Revista Brasileira de Educação do Campo
The Brazilian Scientific Journal of Rural Education
ARTIGO/ARTICLE/ARTÍCULO
DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uft.rbec.e7879

Educação matemática realística: uma abordagem teórico-metodológica para o ensino de matemática nas escolas do campo

Marcos Guilherme Moura-Silva[1], Rayza de Oliveira Souza[2], Tadeu Oliver Gonçalves[3], Ruy Guilherme Braga Borges[4]
[1, 2, 3, 4] Universidade Federal do Pará - UFPA. Instituto de Educação Matemática e Científica. Rua Augusto Corrêa, 1, Guamá. Belém - PA. Brasil.
Autor para correspondência/Author for correspondence: marcosgmouras@yahoo.com.br

RESUMO. O movimento por uma Educação do Campo ainda carece de investigações de pressupostos teórico-metodológicos para o campo didático, pautadas no estudo de práticas de ensino que considerem o objeto de conhecimento e, ao mesmo tempo, valorize o aspecto realístico/contextual onde o aluno está inserido. Nessa perspectiva, investigamos as implicações teórico-metodológicas da teoria da Educação Matemática Realística (EMR) para o ensino de matemática na escola do campo. Baseados em uma abordagem metodológica qualitativa, elaborou-se uma trajetória hipotética de aprendizagem fundamentada nos princípios da EMR relacionada ao ensino de geometria analítica, a partir da prática de gabaritagem de terra no cultivo do Maracujá (*passiflora edulis*). Nossos resultados apontam a EMR como uma via teórico-metodológica promissora de exploração didática para o contexto do campo capaz de promover raciocínios formais, conceitos em situações realísticas, apropriação de linguagem matemática e potencial para o desenvolvimento de conceitos no ramo da geometria cartesiana.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística, Modelos Emergentes, Geometria Analítica, Escola Rural. Educação do Campo.

Realistic Mathematic Education: a theoretical-methodological approach to the teaching of mathematics in countryside schools

ABSTRACT. The movement for a Rural Education still lacks investigations of methodological theoretical assumptions for the didactic field, based on the study of teaching practices that consider the object of knowledge and, at the same time, value the realistic/contextual aspect in which the student is inserted. From this perspective, we investigate the methodological theoretical implications of the theory of Realistic Mathematical Education (EMR) for the teaching of mathematics in the countryside school. Based on a qualitative methodological approach, a hypothetical learning path was elaborated based on the principles of EMR related to the teaching of analytical geometry, from the practice of soil modeling in passion fruit (*passiflora edulis*) cultivation. Our results point to the EMR as a promising methodological theoretical approach of didactic exploration to the countryside context capable of promoting formal reasoning, concepts in realistic situations, appropriation of mathematical language and potential for the development of concepts in the field of Cartesian geometry.

Keywords: Realistic Mathematics Education, Emerging Models, Analytical Geometry, Countryside School, Rural Education.

Educación Matemática realista: un enfoque teórico-metodológico para la enseñanza de las matemáticas en las escuelas rurales

RESUMEN. El movimiento para una Educación del Campo aún carece de investigaciones de supuestos teóricos metodológicos para el campo didáctico, basados en el estudio de prácticas de enseñanza que consideran el objeto del conocimiento y, al mismo tiempo, valoran el aspecto realista / contextual en el que se inserta el estudiante. Desde esta perspectiva, investigamos las implicaciones teóricas metodológicas de la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) para la enseñanza de las matemáticas en la escuela del campo. Basado en un enfoque metodológico cualitativo, se elaboró un camino de aprendizaje hipotético basado en los principios de EMR relacionados con la enseñanza de la geometría analítica, a partir de la práctica del modelado del suelo en el cultivo de maracuyá (*passiflora edulis*). Nuestros resultados apuntan a la RME como un enfoque teórico metodológico prometedor de la exploración didáctica en el contexto rural capaz de promover el razonamiento formal, los conceptos en situaciones realistas, la apropiación del lenguaje matemático y el potencial para el desarrollo de conceptos en el campo de la geometría cartesiana.

Palabras clave: Educación Matemática Realista, Modelos Emergentes, Geometría Analítica, Escuela Rural. Educación del Campo.

Introdução

O movimento por uma Educação do Campo ainda carece de investigações de pressupostos teórico-metodológicos para o campo didático, pautadas no estudo de práticas de ensino que considerem o objeto de conhecimento e, ao mesmo tempo, valorizem o aspecto realístico/contextual onde o aluno está inserido. De modo geral, poucas práticas didáticas matemáticas estão disponíveis para auxiliar o professor em sala de aula nas escolas do campo, de modo a efetivar os princípios da Educação do Campo no chão desses espaços.

Na perspectiva do desempenho acadêmico, o cenário também se mostra crítico e carece de intervenção, pois se estima que alunos das escolas rurais brasileiras tenham uma média de desempenho em matemática menor que alunos das escolas urbanas. Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) mostram que, nas escolas rurais, somente 6% dos alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental apresentam um desempenho adequado em matemática, o que corresponde à metade do verificado em escolas urbanas (INEP, 2011). Resultados mais recentes, advindos de avaliação em larga escala, continuam evidenciando essa disparidade, quando comparados o nível de proficiência entre os alunos do ensino público urbano e rural, uma média de 28,69 pontos de diferença (INEP, 2018).

Pautados em tais conjunturas, e, no intuito de produzir investigações voltadas ao ensino de matemática para escolas campesinas visando alcançar um potencial impacto no desempenho matemático dos alunos que ali estudam, trazemos para o debate os pressupostos da teoria da Educação Matemática Realística, destacando-a como uma via promissora de exploração didática para o contexto do campo.

Nosso estudo apresentará os conceitos e fundamentos da teoria da Educação Matemática Realística (EMR), seguido de procedimentos metodológicos com a discussão dos principais achados. Almejamos estabelecer a EMR como uma abordagem teórico-metodológica para o ensino de matemática nas escolas do campo a ser explorada tanto em sala de aula pelo professor, quanto na arena de inquéritos em "Educação do campo" por parte dos pesquisadores.

Educação Matemática Realística_EMR

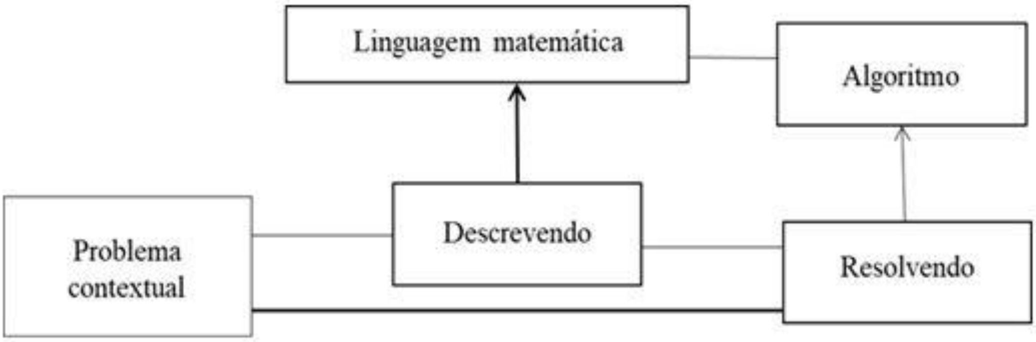
A teoria de designer instrucional da Educação Matemática Realística – EMR (em inglês, Realistic Mathematics Education - RME) teve suas origens na década de 1970, na Holanda, no esforço universal de melhorar o pensamento matemático. Ela se baseia na interpretação de Hans Freudenthal que concebeu a matemática como uma atividade humana (Freudenthal, 1983; Gravemeijer, 1994). De algum modo, a EMR guarda semelhança com os "centros de interesse" de Decroly (Gravemeijer 1994, 1999; Gravemeijer & Terwel, 2000).

Na perspectiva de Freudental (1983), os alunos devem aprender matemática através de um processo de matematização progressiva,[i] baseando-se em problemas contextuais reais ou matematicamente autênticos. A esse respeito, nota-se que a teoria da EMR é primariamente uma proposição sobre construção de conhecimento, ela não se atém a motivar os alunos em contextos de vida cotidiana, mas a fornecer contextos experiencialmente reais de modo a serem usados naquele processo de matematização progressiva (Gravemeijer, 1999). De fato, a "EMR é voltada a capacitar os alunos a inventar seus próprios métodos de raciocínio e estratégias de solução, levando a um entendimento conceitual mais forte". (Rasmussen & Blumenfeld, 2007, p. 198).

Os problemas contextuais objetivam um processo de reinvenção por parte dos alunos para lidar com a matemática formal e devem ser realísticos, do ponto de vista de fornecerem elementos para imaginar, realizar, fazer ideia, e, por sua vez, tornar-se real na mente dos estudantes. Isso sugere que problemas contextuais não precisam ser autenticamente reais, mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005; Ferreira & Buriasco, 2016).

A partir de um problema contextual, os alunos poderão extrair informações e usar estratégias informais por tentativa e erro para resolver o problema. Esse nível, na EMR, é denominado matematização horizontal. A tradução dessas informações para uma linguagem matemática, fazendo uso de símbolos e progredindo para seleção de algoritmos, como uma equação, por exemplo, é denominada matematização vertical (Figura 1). Trata-se de um processo envolvendo a resolução da situação-problema em diferentes níveis.

Figura 1. Matematização horizontal e matematização vertical.



Fonte: Gravemeijer (2004).

Os problemas contextuais são considerados elementos chaves na EMR, e devem ser capazes de formar conceitos e modelos (Treffers & Goffree, 1985). Ferreira e Buriasco (2015, p. 457), baseadas em De Lange (1987), classificam os problemas contextuais em primeira, segunda e terceira ordem, de acordo com seus objetivos e potencialidades de matematização, como segue:

> **Contexto de Zero Ordem**: É utilizado para tornar o problema parecido com uma situação da vida real. Denominados por De Lange (1999) de "contexto falso", "contexto de camuflagem". Problemas que contêm esse tipo de contexto devem ser evitados; **Contexto de Primeira Ordem**: É aquele que apresenta operações matemáticas "textualmente embaladas", no qual uma simples tradução do enunciado para uma linguagem matemática é suficiente (De Lange, 1987). Esse tipo de contexto é relevante e necessário para resolver o problema e avaliar a resposta; **Contexto de Segunda Ordem:** É aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa (De Lange, 1987). Esse tipo de contexto, segundo De Lange (1999), envolve matematização ao passo que, nos contextos de primeira ordem, os problemas já são pré-matematizados; **Contexto de Terceira Ordem**: Como aquele que possibilita um "processo de matematização conceitual", esse tipo de contexto serve para "introduzir ou desenvolver um conceito ou modelo matemático". (De Lange, 1987, p. 76, grifos do autor).

Avançando no entendimento dos fundamentos da EMR para além dos problemas contextuais e suas classificações, Treffers (1987) definiu cinco princípios para a Educação Matemática Realista, a saber:

Quadro 1. Princípios da Educação Matemática Realística

Exploração fenomenológica	A atividade matemática não é iniciada a partir do nível formal, mas a partir de uma situação que é experiencialmente real para o aluno.
Uso de modelos e símbolos para a matematização progressiva	O segundo princípio da EMR é sair do nível do concreto para o nível mais formal usando modelos e símbolos.
Uso da própria construção dos alunos	Os alunos são livres para usar e encontrar suas próprias estratégias para solucionar problemas bem como para desenvolver o próximo processo de aprendizagem.
Interatividade	O processo de aprendizagem dos alunos não é somente individual, mas também um processo social.
Interconexão	O desenvolvimento de uma visão integradora da matemática, conectando vários domínios da matemática pode ser considerada uma vantagem dentro da EMR.

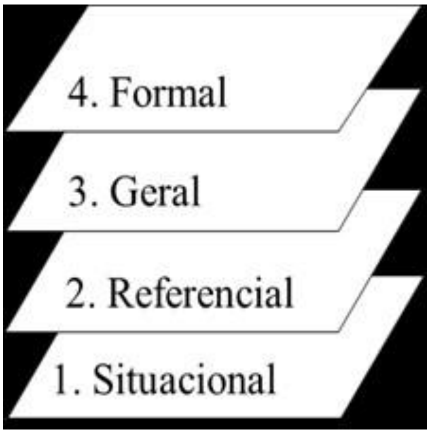
Fonte: Baseado em Treffers (1987).

Uma heurística central da EMR, abrangente a todos esses princípios, denomina-se modelos emergentes, capazes de promover nos alunos modos de raciocínio para o desenvolvimento da matemática formal (Gravemeijer, 1999).

Zandieh e Rasmussen (2010) definem modelos como formas de organizar uma atividade, seja a partir de ferramentas observáveis, como gráficos, diagramas e objetos, ou ferramentas mentais, referindo-se as maneiras pelos quais os alunos pensam e raciocinam enquanto resolvem um problema (Treffers & Goffree, 1985; Treffers 1987, 1991; Gravemeijer, 1994). Os modelos são chamados emergentes no sentido de que as várias formas de criar e usar ferramentas, gráficos, análises, expressões, emergem de modo concomitante às formas de raciocínio cada vez mais sofisticadas.

A heurística do modelo emergente envolve quatro níveis para o desenvolvimento desse raciocínio matemático, indo do nível situacional até o nível formal, elucidados na figura abaixo:

Figura 2. Níveis da modelagem emergente: do raciocínio situacional ao formal.



Fonte: Gravemeijer (2004).

A intenção é que a cada nível de modelagem emergente a atividade matemática dos alunos mude de uma solução contextual (modelo de) para uma solução mais geral (modelo para) (Gravemeijer, Bowers & Stephan, 2003).

O **nível situacional** é o nível básico dos modelos emergentes, onde os alunos trabalham em direção a metas matemáticas dentro de um problema contextual. Neste nível, os alunos ainda podem usar seus próprios simbolismos e modelos relacionados, independente dos rigores conceituais matemáticos e da configuração do problema contextual. O **nível referencial** envolve a construção de modelos baseados na configuração inicial da tarefa. Os modelos pensados inicialmente são ajustados de acordo com o problema contextual. No **nível geral** os modelos construídos não dependem da configuração da tarefa original. Finalmente, o **nível formal** envolve um raciocínio com simbolismos convencionais que reflete uma nova realidade matemática perante o problema contextual inicialmente posto.

Em síntese, os modelos surgem em contextos específicos e se referem às situações concretas, experienciais e reais aos alunos, associando-se ao princípio da "exploração fenomenológica" da EMR. Neste nível, os modelos devem permitir estratégias informais para resolução do problema contextualizado. A partir de então, o modelo muda seu papel, e os alunos poderão estabelecer relações e estratégias matemáticas, relacionando-se com o princípio do "uso de modelos e símbolos para uma matematização progressiva". Como consequência, tal modelo vai tomando um caráter mais objetivo e próximo ao nível da matemática formal. Assim, a EMR defende que a modelagem de atividades matemáticas informais desenvolve um modelo de raciocínio matemático mais formal, podendo melhorar o nível do entendimento matemático e o processo de ensino-aprendizagem. Essa discussão se torna crítica quando consideramos o campo de inquérito da Educação do Campo, onde uma de suas bandeiras é justamente a inserção do contexto experienciado pelo aluno no processo didático.

Caminho Metodológico

A pesquisa assume uma abordagem qualitativa, seguindo os pressupostos teórico-metodológicos da teoria de designer instrucional da EMR, a partir da heurística dos modelos emergentes. O designer instrucional foi desenvolvido para o ensino dos tópicos de geometria analítica voltados aos alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola localizada na zona rural.

O contexto da pesquisa ocorreu com a exploração do fenômeno da "gabaritagem de terra" [ii] por meio de discussões e vídeo filmagem. A propriedade rural onde ocorreu a investigação está localizada no entorno de um projeto de assentamento no município de São João do Araguaia-PA, pertencendo a uma moradora local que utiliza a extração da polpa da fruta como atividade econômica destinada à aquisição de renda extra à manutenção do núcleo familiar.

As ações ocorreram considerando as necessidades da turma, trabalhando na perspectiva de apresentar uma tarefa de suporte para atingir os objetivos de aprendizagem e, com isso, desenvolver os conceitos em estudo acerca de geometria analítica, conforme quadro a seguir:

Quadro 2. Trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de geometria analítica, segundo os pressupostos da EMR.

Objetivo de Aprendizagem	Conceitos	Tarefa de Suporte
Compreender elementos do plano cartesiano	Ponto, plano e eixos	Observar o processo de gabaritagem de terra na plantação de maracujá e modelar a situação matematicamente.
Representar pontos no plano cartesiano	Pares de coordenados	Observar o processo de gabaritagem de terra na plantação de maracujá e modelar a situação matematicamente.
Definir distância e alinhamento entre pontos	Distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos	Problema contextual de 2ª ordem

Fonte: dados da pesquisa (2019)

As tarefas de suporte foram vinculadas aos princípios da EMR, considerando nossos objetivos de aprendizagem. Essas tarefas consistiram na apresentação da prática da gabaritagem de terra na prática do plantio de maracujá, conforme enunciado anteriormente, onde, a partir dela, elaborou-se o problema contextual de 2ª ordem, segundo De Lange (1987).

Roteiro de intervenção

A intervenção realizada em sala de aula seguiu 7 passos, abaixo definidos:

1- Apresentação de vídeo filmagem sobre o plantio de maracujá aos alunos, configurando uma prática da realidade campesina, estabelecendo maior ênfase ao fenômeno da gabaritagem de terra. O vídeo foi produzido para compor o material didático a ser utilizado em sala.

2- Momento de discussões para os alunos expressarem oralmente o que compreenderam sobre o fenômeno exposto, no intuito de proporcionar construções mentais das primeiras relações matemáticas.

3- Trazer problematizações para as discussões dos alunos sobre os conhecimentos geométricos presentes na gabaritagem de terra, objetivando desenvolver em nível mais abstrato os conceitos de ponto, plano, eixo, plano cartesiano e pares de coordenadas.

4- Construção de maquete em grupos representando o fenômeno da gabaritagem de terra na prática do plantio de maracujá, como forma dos alunos estarem colocando em prática o conhecimento geométrico desenvolvido nos passos anteriores.

5- Fazer a problematização dos conceitos geométricos em estudo a partir da maquete representativa da gabaritagem de terra para assim se aproximar de um nível mais geral da matemática escolar.

6- Demonstração no quadro das fórmulas necessárias para efetuar o cálculo de distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos através de problematizações contextualizadas ao fenômeno em estudo.

7- Desenvolvimento de questões sobre distância entre dois pontos e alinhamento de três pontos a partir do problema contextual.

Discussões e Resultados

O desenvolvimento dos conceitos de geometria analítica emergiu através do problema contextual sobre a gabaritagem de terra na prática do plantio de maracujá, produzido pelo professor, que assume função mediadora no processo. O problema a seguir se classifica como um problema contextual de segunda ordem, nos termos discutidos por De Lange (1987), onde o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa.

Problema Contextual

As mudas de maracujá, antes de crescerem, necessitam serem plantadas próximas de estacas de madeira com espaçamento uniforme e que recebem no seu topo fios de arame que seguem uma única direção para assim o maracujazeiro se desenvolver facilmente. Este método de seguir uma uniformidade é denominado de "gabaritar a terra", sendo que de uma estaca para a outra as distâncias são equivalentes.

Figura 3. Gabaritagem de terra: à esquerda, o processo no qual se fincam as estacas no solo seguindo uma uniformidade de distância entre elas; à direita, as mudas prontas para a colheita.

Fonte: dados da pesquisa (2019).

Durante o procedimento de gabaritagem da terra, a distância de fixação das estacas é de 2m (metros) uma da outra. Deste modo, facilitando o processo de desenvolvimento das mudas até a coleta dos frutos.

A partir da exploração desta característica específica do plantio de maracujá foram coletadas informações para servir de base nos estudos, fomentando os primeiros modelos emergentes de organização. A seguir, analisamos as fases do designer instrucional a partir dos níveis dos modelos emergentes (situacional, referencial, geral e formal) - conforme eles foram sendo atingidos pelos estudantes- no intuito de focalizar na contribuição do processo para a transição de raciocínios intuitivos e informais para modos de raciocínios mais sofisticados e formais.

Nível Situacional

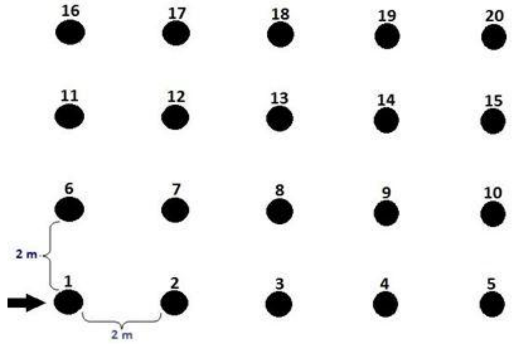
Considerando os modelos emergentes, o nível situacional foi obtido a partir do engajamento dos alunos nessa observação inicial do vídeo didático, traduzindo em um problema contextual. Tratou-se da exploração fenomenológica, nos termos dos princípios da EMR, onde as situações são experiencialmente reais para os alunos, destinados a apoiar um processo de formalização conceitual a partir de raciocínios informais. Como uma atividade rica na geração de uma matematização horizontal, os alunos foram convidados a assistir e descrever o ambiente da plantação de maracujá, tentando observar entidades matemáticas gerais que mais tarde seriam discutidas. Neste designer instrucional, a matemática convencional pode ser reinventada, gerando oportunidade de uma matematização progressiva.

Nível Referencial

Em um segundo momento foi solicitado aos estudantes que observassem a disposição das estacas no solo, considerando a visualização do vídeo, e construíssem uma representação sobre isso.

O modelo a seguir foi definido pelos estudantes, sendo que cada estaca foi representada por uma "bolinha preta", numerada de 1 a 20, imaginando uma visualização aérea do plantio de maracujá, conforme processo de gabaritagem de terra. Nesse modelo, foi considerado um pequeno plantio com 20 pés de maracujazeiros, equidistantes 2 metros um do outro, conforme se observa abaixo:

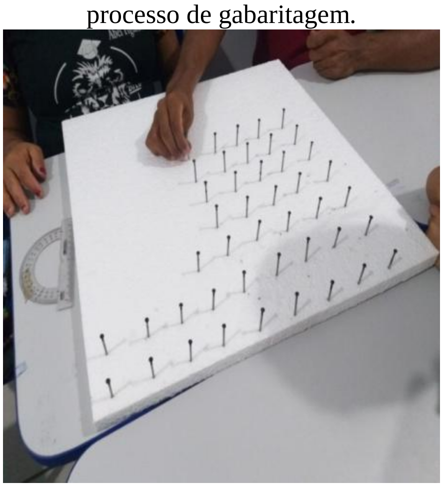
Figura 4. Modelo esquemático representando as estacas para o plantio de maracujá.



Fonte: dados da pesquisa (2019).

A figura a seguir mostra o modelo desenvolvido pelos estudantes durante a intervenção em sala de aula, vejamos:

Figura 5. Modelo esquemático construído pelos estudantes representando o posicionamento das estacas após o processo de gabaritagem.



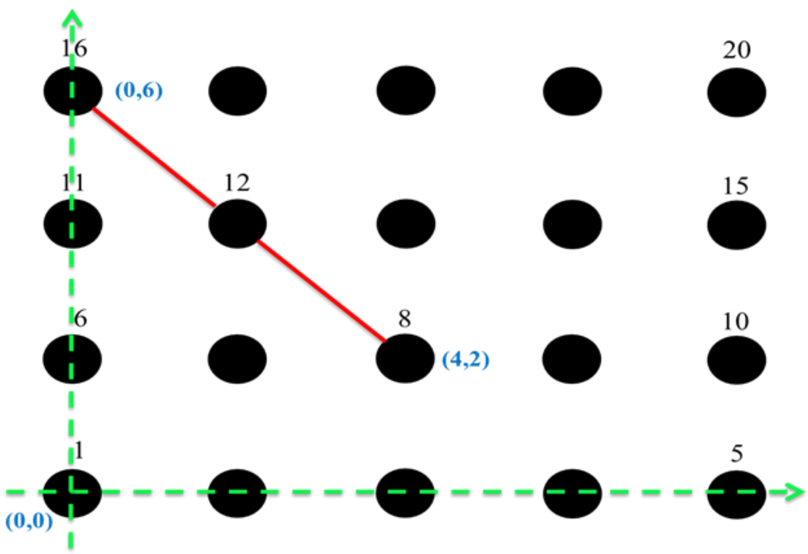
Fonte: dados da pesquisa (2019).

A partir dessa construção, observa-se que o nível referencial foi atingido pelos estudantes, a partir da construção de um modelo esquemático, baseado nas configurações iniciais do problema contextual: o posicionamento das estacas da plantação de maracujá.

Nível Geral

Com base no modelo esquemático anterior, os alunos foram convidados a imaginar esses pontos em um plano de eixos cartesianos, ampliando a ideia do modelo situacional para um modelo mais geral. Desse modo, passou-se a compreender os pontos numa perspectiva de plano cartesiano, um modelo que já não dependia somente do problema contextual inicialmente dado, alcançando segundo os modelos emergentes, o nível geral, em uma evolução de raciocínio matemático.

Figura 6. Modelo esquemático considerando o plano de eixos cartesianos.



Fonte: dados da pesquisa (2019).

Neste modelo esquemático, cada estaca representa um ponto; e a terra, o plano. Com o auxílio de um sistema de eixos associados a um plano, fez-se corresponder a cada ponto do plano um par de coordenadas e vice-versa.

Nível Formal

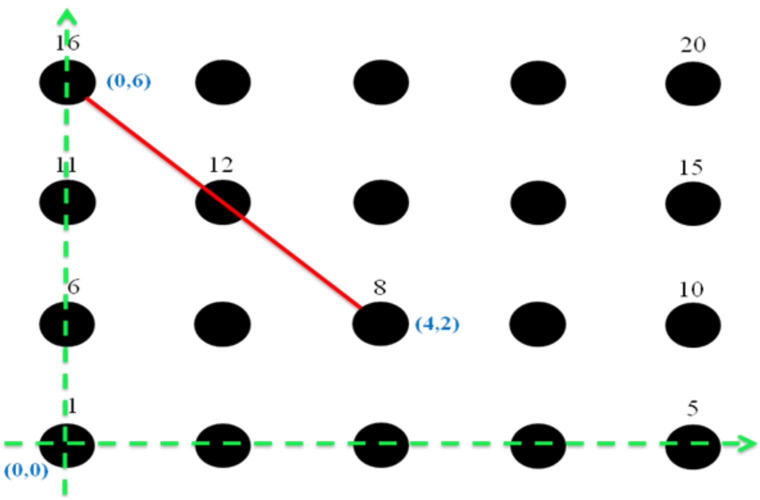
A abordagem adotada para se alcançar o nível formal, segundo os modelos emergentes, partiu de situações-problemas, baseadas no problema contextual inicialmente dado. No nível formal, os alunos raciocinaram sobre os conceitos da geometria analítica, usando notações convencionais, a partir de uma reinvenção guiada pelo professor. Para isso, foram trabalhados durante as aulas os dois tópicos de geometria analítica já discutidos anteriormente, no intuito de fornecer material de suporte ao processo investigativo.

Os nomes dos sujeitos que constam nas sessões problemas a seguir são fictícios, sendo que todas as atividades enunciadas nesse estágio foram realizadas em sala de aula e os alunos já apresentavam um conhecimento prévio sobre os tópicos de geometria analítica estudados na intervenção.

Situação problema 1- Distância entre dois pontos:

Supondo que pretendemos determinar a distância entre Ismael e Tiago, ao saber que eles estão posicionados nas estacas 16 e 8, respectivamente (como observado na figura 7), qual seria essa distância?

Figura 7. Modelo esquemático de distância entre os dois pontos.



Fonte: dados da pesquisa (2019).

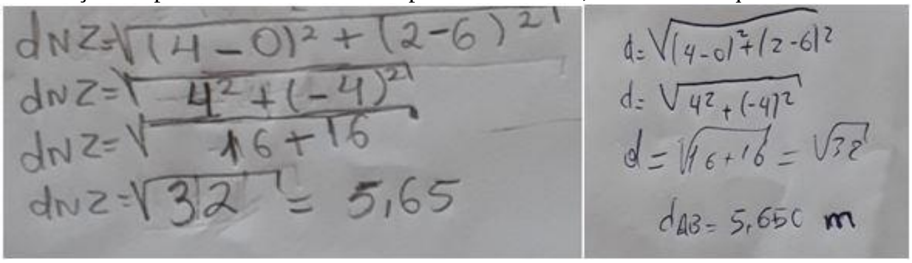
Os alunos, ao traçar dois eixos imaginários correspondentes aos eixos das ordenadas e abscissas, na representação do plantio de maracujá, foram questionados sobre qual seria a distância entre Ismael e Tiago, conforme é apresentado na situação problema, estando nos pontos (0,6) e (4,2), respectivamente.

Sabendo-se que a distância entre dois pontos, é dada pela equação:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

Os alunos desenvolveram a resolução do problema da seguinte forma:

Figura 8. Resolução do problema desenvolvida pelos estudantes, aluno A à esquerda e aluno B à direita.



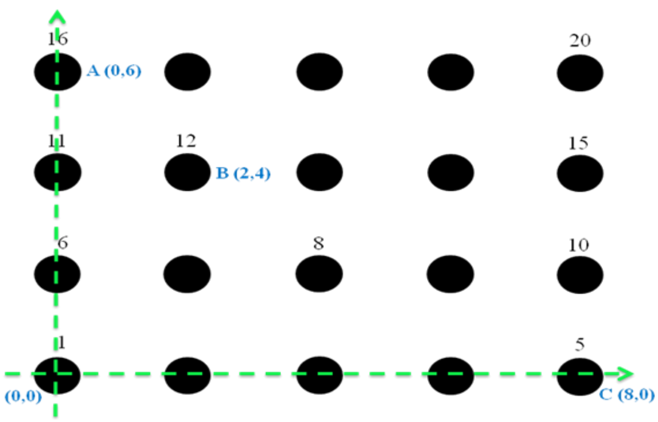
Fonte: dados da pesquisa (2019).

Ao efetuarem os cálculos, os estudantes obtiveram como resposta o resultado 5,65, de modo que a distância entre Ismael e Tiago é de, aproximadamente, 5 metros e 65 centímetros. A resolução desta situação problema pelos estudantes evidencia que a sequência das ações realizadas foi capaz de promover raciocínios formais e apropriação da linguagem matemática, dada a correta aplicação da fórmula de distância entre dois pontos pelos estudantes.

Situação problema 2- Alinhamento de três pontos

Imagine a situação: Ismael, Tiago e Mateus, estão coletando os frutos do maracujá, e cada um está em uma determinada estaca. Sabendo que Ismael está na estaca 16, Tiago na estaca 12 e Mateus na estaca 5. Considerando que os funcionários têm que trabalhar de forma alinhada para um melhor rendimento da colheita, diminuindo assim o tempo de coleta e aumentando a produtividade. Vamos ajudar Ismael, Tiago e Mateus verificando se os mesmos estão ou não alinhados na plantação de maracujá.

Figura 9. Modelo esquemático de alinhamento de três pontos.

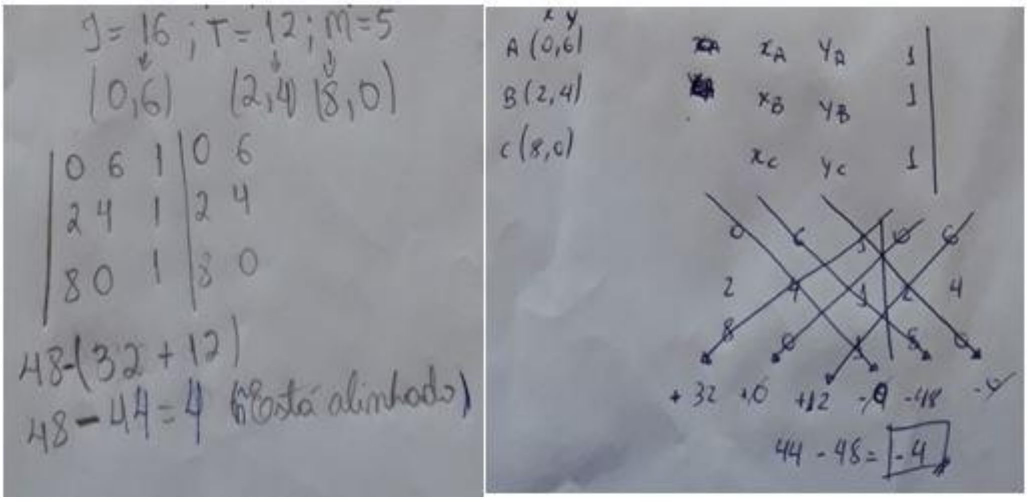


Fonte: dados da pesquisa (2019).

Sabemos que, a partir de três pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C), eles estarão alinhados se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$. Os alunos foram capazes de identificar os três pontos que representavam a posição das estacas onde estavam os funcionários, conforme ilustração 10: estaca 16 (0,6), estaca 12 (2,4) e a estaca 5 (8,0). Para verificar assim se estes três pontos estavam alinhados considerando o posicionamento no plantio, os estudantes desenvolveram a Regra de Sarrus na matriz formada a partir dos pontos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{matrix}$$

Figura 11. Resolução do problema desenvolvida pelos estudantes, aluno A à esquerda e aluno B à direita.



Fonte: dados da pesquisa (2019).

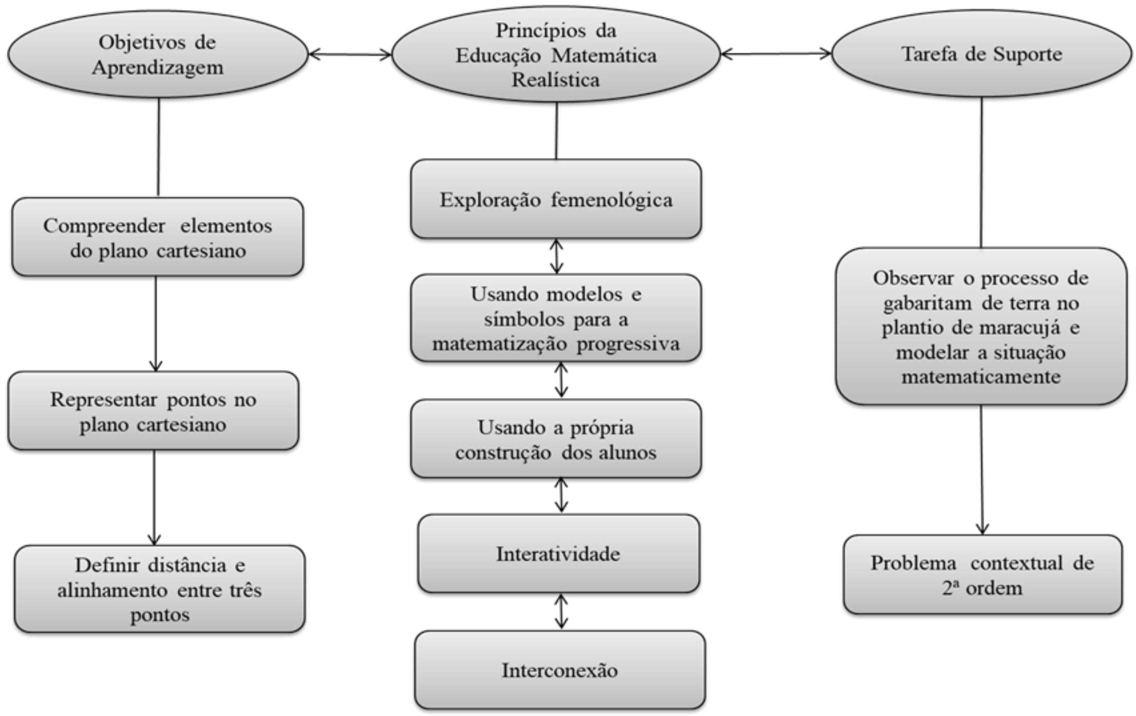
Os alunos obtiveram como resposta o valor do determinante igual a 4, não satisfazendo a condição de alinhamento, pois seu valor teria que ser igual a zero (det = 0). Nesse caso, os alunos conseguiram abstrair, a partir da situação realística posta, conceitos chaves no campo da geometria cartesiana, bem como conseguiram avançar no entedimento de regras de resolução, evidenciando que as ações realizadas têm potencial para o desenvolvimento de conceitos para ensinar matemática no campo.

Desta forma, ao analisarmos as duas situações problemas expostas anteriormente, podemos considerar que os alunos conseguiram utilizar a linguagem matemática apropriada para chegar ao resultado do problema, extraindo informações e utilizando estratégias informais (matematização horizontal), para então utilizar símbolos e algoritmos matemáticos convencionais (matematização vertical).

Articulação com os pressupostos teórico-metodológicos da EMR

No decorrer da intervenção em sala os alunos foram instruídos a construir modelos, nos termos propostos por Zandieh e Rasmussen (2010), na medida em que os conceitos de plano cartesiano, distância e alinhamento entre pontos, relação entre eixo e pares de coordenadas foram sendo desenvolvidos em sala de aula. O fluxograma abaixo ilustra de modo simplificado as relações estabelecidas no designer instrucional.

Figura 11. Fluxograma demonstrativo das relações entre os princípios da EMR e os objetivos de aprendizagem e tarefas de suporte



Fonte: dados da pesquisa (2019).

Em análise ao fluxograma, consideramos que os princípios da EMR foram atingidos durante a intervenção em sala de aula, conforme quadro articulador a seguir:

Quadro 3: Princípios da EMR e como foram atingidos durante a intervenção em sala

Princípios da EMR	Como se atingiu
Exploração fenomenológica	Na exposição do vídeo tutorial apresentando o fenômeno em estudo (a gabaritagem de terra na prática do plantio de maracujá), deste modo, os alunos tiveram contato com uma situação experiencialmente real.
Uso de modelos e símbolos para matematização progressiva	A partir do momento que os alunos começaram a desenvolver os conceitos geométricos em estudos provenientes da exploração do problema contextual, sendo mais notório nos momentos de discussões e problematizações sobre a temática, possibilitando uma evolução natural do conhecimento.
Uso da própria construção dos alunos	Na exploração do fenômeno em estudo durante a construção da maquete, pois os alunos puderam estar se organizando de diferentes modos. E nas

	discussões e problematizações onde se partiu do conhecimento dos estudantes para se alcançar níveis mais formais.
Interatividade	No processo de realização de todas as ações planejadas para acontecerem em sala de aula, com maior ênfase durante a construção da maquete representativa da gabaritagem da terra, instigando os alunos a aplicarem os conhecimentos geométricos em desenvolvimento a partir de uma situação propícia para proporcionar a aproximação de modelos mais gerais da matemática.
Interconexão	Quando os alunos precisaram mobilizar outros domínios da matemática para resolver as situações problemas de cálculo de distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos, utilizando recursos como a fórmula para calcular a distância fazendo relação com o teorema de Pitágoras, o cálculo de determinante através de matrizes 3x3 (a Regra de Sarrus) para determinar o alinhamento dos pontos. Assim, no estudo de geometria analítica a interconexão apresenta-se como uma ferramenta presente em todos os processos ao juntar a álgebra com a geometria.

Fonte: dados da pesquisa (2019).

Portanto, ao articularmos nossas ações com os princípios da EMR, percebemos que a contribuição foi positiva para o processo de ensino dos tópicos de geometria analítica por apresentar uma metodologia própria que está na contramão dos métodos tradicionais de ensino, fazendo um movimento de mobilização dos conhecimentos matemáticos presentes nas práticas socioculturais para o espaço escolar.

Conclusão

Duas práticas matemáticas específicas foram promovidas ao longo da abordagem empírica: i) a construção de um modelo de pontos em um plano, considerando as estacas do plantio de maracujá; ii) raciocínio sobre o plano cartesiano, incluindo a relação de eixos com pares de coordenadas. Uma interconexão entre vários domínios matemáticos foi favorecida, como uso de matrizes e determinantes, e conceitos primitivos da geometria plana, alguns naturalmente emergidos pela natureza do objeto matemático em questão: geometria analítica como o estudo da geometria plana e espacial em uma perspectiva algébrica.

Essas práticas matemáticas surgiram através de problemas contextuais sendo possibilitadas pelo ambiente de aprendizagem projetado pela EMR. Esse ambiente permitiu que os estudantes produzissem suas ideias, em um processo examinador e interacionista a fim de evoluir de níveis de entendimentos informais para raciocínios formais. Nesses termos, uma contribuição inicial vem mostrar que a EMR pode favorecer práticas e objetivos matemáticos e desenvolver o nível do entendimento conceitual.

Especificamente na abordagem dos problemas contextuais desenvolvidos, destacam-se alguns outros aspectos: (1) modelo textual com fins formativos conceituado em situações realísticas; (2) formulação de esquemas matemáticos possibilitados através dos enunciados; (3) Promoção didático-metodológica para explicação e resolução dos problemas. Tais destaques indicam a EMR e a heurística dos modelos emergentes como um designer instrucional significativo para o processo de ensino-aprendizagem de Geometria Analítica no espaço de escolas rurais, superando, em termos de matematização, abordagens tradicionais de ensino.

Considerando que os caminhos metodológicos utilizados pelo professor em sala de aula afetam o rendimento escolar de seus estudantes, os princípios fundamentais da EMR ao referendarem o processo de construção das aulas do professor pautando no ambiente escolar os níveis de aprendizagem dos modelos emergentes favorece diretamente a perspectiva de determinado conhecimento matemático, promovendo raciocínios mais sofisticados e formais.

Ensinar geometria analítica partindo de contextos das práticas socioculturais desenvolvidas nas comunidades dos estudantes, portanto, se torna uma discussão plausível, tendo em vista que na maioria das escolas rurais quando é apresentado o conteúdo de Geometria Analítica, mostra-se de modo técnico e abstrato.

O ensino de matemática nas comunidades rurais origina uma gama de produção de problemas contextuais realísticos, que possibilita à valorização dos saberes matemáticos intrínsecos as atividades cotidianas dos diferentes grupos sociais ali presentes e merecem maior apropriação teórico-metodológica por parte dos educadores. Assim, a Educação Matemática Realística pode ser uma via promissora de exploração didática.

Referências

De lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW & OC.

De Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Madison: WCER.

Ferreira, P. E., & Buriasco, R. L. (2015). Enunciados de tarefas de matemática baseados na perspectiva da Educação Matemática Realística. *Bolema*, *29*(52), 452-472. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a02

Ferreira, P. E., & Buriasco, R. L. (2016). Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(1), 237-252.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers

New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent odels May Foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Gravemeijer, K., Bowers, J., & Stephan, M. (2003). Chapter 4: A Hypothetical Learning Trajectory on Measurement and Flexible Arithmetic. In Stephan, M; Bowers, J; Cobb, P. *Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 51-66). Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/46654962_Supporting_students'_development_of_measuring_conceptions_Analyzing_students'_learning_in_social_context_Journal_for_Research_in_Mathematics_Education_Monograph_No_12, accessed on November 7, 2019.

Gravemeijer, K. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105-128.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2011). *Microdados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* - SAEB. Brasília: INEP.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2018). *Microdados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* - SAEB. Brasília.

Rasmussen, C., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(3), 195-210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.004

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program'. In Streefland, L. (Ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97–121). OW&OC; Utrecht University; Utrecht; The Netherlands.

Treffers, A. (1987). *Mathematics education library*. *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas Project*. Dordrecht, Netherlands: D Reidel Publishing Co.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In Streefland, L. (Ed.). *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 21–57). CD-ß Press, Utrecht.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 2-9.

Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.

[i] Em uma perspectiva pedagógica, matematizar é explorar contextos de modo a compreendê-los/organizá-los matematicamente.

[ii] A gabaritagem de terra é o processo pelo qual se define ou prepara a terra com distanciamento equidistantes entre estacas para implementação de uma cultura.

Informações do artigo / Article Information

Recebido em : 07/11/2019
Aprovado em: 20/01/2020
Publicado em: 29/05/2020

Received on November 07th, 2019
Accepted on January 20th, 2020
Published on May, 29th, 2020

Contribuições no artigo: Os autores foram os responsáveis por todas as etapas e resultados da pesquisa, a saber: elaboração, análise e interpretação dos dados; escrita e revisão do conteúdo do manuscrito e; aprovação da versão final publicada.

Author Contributions: The author were responsible for the designing, delineating, analyzing and interpreting the data, production of the manuscript, critical revision of the content and approval of the final version published.

Conflitos de interesse: Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse referente a este artigo.

Conflict of Interest: None reported.

Orcid

Marcos Guilherme Moura-Silva
http://orcid.org/0000-0003-3589-1897

Rayza de Oliveira Souza
http://orcid.org/0000-0002-8934-8614

Tadeu Oliver Gonçalves
http://orcid.org/0000-0002-2704-5853

Ruy Guilherme Braga Borges
http://orcid.org/0000-0001-7421-0105

Como citar este artigo / How to cite this article

APA
Moura-Silva, M. G., Souza, R. O., Gonçalves, T. O., & Borges, R. G. B. (2020). Educação matemática realística: uma abordagem teórico-metodológica para o ensino de matemática nas escolas do campo. *Rev. Bras. Educ. Camp.*, *5*, e7879. http://dx.doi.org/10.20873/uft.rbec.e7879

ABNT
MOURA-SILVA, M. G.; SOUZA, R. O; GONÇALVES, T. O.; BORGES, R. G. B. Educação matemática realística: uma abordagem teórico-metodológica para o ensino de matemática nas escolas do campo. **Rev. Bras. Educ. Camp.**, Tocantinópolis, v. 5, e7879, 2020. http://dx.doi.org/10.20873/uft.rbec.e7879