрены периодические ансамбли КП, минимаксные по критерию:

Таблица 4. Минимальные уровни боковых лепестков автокорреляционных функций псевдослучайных последовательностей

Table 4. Minimum sidelobe levels of pseudo random sequence auto-correlation functions

Длина последовательности (N)	Минимум бокового лепестка (SL_{\min})	Нормированный минимум бокового лепестка (SL_{\min} / N)
5	1	0.2
6...21 (кроме кодов Баркера)	2	0.333...0.095
22...48	3	0.136...0.063
49...82	4	0.081...0.048
83...105	5	0.060...0.048

Таблица 5. Сравнение уровней боковых лепестков автокорреляционной функции

Table 5. Comparison of auto-correlation function side lobe levels

Степень порождающего полинома (n)	Длина последовательности (N)	Нижняя граница уровня бокового лепестка ($\rho_{p,gr}$)	Максимальный уровень боковых лепестков ПАКФ ($\rho_{p,max}$)	Максимальный уровень боковых лепестков ААКФ, ($\rho_{a,max}$)
5	31	0.29	0.29	0.387
6	63	0.206	0.27	0.302
7	127	0.186	0.186	0.22
9	511	0.065	0.065	0.114
10	1023	0.046	0.064	0.087

$$P_{opt} = \min_i \max_k \left[|c_{k,l}(m)|_{k \neq l} \cup |c_{k,k}(m)|_{m \neq 0} \right], \quad (1)$$

где $c_{k,l}(m)$ – ПВКФ последовательностей k и l ; $c_{k,k}(m)$ – ПАКФ k -й последовательности.

Нижние границы $\rho_{p,gr}$ для периодических бинарных КП Голда, удовлетворяющих (1), при объемах $K > N$ и нечетных n совпадают со значениями $\rho_{p,max}$, полученными из табл. 1, т. е. эти ансамбли строго оптимальны по минимаксному критерию (1).

В табл. 5 приведены значения $\rho_{p,gr}$ и $\rho_{p,max}$ для минимаксных ансамблей периодических КП Голда и значения

$$\rho_{a,max} = \max \left[\min_i \max_k R_{kk,i}, \min_i \max_{k,l} Q_{kl,i} \right],$$

полученные при подготовке материалов статьи. Из табл. 5 следует, что минимаксные значения для аperiodических КП Голда в 1.5–2 раза превышают соответствующие значения для периодических КП Голда.

3. В ряде работ (например, [4]) обсуждается характер изменения максимальных уровней боковых лепестков различных ансамблей КП по срав-

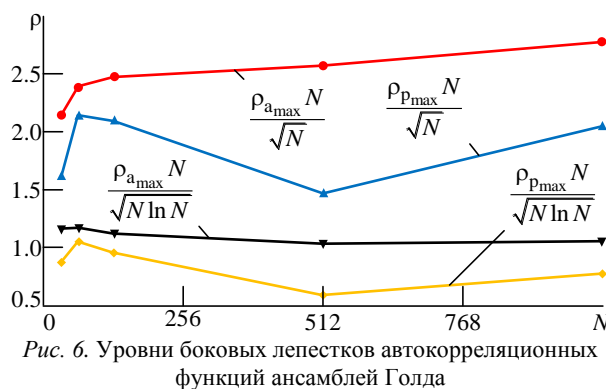


Рис. 6. Уровни боковых лепестков автокорреляционных функций ансамблей Голда

Fig. 6. Auto-correlation function side lobes of Gold ensembles

нению с функциями \sqrt{N} и $\sqrt{N \ln N}$. На рис. 6 приведены зависимости от N величин минимаксных уровней лепестков периодических и аperiodических ансамблей Голда, нормированных на указанные величины. Характер этих зависимостей показывает, что, по-видимому, $\rho_{p_{\max}} N$ и $\rho_{a_{\max}} N$ растут приблизительно пропорционально \sqrt{N} , что соответствует результатам [11] для максимальных уровней боковых лепестков периодических

ансамблей КП Голда. Для подтверждения этого при $N > 1023$ требуются дальнейшие расчеты.

4. Для неполных минимаксных ансамблей КП Голда увеличением на единицу степени полинома n при одинаковых объемах ансамблей K_C можно получить $\rho_{a_{\max}} < \rho_{p_{\max}}$. Например, для периодического ансамбля с $K_C = 65$ при $N = 63$ имеем значение $\rho_{p_{\max}} = 0.27$, а при $N = 127$ $\rho_{a_{\max}} = 0.17$.

Авторский вклад

Пономаренко Б. В. – постановка задачи, выбор и обоснование подходов к ее решению.

Вострецов А. Г. – сравнительный анализ полученных результатов с зарубежными источниками.

Зубарев В. Ю., Шанин Е. Г. – разработка и моделирование алгоритмов.

Author's contribution

Boris V. Ponomarenko – problem statement, selection and rationale of approaches to the problem solving.

Aleksey G. Vostretsov – analysis of the results obtained by comparing with foreign information sources.

Vladimir Yu. Zubarev, Evgeniy G. Shanin – development and modeling of algorithms.

Список литературы

1. Spreading Sequences in Active Sensing: a Review / E. García, J. A. Paredes, F. J. Álvarez, M. C. Pérez, J. J. García // Signal Processing. 2015. Vol. 106. P. 88–105. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.07.002
2. Efficient Architectures for the Generation and Correlation of Binary CSS Derived from Different Kernel Lengths / E. García, J. Ureña, J. J. García, M. C. Pérez // IEEE Trans. on Signal Processing. 2013. Vol. SP-61, № 19. P. 4717–4728. doi: 10.1109/TSP.2013.2273883
3. Tang X., Mow W. H. Design of Spreading Codes for Quasi-synchronous CDMA with Intercell Interference // IEEE J. on Selected Areas in Communications. 2006. Vol. 24, № 1. P. 84–93. doi: 10.1109/JSAC.2005.858877
4. Appuswamy A., Chaturvedi A. K. A new Framework for Constructing Mutually Orthogonal Complementary Sets and ZCZ Sequences // IEEE Trans. on Information Theory. 2006. Vol. IT-52, № 8. P. 3817–3826. doi: 10.1109/TIT.2006.878171
5. New Pseudo-orthogonal Family of Polyphase Codes to Improve Doppler Resilience / J. A. Paredes, T. Aguilera, F. J. Álvarez, J. A. Fernández, J. Morera // Intern. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Montbeliard-Belfort, France, 28–31 Oct. 2013. doi: 10.1109/IPIN.2013.6817851
6. Stringer G., Lamont G., Akers J. Radar Phase-coded Waveform Design Using MOEAs // 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Brisbane, Australia, 10–15 June 2012. doi: 10.1109/CEC.2012.6256554
7. Comparison of Memetic Algorithms for the Spread Spectrum Radar Polyphase Codes Design Problem / Á. M. Pérez-Bellido, S. Salcedo-Sanz, E. G. Ortiz-García, J. A. Portilla-Figueras, F. López-Ferreras // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2008. Vol. 21, iss. 28. P. 1233–1238. doi: 10.1016/j.engappai.2008.03.011
8. Ипатов В. П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 152 с.
9. Гантмахер В. Е., Быстров Н. Е., Чеботарев Д. В. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка. СПб.: Наука и техника, 2005. 400 с.
10. Потехин Е. Н., Шувалов А. С., Леухин А. Н. Методы и результаты синтеза аperiodических бинарных последовательностей и многофазных последовательностей Баркера // Цифровая обработка сигналов. 2013. № 4. С. 45–54.
11. Bose A., Soltanian M. Constructing Binary Sequences with Good Correlation Properties: an Efficient Analytical-Computational Interplay // IEEE Trans. on Signal Processing. 2018. Vol. SP-66, № 11. P. 2998–3007. doi: 10.1109/TSP.2018.2814990
12. Ipatov V. P. Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications. Lesly, USA: Wiley, 2005. 400 p.
13. Beard C., Stallings W. Wireless Communication Networks and Systems. London: Pearson, 2016. 642 p.
14. Gold R. Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing // IEEE Trans. on Information Theory. 1967. Vol. IT-13, № 4. P. 619–621. doi: 10.1109/TIT.1967.1054048
15. Middlestead R. W. Digital Communications with Emphasis on Data Modems. Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing and Applications. Lesly, USA: Wiley, 2017. 792 p.
16. Berlekamp E. R. Algebraic Coding Theory. Revised Edition. Singapore: World Scientific, 2015. 502 p.
17. Гуткин Л. С. Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. М.: Сов. радио, 1975. 368 с.

Информация об авторах

Зубарев Владимир Юрьевич – инженер по специальности "Вычислительные комплексы, системы и сети" (2001, Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики), инженер 1-й категории АО "Навигатор". Автор трех научных публикаций. Сфера научных интересов – радионавигационные системы, цифровая обработка сигналов.

Адрес: АО "Навигатор", Шкиперский проток, д. 14, лит. 3, корп. 19, Санкт-Петербург, 199106, Россия
E-mail: vzubarev@navigat.ru

Пономаренко Борис Викторович – доктор технических наук (2002), главный научный сотрудник АО "Навигатор". Автор более 100 научных работ. Сфера научных интересов – радионавигационные системы, теория и техника обработки сигналов.

Адрес: АО "Навигатор", Шкиперский проток, д. 14, лит. 3, корп. 19, Санкт-Петербург, 199106, Россия
E-mail: irk@navigat.ru

Шанин Евгений Геннадьевич – магистр техники и технологии по направлению "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" (2014), инженер АО "Навигатор". Автор двух научных публикаций. Сфера научных интересов – радиотехника, цифровая обработка сигналов.

Адрес: АО "Навигатор", Шкиперский проток, д. 14, лит. 3, корп. 19, Санкт-Петербург, 199106, Россия
E-mail: eshanin@navigat.ru

Вострецов Алексей Геннадьевич – доктор технических наук (1998), профессор (1999), заслуженный деятель науки Российской Федерации (2010), проректор по научной работе Новосибирского государственного технического университета. Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – помехоустойчивые методы обработки сигналов в задачах радиолокации, радионавигации, связи и автоматизации научного эксперимента.

Адрес: Новосибирский государственный технический университет, пр. К. Маркса, д. 20, Новосибирск, 630073, Россия

E-mail: ag_vost@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-4753-4304>

References

- García E., Paredes J. A., Álvarez F. J., Pérez M. C., García J. J. Spreading Sequences in Active Sensing: a Review. *Signal Processing*. 2015, vol. 106, pp. 88–105. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.07.002
- García E., Ureña J., García J. J., Pérez M. C. Efficient Architectures for the Generation and Correlation of Binary CSS Derived from Different Kernel Lengths. *IEEE Trans. on Signal Processing*. 2013, vol. SP-61, no. 19, pp. 4717–4728. doi: 10.1109/TSP.2013.2273883
- Tang X., Mow W. H. Design of Spreading Codes for Quasi-synchronous CDMA with Intercell Interference. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*. 2006, vol. 24, no. 1, pp. 84–93. doi: 10.1109/JSAC.2005.858877
- Appuswamy A., Chaturvedi A. K. A New Framework for Constructing Mutually Orthogonal Complementary Sets and ZC Sequences. *IEEE Trans. on Information Theory*. 2006, vol. IT-52, no. 8, pp. 3817–3826. doi: 10.1109/TIT.2006.878171
- Paredes J. A., Aguilera T., Álvarez F. J., Fernández J. A., Morera J. New Pseudo-orthogonal Family of Polyphase Codes to Improve Doppler Resilience. *Intern. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation*. 28–31 Oct. 2013, Montbeliard-Belfort, France. doi: 10.1109/IPIN.2013.6817851
- Stringer G., Lamont G., Akers J. Radar Phase-coded Waveform Design Using MOEAs. 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation. 10–15 June 2012, Brisbane, Australia 1–8. doi: 10.1109/CEC.2012.6256554
- Pérez-Bellido Á. M., Salcedo-Sanz S., Ortiz-García E. G., Portilla-Figueras J. A., López-Ferreras F. Comparison of Memetic Algorithms for the Spread Spectrum Radar Polyphase Codes Design Problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2008, vol. 21, iss. 28, pp. 1233–1238. doi: 10.1016/j.engappai.2008.03.011
- Ipatov V. P. *Periodicheskie diskretnye signaly s optimal'nymi korrelyatsionnymi svoystvami* [Periodic Discrete Signals with Optimal Correlation Properties]. Moscow, *Radio i svyaz'*, 1992, 152 p. (In Russ.)
- Gantmakher V. E., Bystrov N. E., Chebotaryov D. V. *Shumopodobnye signaly. Analiz, sintez, obrabotka* [Noise-Like Signals. Analysis, Synthesis, Processing]. SPb., *Nauka i tekhnika*, 2005, 400 p. (In Russ.)
- Potekhin E., Shuvalov A., Leukhin N. Methods and Results Synthesis of Aperiodic Binary Sequences and Polyphase Barker Sequences. *Digital Signal Processing*. 2013, no. 4, pp. 45–54. (In Russ.)
- Bose A., Soltanian M. Constructing Binary Sequences with Good Correlation Properties: an Efficient Analytical-Computational Interplay. *IEEE Trans. on Signal Processing*. 2018, vol. SP-66, no. 11, pp. 2998–3007. doi: 10.1109/TSP.2018.2814990
- Ipatov V. P. *Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications*. Lesly, USA, Wiley, 2005, 400 p.
- Beard C., Stallings W. *Wireless Communication Networks and Systems*. London, Pearson, 2016, 642 p.
- Gold R. Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing. *IEEE Trans. on Information Theory*. 1967, vol. IT-13, no. 4, pp. 619–621. doi: 10.1109/TIT.1967.1054048
- Middlestead R. W. *Digital Communications with Emphasis on Data Modems. Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing and Applications*. Lesly, USA, Wiley, 2017, 792 p.

16. Berlekamp E. R. Algebraic Coding Theory. Revised Edition. Singapore, World Scientific, 2015, 502 p. Electronic Devices Optimization according To a Set of Quality Parameters]. Moscow, *Sovetskoe radio*, 1975, 368 p.
17. Gutkin L. S. *Optimizatsiya radioelektronnykh ustroystv po sovokupnosti pokazatelei kachestva* [Radio-

Information about the authors

Vladimir Yu. Zubarev, Engineer in the specialty "Computing Complexes, Systems and Networks" (2001, ITMO University), Engineer of 1 category in Navigator Company. The author of 3 scientific publications. Area expertise: radio navigation systems; digital signal processing.

Address: Navigator Company, 14Z/19 Shkiperski Protok, St Petersburg 199106, Russia

E-mail: vzubarev@navigat.ru

Boris V. Ponomarenko, Dr. Sci. (Eng.) (2002), Chief Researcher in Navigator Company. The author of more than 100 scientific publications. Area expertise: radio navigation systems; theory and technique of signal processing.

Address: Navigator Company, 14Z/19 Shkiperski Protok, St Petersburg 199106, Russia

E-mail: irk@navigat.ru

Evgeniy G. Shanin, Master of Engineering (2014), Engineer in Navigator Company. The author of 2 scientific publications. Area expertise: radio engineering; digital signal processing.

Address: Navigator Company, 14Z/19 Shkiperski Protok, St Petersburg 199106, Russia

E-mail: eshanin@navigat.ru

Aleksey G. Vostretsov, Dr. Sci. (Eng.) (1998), Professor (1999), Honored Scientist of the Russian Federation (2010), Vice-rector for scientific work of Novosibirsk State Technical University. The author of more than 150 scientific publications. Area expertise: noise-resistant methods of signal processing in problems of radar, radio navigation, communication and automation of a scientific experiment.

Address: Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Ave., Novosibirsk 630073, Russia

E-mail: ag_vost@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-4753-4304>
